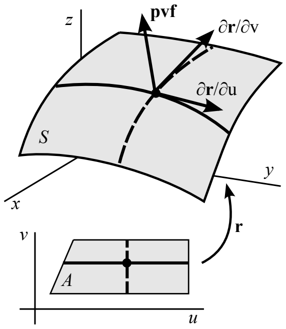
5. Otros temas más allá del curso

5.1. Integrales de superficie

Generalizamos los dos tipos de integrales de línea. Una **superficie** a veces viene dada por $F(x,y,z)=0$. Si se puede despejar la z, por $z=f(x,y)$. Pero lo más general es que se puede describir mediante:

$\boxed{\mathbf{r}: A\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3 \text{, con } \mathbf{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\,,\ (u,v)\in A}$ [2 grados de libertad frente al único t de las curvas].

Suponemos que la superficie $S=\mathbf{r}(A)$ es C^1 [que lo es $\mathbf{r}$]. Entonces:

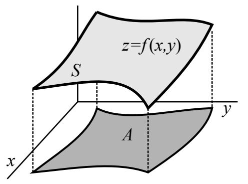


$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}}$$

serán unos vectores tangentes a las curvas contenidas en S obtenidas tomando, respectivamente, $v=k$ y $u=k$. Su producto vectorial

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$ será un vector normal a S.

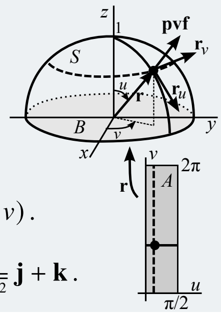
producto vectorial fundamental



Si la superfice se puede escribir en la forma $z=f(x,y)$ una posible parametrización de S es $\mathbf{r}(x,y)=\big(x,y,f(x,y)\big)$, con $(x,y)\in A$ proyección de S sobre $z=0$. El producto vectorial fundamental resulta ser en este caso:

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & f_x\\ 0 & 1 & f_y\end{vmatrix}=(-f_x\,,-f_y\,,1)\,.$$

Ej 1a. Parametricemos la semisuperficie esférica unidad superior. Una posibilidad:



$$\begin{aligned}x(u,v)&=\operatorname{sen}u\,\cos v\\ y(u,v)&=\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v\\ z(u,v)&=\cos u\end{aligned}\qquad \begin{aligned}u&\in[0,2\pi]\\ v&\in[0,\pi/2]\end{aligned}\,,\qquad \begin{aligned}\mathbf{r}_u&=\cos u\,\cos v\ \mathbf{i}+\cos u\,\operatorname{sen}v\ \mathbf{j}-\operatorname{sen}u\ \mathbf{k}\\ \mathbf{r}_v&=-\operatorname{sen}u\,\operatorname{sen}v\ \mathbf{i}+\operatorname{sen}u\,\cos v\ \mathbf{j}\end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cdots & \cdots & -\operatorname{sen}u\\ \cdots & \cdots & 0\end{vmatrix}=\operatorname{sen}^2u\cos v\ \mathbf{i}+\operatorname{sen}^2u\operatorname{sen}v\ \mathbf{j}+\operatorname{sen}u\cos u\ \mathbf{k}$
$=\operatorname{sen}u(\operatorname{sen}u\cos v,\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v,\cos u)=\operatorname{sen}u\ \mathbf{r}(u,v)$.

O bien:

$$\big(x\,,y\,,\sqrt{1-x^2-y^2}\,\big),\ (x,y)\in B \text{ círculo unidad y } \mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathbf{i}+\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathbf{j}+\mathbf{k}\,.$$

Integrales de superficie de campos escalares

Sea S la superficie C^1 dada por $\mathbf{r}: A\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ y sea $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ tal que $f\big(\mathbf{r}(u,v)\big)$ es continua.
Entonces: $\displaystyle\iint_S f\,dS\equiv\iint_A f\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\,\Big\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\Big\|\,du\,dv\,.$

[Y si S está formada por varias superficies C^1 se suman las integrales].
[Como en las de línea se prueba que la integral de una f escalar no depende de la parametrización].
[Cuando $f\equiv 1$ el valor de la integral representa el **área de la superficie** S].

Ej 1b. Hallemos la integral de $f(x,y,z)=z^2$ sobre la superficie S del ejemplo 1a.

Primero con $\mathbf{r}(u,v)=(\operatorname{sen}u\cos v,\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v,\cos u)$. $\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|=|\operatorname{sen}u|\,\|\mathbf{r}\|=\operatorname{sen}u$ [$\mathbf{r}$ es unitario y $\operatorname{sen}u\geq 0$].

Por tanto, $\displaystyle\iint_S z^2\,dS=\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi/2}\cos^2u\ \operatorname{sen}u\ du\,dv=\frac{2\pi}{3}\Big[-\cos^3u\Big]_0^{\pi/2}=\frac{2\pi}{3}\,.$

Con la otra parametrización, el módulo del producto vectorial fundamental resulta ser:

$$\|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y\|=\Big[\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}+1\Big]^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ \Rightarrow$$

$$\iint_S z^2\,dS=\iint_B\sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\,dy\underset{\text{polares}}{\overset{\uparrow}{=}}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\ dr\,d\theta=\frac{2\pi}{3}\Big[-(1-r^2)^{3/2}\Big]_0^1=\frac{2\pi}{3}\,.$$

Veamos que la integral de superficie nos calcula bien el área de S:

área de $\displaystyle S=\iint_S 1\,dS=\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}u\ du\,dv=2\pi\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi/2}=2\pi\,.$ [El de toda la superficie esférica era $4\pi\cdot 1^2$].

Integrales de superficie de campos vectoriales

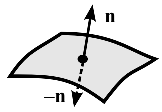
Sea S de C^1 dada por $\mathbf{r}: A\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ y sea $\mathbf{f}: \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ continua sobre S. Entonces:

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}\equiv\iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS\equiv\iint_A \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\big(\tfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\tfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\big)\,du\,dv=\iint_A \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\mathbf{n}(u,v)\,\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,du\,dv$$

[si $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal con el mismo sentido que el producto vectorial fundamental].

Se demuestra que, **salvo el signo**, esta integral es **independiente de la parametrización**.

[Hay dos normales unitarias a una superficie orientada: $\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$ (que conste que las hay no orientadas como la banda de Moebius). Parametrizaciones diferentes proporcionan **p.v.f.** con el sentido de una o de otra. $\mathbf{f}$, S y el sentido de la normal sí determinan la integral].



[El significado físico de esta integral es **flujo del campo vectorial f a través de la superficie** S].

Ej 1c. Integremos $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,z)$ sobre la semisuperficie esférica S de siempre.

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\iint_A \mathbf{r}(u,v)\cdot\big[\,\mathrm{sen}\,u\;\mathbf{r}(u,v)\big]\,du\,dv\underset{\mathbf{r}\text{ unitario}}{\overset{\uparrow}{=}}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\,u\;du\,dv=2\pi\big[-\cos u\big]_0^{\pi/2}=2\pi\,.$$

Con la otra parametrización: $\mathbf{f}\cdot(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y)=\big(x\,,y\,,\sqrt{1-x^2-y^2}\,\big)\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\Big)\Rightarrow$

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\iint_B\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\underset{\text{polares}}{\overset{\uparrow}{=}}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2}\,dr\,d\theta=2\pi\big[-(1-r^2)^{1/2}\big]_0^1=2\pi\,.$$

Teorema de la divergencia en el espacio (o de Gauss-Ostrogradsky)

Sea V una región del espacio limitado por una superficie conexa y sea $\mathbf{f}\in C^1$. Entonces:

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{f}\;dx\,dy\,dz=\iint_{\partial V}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS\,,\text{ con }\mathbf{n}\text{ vector normal unitario exterior a }V\,.$$

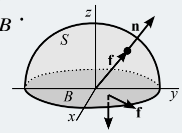
Ej 1d. Comprobémoslo para la $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,z)$ de arriba y la semiesfera unidad superior.

Por una parte: $\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{f}\;dx\,dy\,dz=3\iiint_V dx\,dy\,dz=3\times$ volumen de $V=3\times\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\cdot1^3=2\pi$.

Por otra, ∂V tiene dos partes, la S superior y el círculo B de la base: $\iint_{\partial V}=\iint_S+\iint_B$.

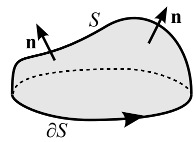
Para S es $\mathbf{n}=\mathbf{f}=\mathbf{r}$ [$\Rightarrow$ $\mathbf{f}\mathbf{n}=1$], y para B es $\mathbf{n}=-\mathbf{k}$ [$\Rightarrow$ $\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}=(x,y,0)(0,0,-1)=0$].

Por tanto, $\iint_{\partial V}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_S 1\,dS+0=$ área de $S=2\pi$.



Teorema de Stokes

Sea S una superficie en el espacio limitada por la curva ∂S y sea $\mathbf{f}\in C^1$.
Entonces: $\iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS=\oint_{\partial S}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$, con $\mathbf{n}$ vector unitario normal a S y con los sentidos de $\mathbf{n}$ y de recorrido de ∂D indicados en el dibujo.



Ej 1e. Comprobamos el teorema para: i) $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,z)$ y ii) $\mathbf{g}(x,y,z)=(0,0,y)$, y la S habitual.

Para i) es $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}=\mathbf{0}\Rightarrow\iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS=0$. Como $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}=\mathbf{0}$, sabemos que $\mathbf{f}$ deriva de un potencial.

Casi a simple vista se ve que $U=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ cumple $\nabla U=\mathbf{0}$. Por tanto, $\oint\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=0$ también.

Para ii) debemos echar alguna cuenta más pues $\mathrm{rot}\,\mathbf{g}=\mathbf{i}$ $\big[\Rightarrow\mathrm{rot}\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{n}=(1,0,0)\cdot(x,y,z)=x\big]$.

Así pues, $\iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_S x\,dS=\int_0^{2\pi}\cos v\,dv\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2u\,du=0$ [la primera integral lo es].

Integral que también se puede hacer: $\displaystyle\iint_B\frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r^2(1-r^2)^{-1/2}\cos\theta\,dr\,d\theta=0$.

Una posible parametrización de ∂S es $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\mathrm{sen}\,t,0)$, $t\in[0,2\pi]\Rightarrow\mathbf{g}(\mathbf{c}(t))=(0,0,\mathrm{sen}\,t)$.

Por tanto, $\oint\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}(0,0,\mathrm{sen}\,t)\cdot(-\mathrm{sen}\,t,\cos t,0)\,dt=\int_0^{2\pi}0\,dt=0$, como debía ser.

[La integral de línea a lo largo de la circunferencia se ha anulado, a pesar de no ser el campo conservativo. En este caso, $\mathbf{g}$ y $\mathbf{c}'$ eran ortogonales. Sobre otras curvas cerradas, la integral de $\mathbf{g}$ será distinta de 0. Dijimos que para que $\mathbf{g}$ fuese conservativo, su integral a lo largo de **todo** camino cerrado debía ser nula].

5.2. Soluciones de EDOs por medio de series

Series de potencias y funciones analíticas (junto a estas notas se incluye un **repaso de series**).

Una función $f(x)$ es **analítica** en $x=x_o$ si viene dada por una **serie de potencias** cerca de x_o :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_o)^k = c_0+c_1(x-x_o)+c_2(x-x_o)^2+c_3(x-x_o)^3+\cdots$$

A partir de ahora, suponemos que $x=0$ (si no, con $x-x_o=s$ estaríamos en ese caso): $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

A cada serie de potencias está asociado un **radio de convergencia** R tal que:
Si $R=0$, la serie sólo converge en $x=0$. Si $R=\infty$, converge para todo x.
Si $0<R<\infty$, converge si $|x|<R$ y diverge si $|x|>R$ (en $x=\pm R$ no se sabe).

Una serie de potencias, para $|x|<R$ (donde converge), **se puede derivar e integrar término a término**:

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\ ,\ f''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}=2c_2+6c_3x+\cdots\ ,\ \ldots$$

$$\int\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\Big)dx = C+\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{c_k}{k+1}\,x^{k+1} = C+c_0x+\tfrac{c_1}{2}x^2+\cdots \text{ si } |x|<R .$$

Y también se pueden sumar, multiplicar,... estas series como si fuesen polinomios:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ si } |x|<R_f \text{ y } g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \text{ si } |x|<R_g \Rightarrow \text{Si } |x|<\text{mín}\{R_f,R_g\}\,,$$

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}[a_k+b_k]x^k\ ,\ \ f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$

Caso particular de estas series son las de **Taylor** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k$, de una f con infinitas derivadas en 0.

Muchas funciones elementales coinciden con su serie de Taylor donde converge. Por ejemplo:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{x^k}{k!}\ ,\ \operatorname{sen}x=\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ,\ \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\ ,\ \operatorname{sh}x=\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ,\ \operatorname{ch}x=\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(x^{2k}}{(2k)!}\ ,\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k,\ \ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1},\ \arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},\ [1+x]^p=1+px+\frac{p(p-1)x^2}{2!}+\cdots\ ,\ |x|<1 .$$

Son, pues, **analíticas**. [No lo son $\ln x$ ó $x^p, p\neq 0,1,\ldots$ en $x=0$, cocientes con denominador nulo...].

Puntos regulares

Sea [e] $y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=0$. Se dice que $x=x_o$ **es un punto regular de** [e] **si** a **y** b **son analíticas en** $x=x_o$. En caso contrario se dice que $x=x_o$ es **punto singular** de [e].

En 3.2 vimos las pocas lineales con coeficientes variables resolubles. Para el resto, si $x=0$ es regular (si a y b se pueden escribir como series), parece adecuado suponer que también **la solución es una serie de potencias y llevarla a la ecuación para determinar sus coeficientes**. Empecemos con un ejemplo:

Ej 1. Resolvamos $\boxed{y''+xy=0}$. $x=0$ es regular pues $a(x)=0$ y $b(x)=x$ son analíticas (con $R=\infty$).

Llevamos una serie de potencias arbitraria y sus derivadas a la ecuación:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,\ y'=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1},\ y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}\to\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1}=0 .$$

La solución deberá contener dos constantes arbitrarias. Intentamos **escribir los** c_k **en función de los dos primeros** c_0 y c_1. Como han de ser 0 los coeficientes de cada potencia de x, deducimos:

$$x^0:\ 2c_2=0.\ \ x^1:\ 6c_3+c_0=0,\ c_3=-\tfrac{1}{6}c_0.\ \ldots\ x^{k-2}:\ k(k-1)c_k+c_{k-3}=0,\ c_k=-\tfrac{1}{k(k-1)}c_{k-3}.$$

La última igualdad es la que se llama **regla de recurrencia** que expresa un coeficiente en función de los anteriores. De ella es fácil deducir los siguientes (siempre en función de c_0 o c_1):

$$c_5=c_8=\cdots=0\,;\ \ c_4=-\tfrac{1}{12}c_1\,;\ \ c_6=-\tfrac{1}{30}c_3=\tfrac{1}{180}c_0\,;\ \ c_7=-\tfrac{1}{42}c_4=\tfrac{1}{504}c_1\,;\ \ldots\ \to$$

$$y=c_0\big[1-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^6+\cdots\big]+c_1\big[x-\tfrac{1}{12}x^4+\tfrac{1}{504}x^7+\cdots\big]\equiv c_0y_1+c_1y_2\ ,\ c_0\,,c_1 \text{ indeterminados.}$$

Para que esto sea la solución general, las series deben converger y debe ser su wronskiano no nulo (lo segundo es fácil de comprobar y el teorema 1 nos asegurará que estas series convergen $\forall x$).

Lo visto en el ejemplo anterior es lo que ocurre en general, como asegura este teorema:

Teor 1. Si $x=0$ es regular y R es el menor de los radios de convergencia de a y b, la solución general de [e] $y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=0$ es $y=c_0y_1+c_1y_2=c_0\big[1+\sum\big]+c_1\big[x+\sum\big]$, con c_0, c_1 arbitrarios, y las series, que tienen potencias x^k con $k\geq 2$, convergen, al menos, si $|x|<R$.
Los coeficientes las series se determinan de forma única probando una serie de potencias arbitraria en [e] [con $a(x)$ y $b(x)$ desarrolladas en serie, si no son polinomios] y expresando sus coeficientes c_k, para $k\geq 2$, en función de c_0 y c_1.
La solución única de [e] con $y(0)=y_o$, $y'(0)=y'_o$ se obtiene haciendo $c_0=y_o$, $c_1=y'_o$.

[Lo de los datos iniciales es inmediato a la vista de la forma de las soluciones].

En el siguiente ejemplo nos van a ir mejor las cosas, porque no sólo vamos a poder calcular unos términos sino que vamos a poder dar las expresiones generales de las series.

Ej 2. $\boxed{(1+x^2)y''+2xy'-2y=0}$, es decir, $y''+\frac{2x}{1+x^2}y'-\frac{2}{1+x^2}y=0$ $\big[\,a(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ y $b(x)=\frac{2}{1+x^2}\,\big]$.

Que $x=0$ es punto regular se deduce del hecho de que P/Q, con P y Q polinomios y $Q(0)\neq 0$ es analítica siempre. Se tiene que además que **el radio R de su desarrollo**, simplificados los factores comunes de P y Q, **es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de Q más próxima**. En nuestro caso será, pues, $R=1$ ($x=\pm\mathrm{i}$ ceros del denominador).

Llevando la serie arbitraria a la ecuación inicial:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \to \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_kx^{k-2}+k(k-1)c_kx^k]+\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}2c_kx^k=0 \to$$

$$x^0:\ 2\cdot1\cdot c_2-2\cdot c_0=0 \to c_2=c_0\,,\quad x^1:\ 3\cdot2\cdot c_3+[2-2]c_1=0 \to c_3=0\,,\ \ldots$$

$$x^k:\ (k+2)(k+1)c_{k+2}+[k(k-1)+2k-2]c_k=0\,.$$

La última igualdad nos da la regla de recurrencia, que, como en el anterior ejemplo, tiene sólo 2 términos (queda c_{k+2} en función de c_k), pero otras veces pueden aparecer varios, lo que complica las cuentas. Para facilitar los cálculos, **factorizamos los polinomios que aparecen** hallando sus raíces:

$$c_{k+2}=-\frac{(k+2)(k-1)}{(k+2)(k+1)}\,c_k=-\frac{k-1}{k+1}\,c_k\,,\quad k=0,1,\ldots$$

Usando esta regla escribimos más c_k con el objetivo de hallar la expresión del **término general** de la serie (en muchos casos esto no será posible, pero ya dijimos que aquí sí):

$$c_4=-\tfrac{1}{3}c_2=-\tfrac{1}{3}c_0\,,\quad c_6=-\tfrac{3}{5}c_4=\tfrac{1}{5}c_0\,,\quad c_8=-\tfrac{5}{7}c_6=-\tfrac{1}{7}c_0\,,\ldots$$

$c_5=0$ por estar en función de c_3 que se anulaba. Análogamente $c_7=c_9=\cdots=0$.

El numerador de c_{2k} es 1, el denominador es $2k-1$ y el signo va alternando, así que:

$$c_{2k}=(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}c_0\,,\quad k=2,3,\ldots$$

Agrupamos, como antes, los términos que acompañan a c_0 y c_1 (que quedan libres) y obtenemos:

$$y=c_0\big[1+x^2-\tfrac{1}{3}x^4+\tfrac{1}{5}x^6+\cdots\big]+c_1x=c_0\Big[1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{2k-1}\Big]+c_1x=c_0y_1+c_1y_2\,,$$

El teorema aseguraba que las series iban a converger al menos si $|x|<1$ y esto es lo que sucede: la serie de y_1 (se ve fácilmente con el criterio del cociente) converge si $|x|<1$ y la 'serie' de y_2 (truncada a partir de su segundo término) converge $\forall x$.

Que y_1 e y_2 son linealmente independientes se deduce (aquí y en general) del wronskiano en $x=0$ de ambas, que es 1 (puesto que $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$, $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$).

Esta ecuación se podría resolver sin series. Como $y_2=x$ era una solución, según vimos en 3.2:

$$y_1=y_2\int y_2^{-2}\,\mathrm{e}^{-\int a}dx=x\int x^{-2}\,\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{1+x^2}}dx=x\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)}=x\int\big[\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{1}{1+x^2}\big]\,dx=-1-x\arctan x$$

[cuyo desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente].

Para resolver una [e] cerca de otro x_o regular, el **cambio de variable** $s=x-x_o$ la llevaría a una ecuación en s para la que $s=0$ es regular. Probaríamos entonces para hallar su solución la serie:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\quad\Big[\text{es decir, }\ y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_o)^k\ \Big].$$

Puntos singulares regulares

Si $x=x_o$ es punto singular de [e] $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ (si a o b o ambas no son analíticas en $x=x_o$), no es aplicable el teorema 1. Pero también sabremos hallar las soluciones utilizando series si son 'poco singulares'. Suponemos que nuestro **punto singular** es $x=0$. Si queremos estudiar las soluciones cerca de otro x_o el cambio $s=x-x_o$ lleva el problema al estudio de las soluciones cerca de $s=0$.

Escribamos [e] de otra forma. Multiplicando por x^2 y llamando $a^*(x)=xa(x)$ y $b^*(x)=x^2b(x)$:

[e*] $\boxed{x^2y''+xa^*(x)y'+b^*(x)y=0}$

$x=0$ **es punto singular regular de** [e] - [e*] **si** a^* **y** b^* **son analíticas en** $x=0$.

Se podrá escribir entonces para $|x|<R$, mínimo de los radios de convergencia de $a^*(x)$ y $b^*(x)$:

$$a^*(x)=a^*_0+a^*_1x+\cdots\ ,\ b^*(x)=b^*_0+b^*_1x+\cdots\qquad \big[\text{Normalmente será } a^*_0=a^*(0) \text{ y } b^*_0=b^*(0)\big].$$

La ecuación más sencilla como [e*] es la de Euler (sus 'series' $a^*(x)$ y $b^*(x)$ tienen un único término), que tiene soluciones x^r (a veces acompañadas de $\ln x$). Es esperable que [e*] tenga soluciones del tipo:

$$y=x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=c_0x^r+c_1x^{r+1}+\cdots \quad \text{para los } r \text{ que cumplan } \boxed{r(r-1)+a^*_0r+b^*_0=0}$$ **polinomio indicial**

Teorema de Frobenius

Supongamos que el polinomio indicial tiene raíces reales r_1 , r_2 con $r_1\geq r_2$.

Entonces siempre una primera solución y_1 de [e*] es de la forma $y_1=x^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,\ c_0\neq 0$.

La segunda solución y_2 linealmente independiente es, según los casos:

a] Si $r_1-r_2\neq 0,1,2,\ldots$, $y_2=x^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,\ b_0\neq 0$. **b]** Si $r_1=r_2$, $y_2=x^{r_1+1}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x$.

c] Si $r_1-r_2=1,2,3,\ldots$, $y_2=x^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$, $b_0\neq 0$, $d\in\mathbf{R}$.

Todas las series convergen al menos si $|x|<R$ y los coeficientes c_k , b_k y la constante d de **c]** se hallan llevando cada una de las soluciones a la ecuación.

Podrían salir raíces complejas, pero nos limitamos a las reales. En Euler, si r_1 y r_2 eran distintas, las dos soluciones eran x^{r_1} y x^{r_2} . Si r era doble había una solución x^r y otra $x^r\ln x$. En el caso **c]** la constante d puede salir 0 y existir, pese a todo, dos soluciones de la forma $x^r\sum$ (como en Euler).

Ej 3. $\boxed{2xy''+y'+xy=0}$, o sea, $x^2y''+x\frac{1}{2}y'+\frac{x^2}{2}y=0$. $a^*(x)=\frac{1}{2}$ y $b^*(x)=\frac{x^2}{2}$ analíticas ($R=\infty$)

$x=0$ singular regular. $a^*_0=\frac{1}{2}$, $b^*_0=0$ $\to$ $r(r-1)+\frac{1}{2}r+0$ $\to$ $r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=0$, $r_1-r_2\notin\mathbf{N}$.

Las series solución son: $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2},\ c_0\neq 0$ e $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,\ b_0\neq 0$ (convergen $\forall x\in\mathbf{R}$, según el teorema).

Llevando y_1 a la ecuación (las series se derivan como las de potencias):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[2(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})c_kx^{k-1/2}+(k+\tfrac{1}{2})c_kx^{k-1/2}+c_kx^{k+3/2}\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\big[k(2k+1)c_kx^{k-1/2}+c_kx^{k+3/2}\big]=0\ \to$$

(ahora las 3 series empiezan por $k=0$)

$x^{-1/2}$: $0\cdot c_0=0$ y c_0 queda indeterminado como debía. $x^{1/2}$: $3c_1=0\to c_1=0$.

$x^{k-1/2}$: $k(2k+1)c_k+c_{k-2}=0$, $c_k=-\frac{1}{k(2k+1)}c_{k-2}$, $k=2,3,\ldots\Rightarrow c_3=c_5=\cdots=0$ y además:

$c_2=-\frac{1}{10}c_0$, $c_4=-\frac{1}{36}c_2=\frac{1}{360}c_0$, ... $\to$ $y_1=x^{1/2}\big[1-\frac{1}{32}x^2+\frac{1}{320}x^4-\cdots\big]$ (eligiendo, por ejemplo, $c_0=1$).

Para la y_2 : $\sum_{k=2}^{\infty}2k(k-1)b_kx^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kb_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+1}=0$ $\to$ x^0: $b_1=0$;

x^1: $[4+2]b_2+b_0=0$, $b_2=-\frac{1}{6}b_0$; x^{k-1}: $[2k(k-1)+k]b_k+b_{k-2}=0$, $b_k=-\frac{1}{k(2k-1)}b_{k-2}$, $k=2,\ldots$

$\to$ $b_3=b_5=\cdots=0$, $b_4=-\frac{1}{28}b_2=\frac{1}{168}b_0$, ... $\to$ $y_2=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{168}x^4-\cdots$

Ej 4. $\boxed{x^2y''+\big(\frac{1}{4}-4x^2\big)y=0}$ $a^*(x)=0$, $b^*(x)=\frac{1}{4}-4x^2$ analíticas en $\mathbf{R}$. $x=0$ singular regular.

$r(r-1)-\frac{1}{4}=0$, $r=\frac{1}{2}$ doble $\to$ $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2}$ $\to$ $\sum_{k=0}^{\infty}\big[k^2c_kx^{k+1/2}-4c_kx^{k+5/2}\big]=0$ $\to$

$x^{1/2}$: $0\cdot c_0=0$, c_0 cualquiera; $x^{3/2}$: $c_1=0$; $x^{k+1/2}$: $k^2c_k-4c_{k-2}=0$; $c_k=\frac{4}{k^2}c_{k-2}$ regla de recurrencia

$\to$ $c_2=c_0$, $c_3=0$, $c_4=\frac{4}{16}c_2=\frac{1}{4}c_0$, ... , $y_1=x^{1/2}\big[1+x^2+\frac{1}{4}x^4+\cdots\big]$.

La otra solución tiene seguro logaritmo: $y_2=x^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x$. Es largo y no la calculamos.

5.3. Problemas más complicados por separación de variables

En los primeros (en **2 variables**) aparecen **EDOs desconocidas** que se suelen exigir usar las series de 5.2. [Tienen más variables, pero supondremos que son independientes de algunas]. Tambien salen problemas de contorno en los que en vez de las condiciones habituales se usa la menos fuerte de la **acotación** (lo visto en 3.3 no es aplicable por ser $p=0$ ó $r=0$ en algún extremo del intervalo). Son **problemas singulares** como:

Ej 1. $\boxed{\begin{cases} xy''+2y'+\lambda xy=0 \\ y \text{ acotada en } x=0,\ y(1)=0\end{cases}}$ $\quad y''+\frac{2}{x}y'+\lambda y=0 \overset{e^{\int a}=x^2}{\longrightarrow} \left[x^2y'\right]'+\lambda x^2y=0 \quad \left[\text{es } p(0)=r(0)=0\right].$

Haciendo el cambio $z=xy$ la ecuación pasa a ser la conocida $z''+\lambda z=0$. Se ve que no hay $\lambda\le 0$.

Para $\lambda>0$, la solución general será $y=c_1\frac{\cos wx}{x}+c_2\frac{\operatorname{sen} wx}{x}$ (puesto que $z=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx$).

Imponemos los datos: y acotada $\to c_1=0$ $\big($ya que $\frac{\cos wx}{x}\overset{x\to 0^+}{\longrightarrow}\infty$, mientras que $\frac{\operatorname{sen} wx}{x}\overset{x\to 0}{\longrightarrow} w\big)$.

Imponiendo el segundo: $y(1)=0 \ \to\ \operatorname{sen} w=0 \ \to\ \lambda_n=n^2\pi^2$, $n=1,2,\dots$, $\ y_n=\left\{\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{x}\right\}$.

Autofunciones ortogonales respecto al peso $r(x)=x^2$, pues $\langle y_n,y_m\rangle=\int_0^1 x^2\frac{\operatorname{sen} nx}{x}\frac{\operatorname{sen} mx}{x}\,dx=0$, $n\neq m$.

[Un dato típico como $y(0)=y(1)=0$ implicaría que $c_1=c_2=0$, y la única solución sería $y\equiv 0\ \ \forall\lambda$].

La **ecuación de ondas** $u_{tt}-c^2\Delta u=0$ **en esféricas** tiene, en general, 4 variables (el tiempo t y las ρ, θ, ϕ), cuyas soluciones quedan determinadas (como en la recta) fijando unos datos de contorno y dos condiciones iniciales. Buscando soluciones que no dependen de los ángulos aparece la **ecuación de ondas en el espacio con simetría radial** (en ρ y t). Resolvemos para ella un problema homogéneo:

Ej 2. $\boxed{\begin{cases} u_{tt}-\left[u_{\rho\rho}+\frac{2}{\rho}u_\rho\right]=0,\ 1\le\rho\le 2,\ t\in\mathbf{R} \\ u(\rho,0)=f(\rho),\ u_t(\rho,0)=g(\rho),\ u(1,t)=u(2,t)=0\end{cases}}$ Separando variables en esta nueva EDP y haciendo uso de los datos de contorno:

$$u=R(\rho)T(t) \to \frac{R''+\frac{2R'}{\rho}}{R}=\frac{T''}{T}=-\lambda \ \to\ \begin{cases}\rho R''+2R'+\lambda\rho R=0,\ R(1)=R(2)=0 \\ T''+\lambda T=0\end{cases}$$

Arriba vemos la ecuación de R (ahora asociada a un problema regular porque estamos en $[1,2]$).

$$S=\rho R \to \begin{cases} S''+\lambda S=0 \\ S(1)=S(2)=0\end{cases} \overset{\rho=s+1}{\longrightarrow} \begin{cases} S''+\lambda S=0 \\ S(0)=S(1)=0\end{cases},\ \lambda_n=n^2\pi^2,\ \underset{n=1,2,\dots}{S_n=\{\operatorname{sen} n\pi s\}},\ R_n=\left\{\frac{\operatorname{sen} n\pi\rho}{\rho}\right\}.$$

Para esos λ_n son $T_n=\{\cos n\pi t,\operatorname{sen} n\pi t\} \ \to\ u(\rho,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[k_n\cos n\pi t+c_n\operatorname{sen} n\pi t\right]\frac{\operatorname{sen} n\pi\rho}{\rho}$.

Las condiciones iniciales imponen: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}k_n\frac{\operatorname{sen} n\pi\rho}{\rho}=f(\rho)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\pi c_n\frac{\operatorname{sen} n\pi\rho}{\rho}=g(\rho)$. $\quad(\bullet)$

Para hallar estos coeficientes del desarrollo debemos utilizar aquí el **peso** $r(\rho)=\rho^2$ del problema:

$$\langle R_n,R_n\rangle=\int_1^2\rho^2\frac{\operatorname{sen}^2 n\pi\rho}{\rho^2}d\rho=\frac{1}{2}\int_1^2\left[1-\cos 2n\pi\rho\right]d\rho=\frac{1}{2},\ \ \langle f,R_n\rangle=\int_1^2\rho^2 f(\rho)\frac{\operatorname{sen} n\pi\rho}{\rho}d\rho \ \text{(igual } g\text{)},$$

nos conduce a que: $k_n=2\int_1^2\rho f(\rho)\operatorname{sen} n\pi\rho\,d\rho$, $c_n=\frac{2}{n\pi}\int_1^2\rho g(\rho)\operatorname{sen} n\pi\rho\,d\rho$, $n=1,2,\dots$

Se llegaría a lo mismo (en otros problemas no habrá atajos) observando que $(\bullet)$ se pueden reescribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n\operatorname{sen} n\pi\rho=\rho f(\rho) \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty}n\pi c_n\operatorname{sen} n\pi\rho=\rho g(\rho),$$

con lo que estamos desarrollando ρf y ρg en $\operatorname{sen} n\pi\rho$, y esto nos lleva a las fórmulas de antes.

Hay una tercera forma de llegar a esta solución, que sirve para resolver también otros problemas para las ondas en el espacio con simetría radial, incluso utilizando D'Alembert: es fácil ver que **el cambio** $v=\rho u$ **la lleva la ecuación a la de la cuerda vibrante**, que resolvimos separando variables en 4.4.

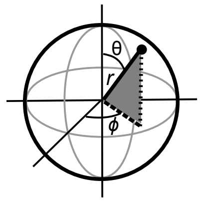
El problema en la variable v pasa a ser: $\begin{cases} v_{tt}-v_{\rho\rho}=0,\ 1\le\rho\le 2,\ t\in\mathbf{R} \\ v(\rho,0)=\rho f(\rho),\ v_t(\rho,0)=\rho g(\rho),\ v(1,t)=v(2,t)=0\end{cases}$.

O también podríamos también aplicar **D'Alembert**, tras extender $F(\rho)=\rho f$ y $G(\rho)=\rho g$ de forma impar respecto a 1 y 2 (o impar respecto a 1 y 2-periódica). La solución sería entonces:

$$u(\rho,t)=\frac{1}{2\rho}\left[F^*(\rho+t)+F^*(\rho-t)\right]+\frac{1}{2\rho}\int_{\rho-t}^{\rho+t}G^*(s)\,ds,$$

que se puede poner en la forma $u=\frac{1}{\rho}p(\rho+t)+\frac{1}{\rho}q(\rho-t)$ y ver como suma de ondas esféricas, cuyos radios disminuyen o crecen (la magnitud de la perturbación es inversamente proporcional al radio ρ).

Un problema importante es el **problema de Dirichlet en una esfera** (bastante más complicado que el del círculo). Resolvemos únicamente el caso de **datos independientes de** ϕ con dos variables. En los libros de cálculo se encuentra la expresión del laplaciano en esféricas. Sin el término en $u_{\phi\phi}$:



$$\boxed{[\text{Pe}]\ \begin{cases} u_{\rho\rho}+\frac{2}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}\left[u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}u_\theta\right]=0\,,\ \rho<R \\ u(R,\theta)=f(\theta)\,,\ \theta\in[0,\pi] \end{cases}}$$

$$u=R(\rho)\,\Theta(\theta)\ \to\ \left[R''+\tfrac{2R'}{\rho}\right]\Theta+\tfrac{R}{\rho^2}\left[\Theta''+\tfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\Theta'\right]=0\ \to\ \begin{cases} \Theta''+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,\Theta'+\lambda\,\Theta=0 \\ \rho^2R''+2\rho R'-\lambda R=0 \end{cases}$$

Simplificamos la de Θ con $s=\cos\theta$ $\left[\,\Theta'=-\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{ds}\,,\ \Theta''=\operatorname{sen}^2\theta\frac{d^2\Theta}{ds^2}-\cos\theta\frac{d\Theta}{ds}\,\right]$. Nos queda:

[L] $\boxed{\left[1-s^2\right]\frac{d^2\Theta}{ds^2}-2s\,\frac{d\Theta}{ds}+\lambda\Theta=0}$, llamada **ecuación de Legendre**.

Debe Θ estár **acotada en** $s=\pm1$ [$\theta=0,\pi$ polos de la esfera]: (P) $\begin{cases}(1-s^2)\Theta''-2s\Theta'+\lambda\Theta=0 \\ \Theta\ \text{ acotada en }\ s=\pm1\end{cases}$.

Para resolver [L] necesitamos series. Como $a(s)=-\frac{2s}{1-s^2}$ y $b(s)=\frac{\lambda}{1-s^2}$ son analíticas si $|s|<1$ probamos:

$$\Theta=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\ \to\sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_ks^{k-2}-k(k-1)c_ks^k\right]-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_ks^k+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda c_ks^k=0\ \to$$

$$s^0:\ 2\cdot1\cdot c_2+\lambda c_0=0\,,\ c_2=-\tfrac{\lambda}{2\cdot1}c_0\,;\qquad s^1:\ 3\cdot2\cdot c_3+(\lambda-2)c_1=0\,,\ c_3=-\tfrac{\lambda-2}{3\cdot2}c_1\,,$$

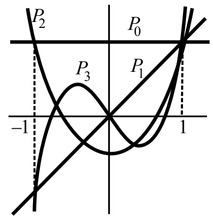
$$s^k:\ (k+2)(k+1)c_{k+2}+(\lambda-(k+1)k)c_k=0\,,\ c_k=-\tfrac{\lambda-(k-1)(k-2)}{k(k-1)}c_{k-2}\to\ c_4=\tfrac{\lambda(\lambda-6)}{4!}c_0\,,\ c_5=\tfrac{(\lambda-2)(\lambda-12)}{5!}c_1\,,\dots$$

$$\Theta=c_0\left[1-\tfrac{\lambda}{2}s^2+\tfrac{\lambda(\lambda-6)}{4!}+\cdots\right]+c_1\left[s-\tfrac{\lambda-2}{6}s^3+\tfrac{(\lambda-2)(\lambda-12)}{5!}s^5+\cdots\right]=c_0\Theta_1+c_1\Theta_2$$

Si $\lambda=n(n+1)$, con $n=0,1,2,\dots$, o Θ_1 o Θ_2 se reduce a un polinomio de grado n:

$$\lambda=0\to\ \Theta_1=1\,,\ \lambda=6\to\ \Theta_1=1-3s^2\,,\dots\qquad \lambda=2\to\ \Theta_2=s\,,\ \lambda=12\to\ \Theta_2=s-\tfrac{5}{3}s^3\,,\dots$$

El **polinomio de Legendre** de grado n es el polinomio solución que cumple $P_n(1)=1$:



$$\boxed{P_0=1\,,\ \ P_1=s\,,\ \ P_2=\tfrac{3}{2}s^2-\tfrac{1}{2}\,,\ \ P_3=\tfrac{5}{2}s^3-\tfrac{3}{2}s\,,\dots}$$

El resto de soluciones son series que se ve (es difícil) que no están acotadas a la vez en 1 y en -1. Por tanto los **autovalores** de (P) son $\lambda_n=n(n+1)$, $n=0,1,2,\dots$, y sus **autofunciones** son los $\{P_n(s)\}$, con las propiedades habituales. Por ejemplo, P_n tiene n ceros en $(-1,1)$. Y son **ortogonales**: $\int_{-1}^{1}P_nP_m\,ds=0$, si $m\neq n$, $\int_{-1}^{1}P_n^2\,ds=\frac{2}{2n+1}$.

Sigamos con el [Pe]. En la variable inicial θ, las autofunciones del problema de contorno (P) son:

$$\{P_n(s)\}=\{P_n(\cos\theta)\}\quad\left[\,P_0=1\,,\ P_1=\cos\theta\,,\ P_2=\tfrac{3}{2}\cos^2\theta-\tfrac{1}{2}\,,\ P_3=\tfrac{5}{2}\cos^3\theta-\tfrac{3}{2}\cos\theta\,,\dots\,\right]$$

Resolvemos la ecuación de Euler en R que apareció separando variables para los autovalores λ_n :

$$\rho^2R''+2\rho R'-n(n+1)R=0\ \to\ \mu^2+\mu-n(n+1)=0\,,\ \mu=n,-(n+1)\ \to\ R=c_1\rho^n+c_2\rho^{-(n+1)}$$

Deberá R estar **acotada** en $\rho=0$ (centro de la esfera), con lo que: $R_n=\{\rho^n\}$, $n=0,1,\dots$

La solución es del tipo: $\boxed{u(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\rho^nP_n(\cos\theta)}$. Sólo falta: $u(R,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^nP_n(\cos\theta)=f(\theta)$.

Como la ecuación en forma autoadjunta pasa a ser $(\operatorname{sen}\theta\,\Theta')'+\lambda\operatorname{sen}\theta\,\Theta=0$, el **peso** es $r(\theta)=\operatorname{sen}\theta$.

El denominador de los coeficientes es $\langle P_n\,,P_n\rangle=\int_0^{\pi}\left[P_n(\cos\theta)\right]^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\overset{s=\cos\theta}{=}\int_{-1}^{1}\left[P_n(s)\right]^2ds=\frac{2}{2n+1}$.

Por tanto, los a_n de la serie de arriba vienen dados por $a_n=\frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi}f(\theta)\,P_n(\cos\theta)\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta$, $n=0,1,\dots$

[Estas integrales son difíciles (o imposibles) de calcular exactamente. salvo que $f(\theta)$ sea un polinomio en $\cos\theta$].

Ej 3. Si $\boxed{R=1\ \text{ y }\ f(\theta)=\cos^2\theta}$ se tiene (haciendo $s=\cos\theta$): $a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}s^2P_n(s)\,ds$.

Para escribir s^2 en función de los P_n bastan P_0, P_1, P_2. Sólo hay que calcular 3 coeficientes:

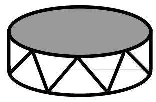
$$a_0=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}s^2\,ds\underset{\text{par}}{=}\int_0^1s^2\,ds=\tfrac{1}{3}\,.\quad a_1=\tfrac{3}{2}\int_{-1}^{1}s^2P_1\,ds=0\ \text{ ya que }\ P_1\ \text{ es impar (y también }\ s^2P_1\text{).}$$

$$a_2=\tfrac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left[\tfrac{3}{2}s^4-\tfrac{1}{2}s^2\right]ds=\tfrac{5}{2}\int_0^1\left[3s^4-s^2\right]ds=\tfrac{5}{2}\left[\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{3}\right]=\tfrac{2}{3}\ \to\ u(\rho,\theta)=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\rho^2+\rho^2\cos^2\theta\,.$$

O mejor, tanteando con los P_n de arriba: $\cos^2\theta=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\to\ a_2=\frac{2}{3}\,,\ a_0=\frac{1}{3}$.

[El problema en 3 variables necesita series dobles y EDOs más complicadas (la 'asociada de Legendre'). Sus soluciones contienen, además de los polinomios de Legendre, productos de ellos por cosenos y senos de ϕ (los 'armónicos esféricos')].

Estudiemos la **vibración de una membrana circular** (de un tambor), suponiendo que hay simetría radial para simplificar (de nuevo será un problema en 2 variables). Y también suponemos que inicialmente es $u_t=0$:



$$\boxed{\begin{cases} u_{tt}-\left[u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right]=0\,,\ r\le 1,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=f(r),\ u_t(r,0)=0\,,\ u(1,t)=0 \end{cases}}$$

[Respecto de la ecuación en el espacio sólo cambia un 2 por un 1, pero es lo que complica los cálculos. Aquí no hay cambio que lleve a la cuerda vibrante].

$$u=RT \to \frac{T''}{T}=\frac{R''+\frac{R'}{r}}{R}=-\lambda \to \begin{cases} rR''+R'+\lambda rR=0\,,\ R \text{ acotada en } 0\,,\ R(1)=0 \\ T''+\lambda T=0\,,\ T'(0)=0 \to \left\{\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\right\} \end{cases}$$

De nuevo tenemos un **problema singular** para una EDO sólo resoluble con series. Empezamos quitando λ mediante un cambio de variable independiente (se prueba como en 3.3 que todos los $\lambda>0$):

$$s=\sqrt{\lambda}\,r=w\,r \text{ (regla de la cadena)} \longrightarrow \frac{dR}{dr}=w\frac{dR}{ds}\,,\ \frac{d^2R}{dr^2}=w^2\frac{d^2R}{ds^2} \ \to\ s\frac{d^2R}{ds^2}+\frac{dR}{ds}+sR=0\,.$$

Esta ecuación es caso particular (con $p=0$) de la llamada ecuación de **Bessel** de orden p:

$$\text{[B]}\ \boxed{s^2R''+sR'+[s^2-p^2]R=0}\,,\ p\ge 0\,,$$

que resolvemos en general pues aparece en otros problemas (si no hay simetría radial, por ejemplo).

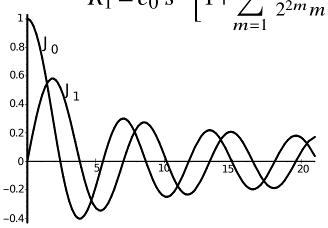
$s=0$ es **singular regular** con polinomio indicial $r(r-1)+r-p^2$, $r_1=p$, $r_2=-p$. Entonces

$R_1=s^p\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k$ (**acotada** en $s=0$ $\forall p$, y convergente $\forall s$) $\to \sum_{k=0}^{\infty}\left[k(2p+k)c_ks^{p+k}+c_ks^{p+k+2}\right]=0$.

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}\,,\ k=2,3,\dots,\ c_1=0 \ \to\ c_3=\cdots=0\,,\ c_2=-\frac{c_0}{2^2(p+1)}\,,\ c_4=\frac{c_0}{2^42(p+1)(p+2)}\,,\ \dots\to$$

$$R_1=c_0\,s^p\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^mx^{2m}}{2^{2m}m!(p+1)\cdots(p+m)}\right]$$

A estas R_1 (elegiendo un c_0 concreto) se les llama **funciones de Bessel J_p de primera especie y orden p**.



En particular son: $J_0(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left[\frac{s}{2}\right]^{2m}$, $J_1(s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\left[\frac{s}{2}\right]^{2m+1}$,

cuyas gráficas están a la izquierda. Como J_0 y J_1, todas las J_p oscilan y tienen infinitos ceros en $(0,\infty)$. Los de J_0 son: $2.405, 5.520, 8.653, \dots$

Las soluciones R_2 de Frobenius (**funciones de Bessel K_p de segunda especie**) **no están acotadas** en $s=0$ (por el $J_0\ln s$, o por aparecer s^{-p}).

Si $p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\dots$, aunque $r_1-r_2\in\mathbf{N}$, en la R_2 no aparece el $\ln s$ (caso **c]** de Frobenius, pero con $d=0$). No sólo esto, las $J_{\frac{2n+1}{2}}$, $n\in\mathbf{Z}$, son funciones elementales. En particular, si $p=\frac{1}{2}$ es $R=c_1\frac{\operatorname{sen}s}{\sqrt{s}}+c_2\frac{\cos s}{\sqrt{s}}$.

Volvamos ya a nuestro problema de contorno singular en la variable inicial r:

$$\boxed{(\mathrm{P})\begin{cases}\left(rR'\right)'+\lambda rR=0 \ \text{(el peso es } r\text{)} \\ R \text{ acotada en } r=0\,,\ R(1)=0\end{cases}}$$

La solución general de la ecuación, deshaciendo el cambio $s=wr$, es: $R=c_1J_0(wr)+c_2K_0(wr)$.

Por la primera condición es $c_2=0$ (K_0 no acotada). De la otra sale $c_1J_0(w)=0$. Por eso los autovalores son los $\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ cuyas raíces son los infinitos ceros de J_0. Y las autofunciones asociadas son $R_n=\left\{J_0(w_nr)\right\}$, que serán ortogonales respecto al peso r. Para esos λ_n las soluciones para la T son: $T_n=\left\{\cos\left(w_n\,t\right)\right\}$.

Sólo falta imponer una condición: $\boxed{u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\cos(w_n\,t)\,J_0(w_n\,r)} \ \to\ u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,J_0(w_n\,r)=f(r)$.

Y entonces los c_n vendrán dados por: $c_n=\frac{\langle f,R_n\rangle}{\langle R_n,R_n\rangle}=\frac{\int_0^1 r\,f(r)\,J_0(w_n\,r)\,dr}{\int_0^1 r\,J_0^2(w_n\,r)\,dr}=\boxed{\frac{2}{J_1^2(w_n)}\int_0^1 r\,f(r)\,J_0\big(w_n\,r\big)\,dr}$.

Probemos la última igualdad (integremos el denominador). Para ello utilizaremos esta propiedad:

$$\left[s^n\,J_n\right]'=s^n\,J_{n-1} \ \to\ J_0'=-J_1\,,\ \left[s\,J_1\right]'=s\,J_0\,,\dots$$

Haciendo $s=w_n\,r$ queda: $\frac{1}{w_n^2}\int_0^{w_n}s\,J_0^2(s)\,ds=\frac{1}{2w_n^2}\left[s^2\left(J_0^2(s)+J_1^2(s)\right)\right]_0^{w_n}=\frac{1}{2}J_1^2(w_n)$ $\left[\text{era } J_0(w_n)=0\right]$.

$$\int s\,J_0^2\,ds \overset{\uparrow}{=} \frac{s^2}{2}J_0^2+\int s\,J_0\,s\,J_1\,ds=\frac{s^2}{2}J_0^2+\frac{1}{2}\left[s\,J_1\right]^2$$

Pese a su aspecto complicado, la solución no lo es mucho más que la $\sum k_n\cos(n\pi t)\operatorname{sen}(n\pi x)$ de la cuerda vibrante. En muchos libros y programas de ordenador se encuentran más ceros w_n de J_0, con los decimales que se precisen, y los valores de $J_1(w_n)$. Con un programa (tipo Maple o Sage) que reconozca la J_0 y que sepa hacer integraciones aproximadas podemos obtener valores de los c_n para cualquier f que nos aparezca. Obsérvese que **las vibraciones de un tambor**, a diferencia de una cuerda, **no son periódicas** (los w_n no son múltiplos exactos unos de otros).

Resolvemos para acabar algún problema (homogéneo) en **tres variables** (sólo con las EDOs conocidas). Necesitaremos las **series de Fourier dobles**:

Sean $X_n(x)$, $x\in[a,b]$ e $Y_m(y)$, $y\in[c,d]$ las autofunciones de dos problemas de contorno con pesos $r(x)$ y $s(y)$, y sea $f(x,y)\in C^1\big([a,b]\times[c,d]\big)$. Entonces en $(a,b)\times(c,d)$ se puede escribir f como la serie:

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{nm}\,X_nY_m \quad\text{con}\quad c_{nm}=\frac{1}{\langle X_n,X_n\rangle}\,\frac{1}{\langle Y_m,Y_m\rangle}\int_a^b\!\!\int_c^d f(x,y)\,X_mY_n\,r\,s\,dy\,dx\,,$$

donde $\langle u,v\rangle$ es $\int_a^b u\,v\,r\,dx$ ó $\int_c^d u\,v\,s\,dy$.

Pues $f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m(x)\,Y_m$, $C_m(x)=\frac{\langle f(x,y),Y_m\rangle}{\langle Y_m,Y_m\rangle}$. Y ahora $C_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{nm}\,X_n$, $c_{nm}=\frac{\langle C_m(x),X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}$.

Un caso particular son los desarrollos en **series trigonométricas dobles** de una $f\in C^1\big([0,L]\times[0,M]\big)$:

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{nm}\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{M}\quad\text{con}\quad b_{nm}=\frac{4}{LM}\int_0^L\!\!\int_0^M f(x,y)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{M}\,dy\,dx\,.$$

$$f(x,y)=\tfrac14\,a_{00}+\tfrac12\sum_{n=1}^{\infty}a_{n0}\cos\frac{n\pi x}{L}+\tfrac12\sum_{m=1}^{\infty}a_{0m}\cos\frac{m\pi y}{M}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M}$$

$$\text{con}\quad a_{nm}=\frac{4}{LM}\int_0^L\!\!\int_0^M f(x,y)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\cos\frac{m\pi y}{M}\,dy\,dx\,.$$

[O desarrollos parecidos en $\sum$ sen cos o $\sum$ cos sen , o impares, o con series en senos y cosenos].

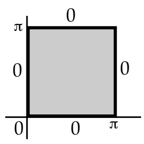
Ej 4. Desarrollemos $\boxed{f(x,y)=x\,\cos y}$, en $[0,\pi]\times[0,\pi]$ de dos formas distintas:

$$b_{nm}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi x\,\cos y\,\operatorname{sen}nx\,\operatorname{sen}my\,dy\,dx\;\to\;x\cos y=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[-1]^{n+1}m}{n[4m^2-1]}\operatorname{sen}nx\operatorname{sen}2my\,.$$

$$a_{nm}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi x\,\cos y\,\cos nx\,\cos my\,dy\,dx\;\to\;x\cos y=\frac{\pi}{2}\cos y-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos[2n-1]x\cos y\,.$$

[ya estaba desarrollada en y]

Ya podemos resolver esta **ecuación del calor en un cuadrado**:



$$\begin{cases}u_t-k[u_{xx}+u_{yy}]=0\,,\ \ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi)\,,\ t>0\\ u(x,y,0)=f(x,y)\,,\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0\end{cases}$$

[Evolución de las temperaturas de una placa, dadas las iniciales, si el borde se mantiene a $0°$].

Buscamos soluciones: $u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)\;\to\;XYT'-k[X''Y+XY'']T=0$

$$\frac{X''}{X}=\frac1k\frac{T'}{T}-\frac{Y''}{Y}=-\lambda\;\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ \frac{Y''}{Y}=\lambda+\frac1k\frac{T'}{T}=-\mu\;\to\end{cases}\begin{cases}Y''+\mu Y=0\\ T'+k[\lambda+\mu]T=0\end{cases}$$

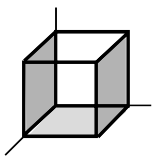
[Una vez más dejamos para la T la expresión más complicada].

Por las condiciones de contorno: $X(0)=X(\pi)=Y(0)=Y(\pi)=0\;\to\begin{cases}\lambda=n^2,\ X_m=\{\operatorname{sen}nx\},\ n=1,2,\dots\\ \mu=m^2,\ Y_n=\{\operatorname{sen}my\},\ m=1,2,\dots\end{cases}$

$\to\ T_{nm}=\big\{e^{-(n^2+m^2)\,k\,t}\big\}\;\to\;u_{nm}(x,y,t)=\big\{e^{-(n^2+m^2)\,k\,t}\operatorname{sen}nx\,\operatorname{sen}my\big\}$ cumple la EDP y todas las condiciones de contorno, como cualquier combinación lineal de ellas. Esto nos lleva a la serie:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{nm}\,e^{-(n^2+m^2)\,k\,t}\operatorname{sen}nx\operatorname{sen}my\,.\ \text{ Además: }\ u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{nm}\operatorname{sen}nx\operatorname{sen}my=f(x,y)$$

$$\to\ b_{nm}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi f(x,y)\operatorname{sen}nx\operatorname{sen}my\,dx\,dy\,,\ n,m\geq1\,.\qquad\Big[\text{Como en la varilla, } u\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0\ \Big].$$



Ahora uno de **Laplace en un cubo** con condiciones de mixtas (de solución única):

$$\begin{cases}\Delta u=0\ \text{ en }\ (0,\pi)\times(0,\pi)\times(0,\pi)\\ u(x,y,0)=f(x,y)\,,\ u=0\ \text{ en }x=0,x=\pi,z=\pi\,,\ u_y=0\ \text{ en }y=0,y=\pi\end{cases}\qquad u=XYZ\;\to$$

$$\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=-\frac{X''}{X}=\lambda\,,\ \frac{Z''}{Z}-\lambda=-\frac{Y''}{Y}=\mu\;\to\begin{cases}X''+\lambda X=0,\ X(0)=X(\pi)=0\\ Y''+\mu Y=0,\ Y'(0)=Y'(\pi)=0\\ Z''-[\lambda+\mu]Z=0,\ Z(\pi)=0\end{cases},\ \begin{cases}\lambda=n^2,\ X_n=\{\operatorname{sen}nx\},\ n=1,2,\dots\\ \mu=m^2,\ Y_m=\{\cos my\},\ m=0,1,\dots\\ Z_{mn}=\big\{\operatorname{sh}\big(\sqrt{n^2+m^2}\,[\pi-z]\big)\big\}\end{cases}$$

$$u(x,y,z)=\tfrac12\sum_{n=1}^{\infty}c_{n0}\operatorname{sh}\big(n[\pi-z]\big)\operatorname{sen}nx+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{nm}\operatorname{sh}\big(\sqrt{n^2+m^2}\,[\pi-z]\big)\operatorname{sen}nx\cos my$$

Como $u(x,y,0)=f(x,y)$, serán: $c_{nm}=\dfrac{4}{\pi^2\operatorname{sh}\big(\pi\sqrt{n^2+m^2}\big)}\displaystyle\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi f(x,y)\operatorname{sen}nx\cos my\,dy\,dx\qquad \begin{matrix}n=1,2,\dots\\ m=0,1,\dots\end{matrix}$

5.4. La transformada de Fourier

> Sea $f(x)$ definida en $\mathbf{R}$ y absolutamente integrable $\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f|<\infty\right]$.
> La **transformada de Fourier** de f es la función $\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{ikx}\,dx$.

Si f es además C^1 se puede recuperar a partir de $\hat{f}$ usando la fórmula de inversión:

Teor 1. $f\in C^1(\mathbf{R})$ y absolutamente integrable $\Rightarrow$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\,e^{-ikx}dk\ \ \forall x\in\mathbf{R}$.

[Algunos libros no ponen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en la definición de $\hat{f}$ y ponen $\frac{1}{2\pi}$ en la fórmula de inversión; también se puede ver en la primera fórmula e^{-ikx} y en la segunda e^{ikx}].

> Se llama a f **transformada inversa** de Fourier de $\hat{f}$. Vamos a denotar también $\mathcal{F}[f]=\hat{f}$ y $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]=f$. Es evidente que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son lineales.

Veamos otras propiedades. La $\mathcal{F}$ hace desaparecer derivadas:

Teor 2. $f,\,f',\,f''\in C(\mathbf{R})$ y absolutamente integrables $\Rightarrow$ $\begin{array}{l}\mathcal{F}[f']=-ik\,\mathcal{F}[f]\\ \mathcal{F}[f'']=-k^2\,\mathcal{F}[f]\end{array}$

$$\mathcal{F}\big[f'(x)\big]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\,e^{ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,f(x)\,e^{ikx}\Big]_{-\infty}^{\infty}-\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{ikx}dx=-ik\,\mathcal{F}\big[f(x)\big],$$

pues $f\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ si $\int_{-\infty}^{\infty}|f|$ converge. $\mathcal{F}\big[f''(x)\big]=-ik\,\mathcal{F}\big[f'(x)\big]=-k^2\,\mathcal{F}\big[f(x)\big]$.

Estas transformadas nos aparecerán resolviendo EDPs (probamos las 2 primeras):

Teor 3. $\mathcal{F}^{-1}\Big[\hat{f}(k)\,e^{iak}\Big]=f(x-a)$. Si $h(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$, $\mathcal{F}[h]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{ikb}-e^{ika}}{ik}$.
$\mathcal{F}\big(e^{-ax^2}\big)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-k^2/4a}$. $\mathcal{F}^{-1}\big(e^{-ak^2}\big)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-x^2/4a}$.

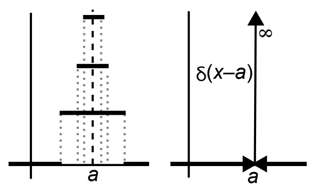
$$\mathcal{F}^{-1}\big(\hat{f}e^{-ika}\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\,e^{-ik(x-a)}dk=f(x-a).\quad \mathcal{F}(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{ikb}-e^{ika}}{ik}.$$

Es totalmente falso que transformadas de productos sean productos (no lo es la integral de un producto). Pero a veces necesitaremos hallar transformadas inversas de productos. Necesitaremos entonces:

Teor 4. La **convolución** de f y g es la función: $(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-s)\,g(s)\,ds$.
Se tiene $f*g=g*f$, y $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$, si las transformadas existen.

Hallemos la transformada de la 'función' **delta de Dirac**, cuya definición seria exige la llamada 'teoría de las distribuciones', pero que es fácil de manejar formalmente. La $\delta(x-a)$ se puede 'definir' intuitivamente como el 'límite' cuando $n\to\infty$ de

$$f_n(x)=\begin{cases}n & \text{si } x\in\left[a-\frac{1}{2n},\,a+\frac{1}{2n}\right]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

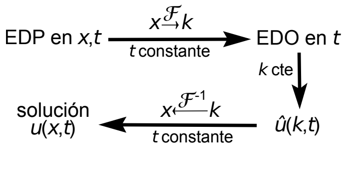


Esta $\delta(x-a)$ tiene las siguientes propiedades (que nos bastarán para trabajar con ella):

$$\delta(x-a)=0 \text{ si } x\neq a\,;\quad \int_b^c f(x)\,\delta(x-a)\,dx=\begin{cases}f(a) & \text{si } a\in[b,c]\\ 0 & \text{si } a\notin[b,c]\end{cases};\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx=1.$$

Su transformada es muy fácil de hallar: $\boxed{\mathcal{F}\big[\delta(x-a)\big]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,e^{ikx}\,dx=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ika}}$.

Aplicar a una EDP en dos variables la $\mathcal{F}$ en una de ellas lleva a una EDO (en la otra variable) para $\hat{u}$. Resolviendo la EDO se halla $\hat{u}$. Identificando la u de la que proviene o con el teorema 1 se puede a veces dar la solución, pero en muchos casos hay que dejar u en términos de integrales no calculables.



En cada uno de los pasos anteriores, hay que tener claro cuáles son las variables y cuales las constantes. En lo que sigue, haremos lo esquematizado a la izquierda, pues nuestras ecuaciones serán en (x,t) y siempre haremos transformadas en x.

Ej 1. $\boxed{\begin{cases} u_t+u_x=g(x) \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}}$ Aplicamos la $\mathcal{F}$ en la variable x (se supone que u, g y f son 'buenas', para que se pueden usar los teoremas). Utilizando la linealidad, el teorema 2 y el hecho de que:

$$\mathcal{F}[u_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,e^{ikx}dx = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{ikx}dx = \hat{u}_t \;\rightarrow\; \begin{cases} \hat{u}_t - i\,k\,\hat{u} = \hat{g}(k) \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \end{cases}.$$

Esta lineal de primer orden en t tendrá solución con una constante para cada k:

$$\hat{u}(k,t) = p(k)\,e^{ikt} - \frac{\hat{g}(k)}{ik}\,,\text{ con } p \text{ arbitraria} \overset{\text{d.i.}}{\rightarrow} \hat{u} = \hat{f}(k)\,e^{ikt} + \hat{g}(k)\Big[\frac{e^{ikt}-1}{ik}\Big]$$

$$\overset{\text{Teor 3 y 4}}{\Longrightarrow} u(x,t) = f(x-t) + \sqrt{2\pi}\,g(x)*h(x) \quad\text{siendo}\quad h(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in[0,t] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}.$$

Como $\int_0^t g(x-u)\,du = -\int_x^{x-t} g(s)\,ds$, concluimos que $\boxed{u = f(x-t) + \int_{x-t}^{x} g(s)\,ds}$.

Obsérvese que la expresión anterior nos da la solución del problema si $f\in C^1$ y g continua, aunque no sean absolutamente integrables, que era necesario para aplicar la transformada. Esta situación es típica utilizando la $\mathcal{F}$: se es riguroso sólo justificando el resultado final.

[Se puede resolver siguiendo 4.1: $\frac{dt}{dx}=1 \rightarrow \begin{cases} \xi = x-t \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = g(\eta) \rightarrow u=p(x-t)+\int_0^x g(s)\,ds$,

$p(x)+\int_0^x g(s)\,ds=f(x) \rightarrow u=f(x-t)-\int_0^{x-t} g(s)\,ds+\int_0^x g(s)\,ds$, como antes].

Ej 2. $\boxed{\begin{cases} u_{tt}+u_{tx}-2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=0 \end{cases}}$ Aplicando $\mathcal{F}$: $\begin{cases} \hat{u}_{tt} - i\,k\hat{u}_t + 2k^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k), \hat{u}_t(k,0)=0 \end{cases}$.

Resolviendo esta lineal con coeficientes constantes de coeficientes complejos:

$$\mu^2 - i\,k\mu + 2k^2 = 0 \;\rightarrow\; \mu = 2i\,k, -i\,k \;\rightarrow\; \hat{u}(k,t) = p(k)\,e^{2ikt} + q(k)\,e^{-ikt}$$

Imponiendo datos iniciales: $p(k)=\frac{1}{3}\hat{f}(k)$, $q(k)=\frac{2}{3}\hat{f}(k) \rightarrow \hat{u}(k,t) = \frac{2}{3}\hat{f}(k)\,e^{-ikt} + \frac{1}{3}\hat{f}(k)\,e^{2ikt}$.

Y como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{ika}\big]=f(x-a)$, será $\boxed{u = \frac{2}{3}f(x+t) + \frac{1}{3}f(x-2t)}$ [solución válida $\forall f\in C^2$, tenga o no transformada].

De nuevo el ejemplo es resoluble también a través de las características:

$$B^2-4AC=9 \text{ hiperbólica} \rightarrow \begin{cases} \xi=x+t \\ \eta=x-2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{xt} = u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta} \end{cases} \rightarrow u_{\xi\eta}=0$$

$$\rightarrow u = p(\xi)+q(\eta) = p(x+t)+q(x-2t),\ \text{solución general.}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = p(x)+q(x) = f(x) \\ u_t(x,0)=p'(x)-2q'(x)=0,\ p(x)=2q(x)+C \end{cases} \quad q(x)=\tfrac{1}{3}f(x)-\tfrac{C}{3},\ \ p(x)=\tfrac{2}{3}f(x)+\tfrac{C}{3} \;\rightarrow\; u(x,t)=\tfrac{2}{3}f(x+t)+\tfrac{1}{3}f(x-2t).$$

Más interés que estos ejemplos, pues no tenemos ningún otro método para resolverlo, tiene:

Problema para el **calor en una varilla infinita**: $\boxed{(\text{P}) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0) = f(x),\ u \text{ acotada} \end{cases}}$

Suponemos que u y f son buenas y tienden rápidamente a 0 en $\pm\infty$ para poder utilizar los teoremas.

Aplicando la $\mathcal{F}$ en la variable x: $\begin{cases} \hat{u}_t + k^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k) \end{cases}$ cuya solución es $\hat{u}(k,t)=\hat{f}(k)\,e^{-k^2t}$.

La solución será la convolución de las transformadas inversas de cada uno de los factores:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{-(x-s)^2/4t}\,ds \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x,s,t)\,f(s)\,ds} \quad [1]$$

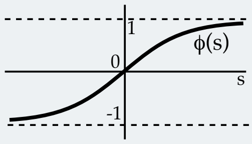
$G(x,s,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-(x-s)^2/4t}$ es la llamada **solución fundamental** de la ecuación del calor [es la temperatura del punto x en el tiempo t debida a una f inicial de la forma $\delta(x-s)$].

Se prueba que [1] da realmente la solución de (P) con hipótesis más amplias de las que permiten aplicar $\mathcal{F}$. En concreto, para toda f acotada y continua a trozos [1] da la solución única de (P) que es continua para $t\geq 0$, menos en los puntos de $t=0$ en que f es discontinua. [1] dice también que, según este modelo matemático, el calor viaja a **velocidad infinita**: si $f>0$ en un entorno de un x_o y nula en el resto, está claro que $u(x,t)>0$ por pequeño que sea t y grande que sea $|x-x_o|$. También se ve que u es C^∞ para $t>0$ aunque f sea discontinua (¡aunque sea $f(x)=\delta(x-s)$!). Son propiedades claramente diferentes de la ecuación de ondas.

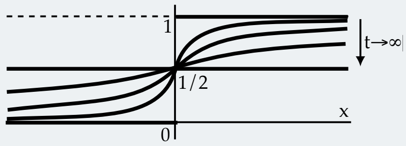
Ej 3. Apliquemos [1] para resolver un par de problemas particulares.

Sea primero $\boxed{f(x)=\begin{cases}0\,, & x<0\\ 1\,, & x\geq 0\end{cases}}$ $\;\to\;$ $u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x-s)^2/4t}\,ds$. Haciendo el cambio $v=\frac{s-x}{2\sqrt{t}}$:

$$u(x,t)\,=\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty}\mathrm{e}^{-v^2}dv\,=\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-v^2}dv\,+\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-v^2}dv\,=\,\tfrac{1}{2}\Big[1+\phi\big(\tfrac{x}{2\sqrt{t}}\big)\Big]\,,$$



donde $\phi(s)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^s \mathrm{e}^{-v^2}dv$ es la llamada función error que aparece a menudo en la teoría de las probabilidades.



Como se observa, la solución, suave si $t>0$, tiende hacia $\frac{1}{2}$ para todo x cuando $t\to\infty$.

Sea ahora $\boxed{f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}}$. Completamos cuadrados y hacemos un cambio de variable:

$$u\,=\,\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}ds\,=\,\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\bullet)^2}ds\quad\text{con}\quad \bullet=\frac{s\sqrt{4t+1}-\frac{x}{\sqrt{4t+1}}}{2\sqrt{t}}\,.$$

Haciendo $z=\bullet$ se obtiene: $u\,=\,\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}dz\,=\,\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{1+4t}}$.

Pero sale mucho más corto aplicando directamente $\mathcal{F}$:

$$\begin{cases}\hat{u}_t=-k^2\hat{u}\\ \hat{u}(k,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-k^2/4}\end{cases}\;\to\;\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2(1+4t)}{4}}\;\to\;u=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{1+4t}}\,.$$

Ej 4. $\boxed{\begin{cases}u_t-u_{xx}+2tu=0\,,\;x\in\mathbf{R},\,t>0\\ u(x,0)=f(x)\,,\;u\text{ acotada}\end{cases}}$ Hallemos la solución para una $f(x)$ general y deduzcamos la solución para $f(x)\equiv 1$.

[Como $\mathcal{F}(1)$ no existe, no se puede resolver directamente el problema con $u(x,0)=1$].

$$\begin{cases}\hat{u}_t+(k^2+2t)\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k)\end{cases}\to\;u(\hat{k},t)\,=\,p(k)\,\mathrm{e}^{-k^2t-t^2}\overset{d.i.}{\to}\,u(\hat{k},t)\,=\,\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-k^2t}\;\to$$

$$u(x,t)\,=\,\mathrm{e}^{-t^2}f(x)*\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-k^2t})\,=\,\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,\mathrm{e}^{-(x-s)^2/4t}\,ds\,.$$

En particular, si $f(x)\equiv 1$, $\;u\,=\,\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x-s)^2/4t}ds\underset{(s-x)/(2\sqrt{t})=u}{=}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}du\,=\,\mathrm{e}^{-t^2}$.

[Parece que sería adecuado hacer un cambio de la forma $u=w\,\mathrm{e}^{-t^2}\to\begin{cases}w_t-w_{xx}=0\\ w(x,0)=f(x)\end{cases}$;

de [1] se deduce nuestra fórmula y $w\equiv 1$ es solución clara si $f(x)\equiv 1$ (la varilla sigue a 1º)].

Ej 5. $\boxed{\begin{cases}u_t-u_{xx}=\delta(x)\\ u(x,0)=0\end{cases}}$ $\begin{cases}\hat{u}_t+k^2\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\\ \hat{u}(k,0)=0\end{cases}\;\to\;\hat{u}\,=\,\frac{1-\mathrm{e}^{-k^2t}}{k^2\sqrt{2\pi}}\;\to\;u\,=\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-k^2t}}{k^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,dk\,.$

No sabemos hallar esta integral en general, pero sí podemos calcular, por ejemplo:

$$u(0,t)\,=\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-k^2t}}{k^2}dk\,=\,-\frac{1-\mathrm{e}^{-k^2t}}{2\pi k}\Big]_{-\infty}^{\infty}+\,\frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-k^2t}dk\,=\,\frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,=\,\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

$$\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-k^2t}dk\underset{k^2t=s^2}{=}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-s}ds\Big]\nearrow$$