Problemas adicionales de Métodos Matemáticos (temas 1 y 2)

[son de temas no centrales del curso o más complicados o demasiado parecidos a otros del 21/22]

Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

1.1. Sean $\mathbf{x}=(2,0,-3)$, $\mathbf{y}=(0,1,3)$. Hallar $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}\times\mathbf{x}$. Encontrar dos vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que no sean múltiplo uno del otro y que ambos sean ortogonales a $\mathbf{x}$.

1.2. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-2,7)$ y es perpendicular al vector $4\mathbf{i}+\mathbf{j}$.
b) Dar tres expresiones paramétricas distintas del segmento que une los puntos $(-1,0)$ y $(1,1)$.

1.3. Con las curvas de nivel y alguna sección dibujar la superficie definida por $z^2=1+x^2+y^2$.

1.4. Probar que el campo escalar $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ para $(x,y)\neq(0,0)$, con $f(0,0)=0$, tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero que no es diferenciable en dicho punto.

1.5. Sea $f(x,y)=\frac{x^2}{y}$, $f(x,0)=0$. Dibujar sus curvas de nivel. Precisar los puntos en los que f es continua. Hallar, si existen, el ∇f y la derivada según el vector $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ en i) $(0,0)$ y en ii) $(1,1)$.

1.6. Sea $f(x,y)=x\operatorname{sen}2y$. Hallar un vector unitario $\mathbf{v}$ tal que $D_{\mathbf{v}}f(1,0)$ sea: i) máxima, ii) mínima, iii) 0, iv) 1.

1.7. Sea $f(x,y)=(y-2x)^3$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0$, 1 y -1. Hallar $\nabla f(0,1)$ y Δf. Hallar el vector unitario $\mathbf{u}$ para el que es máxima la derivada de f en el punto $(0,1)$ en la dirección de $\mathbf{u}$.

1.8. Sea $f(x,y)=(x+y)^2$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y $f=4$. Hallar $\nabla f(1,1)$ y Δf. Precisar el vector unitario $\mathbf{u}$ para el que la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(1,1)$ es mínima y hallar el valor de esa derivada mínima.

1.9. Sea $f(x,y)=9-x^2-y^2$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=8,5,0,-7$, el corte con $x=0$ y su gráfica.
b] Hallar un vector unitario $\mathbf{u}$ tal que la derivada de f en el punto $(2{,}1)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ sea 0.
c] Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1)$.
d] Si $\mathbf{c}(t)=\left(2t,t^3\right)$, hallar la derivada de la función $h(t)=f(\mathbf{c}(t))$ en $t=1$ utilizando la regla de la cadena.

1.10. Una chinche camina sobre el plano xy. La temperatura en (x,y) es de e^{-x-2y} grados. Cuando la chinche está en $(0,0)$ se mueve hacia el este a una velocidad de 2 m/minuto y hacia el norte a una velocidad de 3 m/minuto. Desde el punto de vista de la chinche, ¿Con qué rapidez está cambiando la temperatura del suelo?

1.11. Escribir la ecuación en derivadas parciales $y^2u_{yy}-x^2u_{xx}=0$ en las nuevas variables $s=xy$, $t=\frac{x}{y}$, utilizando la regla de la cadena. Comprobar que la función $u(x,y)=f(xy)+x\,g(\frac{x}{y})$, con $f,g\in C^2(\mathbf{R})$ satisface la ecuación.

1.12. Si $\underset{t}{\mathbf{R}}\xrightarrow{\mathbf{c}}\underset{(x,y)}{\mathbf{R}^2}\xrightarrow{\mathbf{g}}\underset{(u,v)}{\mathbf{R}^2}$, escribir, con la regla de la cadena, $\frac{du}{dt}$ y $\frac{dv}{dt}$ en función de las derivadas de u, v, x e y.
Comprobar las fórmulas obtenidas en el caso particular en que $\mathbf{c}(t)=(t,\mathrm{e}^t)$ y $\mathbf{g}(x,y)=(xy\,,y-x^2)$.

1.13. Sea $f(x,y)=\frac{x+y}{1+xy}$. **a]** Hallar el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0,2)$ y la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por dicho punto. **b]** Si $h(u,v)=f\left(u^3+v^2-1,\ \mathrm{e}^v+1\right)$, calcular, mediante la regla de la cadena, la derivada direccional de h según el vector $\left(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\right)$ en el punto $(u,v)=(1,0)$.

1.14. Sea $f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/4}$. Dibujar aproximadamente su gráfica. Calcular ∇f en cartesianas y polares. Estudiar en qué puntos es f diferenciable. Calcular $\Delta f(0,1)$. Determinar en qué punto del segmento que une $(0,1)$ y $(-2,0)$ y en la dirección de qué vector el campo f crece más rápidamente.

1.15. Sean $\overline{r}(x,y)=(x,y)$, $r=\|\overline{r}\|$. Probar que: $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\overline{r}}{r^3}$, $\nabla\left(\log r\right)=\frac{\overline{r}}{r^2}$, $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^3}$, $\Delta\left(\log r\right)=0$.

Cálculo integral en $\mathbf{R}^n$

2.1. Calcular $\iint_R f$ para: a) $f(x,y)=(xy)^2\cos x^3\,dx\,dy$, $R=[0,1]\times[0,1]$, b) $f(x,y)=\log(xy)$, $R=[1,2]\times[1,2]$.

2.2. Hallar $\iint_D f\,dx\,dy$ para $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}$ y D cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$, $(-1,0)$.

2.3. Calcular $\iint_D (2x-y)\,dx\,dy$, siendo D semicírculo dado por $x^2+y^2\le 4$, $x\ge 0$, trabajando en cartesianas y polares.

2.4. Sea $f(x,y)=(y-2x+1)^2$. **a)** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1. **b)** Hallar Δf. **c)** Precisar para qué $\overline{u}$ unitario es mínima $D_{\overline{u}}f(1,2)$. **d)** Hallar la integral $\iint_D f$, con D triángulo de vértices $(0,-1)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

2.5. Sea $f(x,y)=\frac{x}{y}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0$ y 1. Hallar el vector unitario $\mathbf{u}$ con la dirección y sentido de $\nabla f(1,1)$ y el valor de la derivada $D_{\mathbf{u}}f(1,1)$. Hallar $\Delta f(x,y)$. **b]** Si D es la parte del círculo $x^2+y^2\le 2$ con $x\ge 0$ e $y\ge 1$: i) calcular $\iint_D f\,dx\,dy$ (en ese orden), ii) expresar la integral en polares.

2.6. Sea $f(x,y)=x^2y^2$. **a)** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 4. **b)** Hallar $\nabla f(2,-1)$ y Δf. **c)** Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,-1)$. **d)** Calcular $\iint_D f$, siendo D la región del primer cuadrante limitada por la recta $y=x$ y la curva $y=x^3$.

2.7. Sea $f(x,y)=x\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0,1$. Hallar y dibujar $\nabla f(0,2)$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(0,2)$. **b]** Calcular la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D la región del primer cuadrante limitada por las circuferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$.

2.8. Sea $f(x,y)=x^2+xy$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y el vector $\nabla f(1,-1)$. Hallar $\operatorname{div}(\nabla f)$. Encontrar dos $\mathbf{u}$ unitarios para los que sea $D_{\mathbf{u}}f(1,-1)=0$. **b]** Si D es el círculo $x^2+y^2\le 4$, hallar $\iint_D f$ en polares y plantear y dar un paso del cálculo en cartesianas.

2.9. Calcular el área A de una elipse de semiejes a y b: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con el cambio $x=ar\cos\theta$, $y=br\,\mathrm{sen}\,\theta$.

2.10. Hallar con un cambio de variable $\iint_B (x^2+y^2)\,dx\,dy$, si B acotada por $\begin{array}{l} xy=1,\ x^2-y^2=1 \\ xy=2,\ x^2-y^2=4 \end{array}$ en el primer cuadrante.

2.11. Calcular $\iiint_B (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, donde $B=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

2.12. Calcular $\iiint_V x^2\cos z\,dx\,dy\,dz$, con V región acotada por los planos $z=0$, $z=\pi$, $y=0$, $x=0$, $x+y=1$.

2.13. Sea $F(x,y,z)=y\mathrm{e}^{2x+z}$. **a)** Hallar $\|\nabla F(1,\frac{1}{2},-2)\|$, el $\overline{u}$ unitario para el que es máxima $D_{\overline{u}}F\left(1,\frac{1}{2},-2\right)$ y el valor de la derivada direccional. **b)** Calcular $\iiint_V F$, con V sólido limitado por los planos $y=0$, $y=2$, $x=1$, $z=0$, $2x+z=0$.

2.14. Para $F(x,y,z)=z\,\mathrm{e}^{x-y}$ calcular: **a]** ∇F, $\operatorname{rot}\left(\nabla F\right)$, $\operatorname{div}\left(\nabla F\right)$. **b]** El vector unitario $\mathbf{u}$ para el que es máxima la derivada $D_{\mathbf{u}}F(1,1,2)$. **c]** $\iiint_V F$, con V sólido acotado por $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $z=0$, $z=2$.

2.15. Sea $g(x,y,z)=z^2-x-2y$. **a)** Escribir la ecuación del plano tangente a $g=0$ en el punto $(4,0,2)$. **b)** Calcular $\iiint_V g$, si V es el sólido dado por $x^2+y^2\le 4$, $0\le z\le 3$.

2.16. Calcular el volumen de la región acotada por el cilindro $x^2+y^2=1$, el plano $z=0$ y la superficie $z+x^2=1$.

2.17. Hallar el volumen encerrado entre las superficies $z=x^2+y^2$ y $x^2+y^2+z^2=2$ en cilíndricas y en esféricas.

2.18. Hallar la longitud de las curvas:

a) $\left(|t|,\left|t-\frac{1}{2}\right|\right)$, $t\in[-1,1]$ b) $\begin{array}{l} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\,\mathrm{sen}\,t-\mathrm{sen}\,2t \end{array}$, $t\in[0,2\pi]$ (cardioide) c) $y=\ln x$, $x\in[1,\mathrm{e}]$

2.19. Un alambre está sobre un tramo de espiral $r=\mathrm{e}^{\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$. En cada punto (r,θ) la temperatura es r. Calcular la temperatura media del alambre.

2.20. Sea $F(x,y,z)=z\,\mathrm{e}^{2x+y}$. **a]** Hallar la ecuación del plano tangente a $F=1$ en el punto $(-1,2,1)$ y un vector unitario $\mathbf{u}$ para el que la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}F(-1,2,1)=0$. **b]** Calcular $\iiint_V F$, con V sólido acotado por $x=0$, $y=0$, $2x+y=2$, $z=0$, $z=2$, y la integral de línea de F sobre el segmento que une $(1,0,0)$ y $(0,2,2)$.

2.21. Sean $\mathbf{f}(x,y)=\big(y^2,2xy\big)$ y la curva $\mathbf{c}(t)=\big(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\operatorname{sen} t\big)$, $t\in\big[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\big]$. Dibujar la curva y precisar el punto en el que su recta tangente en $(1,1)$ corta el eje y. Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$. ¿Es $\mathbf{f}$ conservativo? Calcular: i) $\int_{\mathbf{c}}\operatorname{div}\mathbf{f}\,ds$, ii) $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$.

2.22. Sean $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=\big(2xy,x^2-3\big)$ y $\bar{\mathrm{c}}(t)=\big(2-t^2,t\big)$, $t\in[-2,2]$. **a)** Hallar $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}$ y precisar si $\bar{\mathrm{f}}$ es conservativo. **b)** Determinar el punto en el que la recta tangente en $(1,-1)$ a la curva descrita por $\bar{\mathrm{c}}(t)$ corta el eje x. **c)** Hallar el valor de $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}$ de dos formas diferentes.

2.23. **a]** Sea $f(x,y)=x^2-y^2$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y el vector $\nabla f(1,1)$. Hallar la derivada de f en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v}=(-1,-1)$. Hallar $\Delta f(x,y)$. **b]** Hallar la integral de línea de $\mathbf{g}(x,y)=(2x,-2y)$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$ a lo largo del tramo de circunferencia dado por $x^2+y^2=1$, $x,y\geq 0$.

2.24. Sea D el cuadrilátero cuyos vértices son $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,-1)$ y $(2,-1)$. a) Calcular $\iint_D(x+2y)\,dx\,dy$. b) Hallar la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=(1,\cos y)$ a lo largo de la frontera de D, en el sentido horario.

2.25. Sean $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(5x-y,2x)$ y $\bar{\mathrm{c}}(t)=(2\cos t,2\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$. **a)** Dibujar la curva descrita por $\bar{\mathrm{c}}$ y precisar el punto en el que la recta tangente a esa curva en el punto $\big(1,\sqrt{3}\big)$ corta el eje x. **b)** Hallar: i) $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}\,ds$, ii) $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}$. ¿Deriva $\bar{\mathrm{f}}$ de un potencial?

2.26. Calcular $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ para $\mathbf{f}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+xyz\,\mathbf{k}$, en estos dos casos:
a) $\mathbf{c}(t)=(t,t,t)$, $t\in[0,1]$.
b) $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,0)$, $t\in[0,2\pi]$.

2.27. ¿Qué trabajo realiza la fuerza $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ al mover una partícula a lo largo de la parábola $y=x^2$, $z=0$, desde $x=-1$ hasta $x=2$?

2.28. Sea $\overline{g}(x,y,z)=\big(z,x,y\big)$. Calcular $\operatorname{div}\overline{g}$ y $\operatorname{rot}\overline{g}$. Si $\overline{c}(t)=(2,\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[-\pi,\pi]$, hallar el valor de $\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}$.

2.29. Sea el campo vectorial $\mathbf{g}(x,y,z)=\big(2ye^{2x},e^{2x},2z\big)$. Calcular $\operatorname{div}\mathbf{g}$, $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{g})$ y $\operatorname{rot}\mathbf{g}$. Hallar el valor de la integral de línea $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}$, siendo $\mathbf{c}(t)$ el segmento que une $(0,0,1)$ y $(1,2,1)$ en ese sentido.

2.30. Hallar la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=\mathbf{i}+2yz\,\mathbf{j}+y^2\,\mathbf{k}$ entre $(1,0,2)$ y $(0,3,0)$ a lo largo del segmento que une esos puntos. ¿Existe alguna curva que una los dos puntos para la que la integral sea 0?

2.31. Sea $\mathbf{g}(x,y,z)=\big(2e^{2x-y},-e^{2x-y},z\big)$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{g}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{g}$. ¿Deriva $\mathbf{g}$ de un potencial? b) Hallar el valor de la integral de línea $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}$, siendo $\mathbf{c}(t)=\big(t^2,4t,t\big)$, con $t\in[0,2]$.

2.32. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=e^{-z}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-xe^{-z}\,\mathbf{k}$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. **b]** Hallar el valor de la integral de línea de $\mathbf{f}$ desde $(1,-1,0)$ hasta $(1,0,2)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

2.33. Sea $\mathbf{g}(x,y,z)=\big(x^2,z,y\big)$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{g}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{g}$. b) Calcular $\iiint_V\operatorname{div}\mathbf{g}$, siendo V el sólido limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $x+y=2$, $z=0$ y $z=1$. c) Si $\mathbf{c}(t)=(t,\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,\pi]$, hallar la longitud de la curva dada por $\mathbf{c}$ y la integral de línea $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}$.

2.34. Sea el semicírculo D dado por $x^2+y^2\leq 1$ e $y\geq 0$ y sea $\mathbf{f}(x,y)=(x^2,3xy)$. Calcular la integral doble $\iint_D 3y$ y la integral de línea de $\mathbf{f}$ sobre la ∂D recorrida en el sentido opuesto a las agujas del reloj. ¿Debían tener el mismo valor? ¿Existe alguna $U(x,y)$ tal que $\nabla U=\mathbf{f}$?

2.35. Comprobar el teorema de Green para $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,xy)$ y D el semicírculo definido por $x^2+y^2\leq 1$, $x+y\geq 0$.

2.36. Verificar el teorema de la divergencia para
a) $\mathbf{f}(x,y)=(x,y)$ y D el disco unidad $x^2+y^2\leq 1$.
b) $\mathbf{f}(x,y)=(2xy,-y^2)$ y D el cuadrado unidad $[0,1]\times[0,1]$.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

3.1. Hallar la solución de: a) $\begin{cases} y''+4y=8x^2 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y''+y'-2y=1-2x \\ y(0)=1\,,\ y'(0)=-1 \end{cases}$, c) $\begin{cases} y''+2xy'=2x \\ y(1)=y'(1)=1 \end{cases}$.

3.2. Hallar la solución general de $x^2y''+xy'-n^2y=0$, para $n=0,1,2,\ldots$

3.3. Hallar la solución general de las ecuaciones de Euler: a) $x^2y''+xy'-y=4x^2$, b) $x^2y''+xy'-4y=4$.

3.4. Hallar la solución de $xy''+y'=4x$ que cumple $y(1)=y'(1)=0$.

3.5. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)-2y(1)=0 \end{cases}$. Probar gráficamente que tiene un autovalor negativo e infinitos positivos, indicando la autofunción. ¿Es $\lambda=0$ autovalor?

3.6. Sea $\begin{cases} y''-2y'+y+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Hallar sus autovalores λ_n y sus autofunciones $\{y_n\}$, y calcular $\langle y_n\,,y_n\rangle$.

3.7. Sea $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Precisar si $\lambda=-3$ es o no autovalor, dando la autofunción en el caso que lo sea.

3.8. Estudiar si i) $\lambda=-3$ ii) $\lambda=2$ son autovalores de $\begin{cases} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea.

3.9. Precisar si i) $\lambda=0$ ii) $\lambda=\frac{1}{4}$ son o no autovalores de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\frac{\pi}{2})-2y'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea.

3.10. Sea $y''-y=3e^{-2x}$. i) Hallar su solución general y la que satisface los datos iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
ii) ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen los datos de contorno $y'(0)=y'(1)=0$?

3.11. Hallar la solución general de $y''+4y'+3y=2xe^{-2x}$ y la que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=-1$.
¿Cuántas soluciones de esta ecuación cumplen las condiciones de contorno $y(0)+y'(0)=y(1)=0$?

3.12. ¿Hay o no una única solución de $y''+y=2x\,e^x$ cumpliendo los datos de contorno $y(0)=y(\pi)=0$?

3.13. Sea $y''+y'=x$. **a]** Hallar la solución general y la única que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=-1$.
b] Estudiar si hay o no una única solución cumpliendo los datos de contorno $y'(0)=y'(1)=0$.

3.14. **a]** Precisar si $\lambda=-3$ y $\lambda=2$ son o no autovalores de $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$ y dar la autofunción cuando lo sea.
b] ¿Para alguno de esos dos λ hay sólo una solución de $y''+2y'+\lambda y=e^{-x}$ que cumpla $y(0)=y(\pi)=0$?

3.15. Sea [C] $y''+4y'+5y=e^{-2x}(2x-\pi)$. Hallar su solución general y la que cumple $y(0)=0$, $y'(0)=2$. Escribir [C] en forma autoadjunta y precisar cuántas soluciones de la homogénea y de la no homogénea cumplen $y(0)=y(\pi)=0$.

3.16. Sea $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ 3y(1)+5y'(1)=y'(2)=0 \end{cases}$. Precisar si $\lambda=-1$ y $\lambda=0$ son o no autovalores dando la autofunción si lo es. ¿Cuántas soluciones de $x^2y''+xy'=x$ cumplen esos datos de contorno?

3.17. **a]** Sea $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$. Precisar si $\lambda=0$ y $\lambda=\frac{5}{4}$ son o no autovalores dando la autofunción cuando lo sea. [Imponer los datos a la solución general en cada caso].
b] i) Hallar la solución general de $y''-y'=1$ y la única que cumple los datos iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
ii) ¿Cuántas soluciones de esta misma ecuación cumplen las condiciones de contorno $y(0)=y(\pi)=0$.

3.18. Desarrollar $f(x)=\cos^3 x$, $x\in[0,\pi]$, en serie de i) $\{\cos nx\}$, ii) $\{\operatorname{sen} nx\}$, dibujando las funciones hacia las que tienden las series.

3.19. Hallar los autovalores y las autofunciones, y desarrollar $f(x)=x$ en las autofunciones de los problemas:

a) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-1)=y(1)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$

3.20. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(\frac{3}{4})+\pi y(\frac{3}{4})=0 \end{cases}$. **a]** Probar que $\lambda=\pi^2$ es autovalor y dar su autofunción $\{y_1\}$. Estudiar si $\lambda=0$ lo es. Probar gráficamente que hay infinitos $\lambda_n>0$, dar sus $\{y_n\}$ y hallar $\langle y_n\,,y_n\rangle$.
b] Hallar el valor de c_1 en el desarrollo en serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\,y_n(x)$ de $f(x)=x$. ¿Cuánto suma la serie si $x=\frac{1}{2}$?

Ecuaciones en derivadas parciales

4.1. Sea $yu_y-xu_x=u+2x$ y los datos iniciales: i) $u(x,0)=-x$, ii) $u(x,2)=7x$. Hallar la única solución que satisface uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.

4.2. Sean $2yu_y+xu_x=4yx^2u$ y los datos $\begin{array}{l}\text{i) } u(-2,y)=1\,,\\ \text{ii) } u(x,x^2)=0\,.\end{array}$ Hallar la solución para el que proporciona solución única.

4.3. Resolver: a) $\begin{array}{l}u_y-2u_x=\frac{2}{y}u\\ u(x,1)=x\end{array}$, b) $\begin{array}{l}u_y+\frac{3}{2}u_x=x-y\\ u(x,x)=0\end{array}$, c) $\begin{array}{l}2yu_y-xu_x=2u+4y^2\\ u(2,y)=0\end{array}$, d) $\begin{array}{l}yu_y+(2y-x)u_x=x\\ u(x,1)=0\end{array}$.

4.4. Resolver [hallar sus características y, con la regla de la cadena, la ecuación para u_η , dar su solución general e imponer el dato]:

a) $\begin{cases}yu_y+xu_x=0\\ u(x,1)=x\end{cases}$, b) $\begin{cases}u_y+2u_x=2yu\\ u(x,1)=\mathrm{e}^x\end{cases}$, c) $\begin{cases}yu_y+xu_x=2u\\ u(x,2)=4x\end{cases}$, d) $\begin{cases}yu_y-xu_x=y\\ u(-1,y)=3y\end{cases}$,

e) $\begin{cases}u_y+u_x=-u\\ u(x,0)=\mathrm{e}^x\end{cases}$, f) $\begin{cases}u_y-2u_x=(x+2y)u\\ u(x,1)=2\end{cases}$, g) $\begin{cases}2xu_y+u_x=4xy\\ u(1,y)=1\end{cases}$, h) $\begin{cases}u_y+2yu_x=3xu\\ u(x,0)=2x\end{cases}$.

4.5. Sea $u_{yy}-4u_{xy}+4u_{xx}=2x+4y$. Escribirla en forma canónica y hallar su solución general.

4.6. Dar su forma canónica y hallar la solución pedida: a) $\begin{cases}u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u_y-u_x=0\\ u(x,0)=0,\ u_y(x,0)=1\end{cases}$, b) $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=2\ ,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=0\end{cases}$.

4.7. Resolver $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=2\ ,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,x)=x^2,\ u_t(x,x)=x\end{cases}$ a) Hallando su solución general e imponiendo los datos. b) Haciendo antes el cambio $w=u-t^2$.

4.8. **a]** Escribir el desarrollo de $f(x)=1$ en serie de autofunciones de $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X(\pi)=0\end{cases}$.

b] Resolver $\begin{cases}u_t-4u_{xx}=0\ ,\ x\in(0,\pi)\ ,\ t>0\\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$ para: i) $f(x)=1$, ii) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$.

4.9. **a]** Calcular el desarollo de $f(x)=\pi x$ en las autofunciones del problema $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'\big(\frac{\pi}{2}\big)=0\end{cases}$.

b] Para $\begin{cases}u_t-u_{xx}=0\ ,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\ ,\ t>0\\ u(x,0)=\pi x\ ,\ u_x(0,t)=u_x\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0\end{cases}$, hallar los 2 primeros términos no nulos de su serie solución.

4.10. **a]** Hallar el desarrollo de $f(x)=2x$ en serie de autofunciones de $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'(\pi)=0\end{cases}$.

b] Sea $\begin{cases}u_t-2u_{xx}+u=0\ ,\ x\in(0,\pi)\ ,\ t>0\\ u(x,0)=2x\ ,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0\end{cases}$. Escribir los 3 primeros términos no nulos de su serie solución.

4.11. **a]** Desarrollar $f(x)=\begin{cases}x\ ,\ 0\le x\le 1/2\\ 0\ ,\ 1/2<x\le 1\end{cases}$ en serie de $\{\operatorname{sen} n\pi x\}$ y precisar cuánto suma de la serie si i) $x=\frac{1}{4}$, ii) $x=\frac{1}{2}$.

b] Resolver mediante separación de variables $\begin{cases}u_t-u_{xx}=0\ ,\ x\in(0,1)\ ,\ t>0\\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$.

4.12. Sea $\begin{cases}u_t-u_{xx}+2tu=0\ ,\ x\in(0,\pi)\ ,\ t>0\\ u(x,0)=f(x)\ ,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0\end{cases}$. Hallar la solución para **a]** $f(x)=\cos 2x$ y el primer término no nulo de la serie solución si **b]** $f(x)=2x$.

4.13. Resolver: a) $\begin{cases}u_t-4u_{xx}=0\ ,\ x\in(0,1)\ ,\ t>0\\ u(x,0)=x\ ,\ u(0,t)=u_x(1,t)=0\end{cases}$, b) $\begin{cases}u_t-(2+\cos t)\,u_{xx}=0\ ,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\ ,\ t>0\\ u(x,0)=1\ ,\ u_x(0,t)=u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0\end{cases}$.

4.14. Sea $\begin{cases}u_t-u_{xx}=0\ ,\ x\in(0,3\pi),\ t>0\\ u(x,0)=1\ ,\ u(0,t)-4u_x(0,t)=u(3\pi,t)=0\end{cases}$. Resolverlo y escribir de forma exacta el primer término de la serie solución.

4.15. Resolver $\begin{cases}u_t-u_{xx}+2u=0\ ,\ x\in(0,1)\ ,\ t>0\\ u(x,0)=x\ ,\ u(0,t)=u(1,t)-u_x(1,t)=0\end{cases}$ (la solución tiene sólo un término).

4.16. **a]** Escribir el desarrollo de la función $f(x)=\frac{\pi}{4}$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X'(\pi)=0\end{cases}$.

b] Resolver $\begin{cases}u_t-4u_{xx}=\frac{\pi}{4}\ ,\ x\in(0,\pi)\ ,\ t>0\\ u(x,0)=u(0,t)=u_x(\pi,t)=0\end{cases}$. [Llevar una serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial y calcular las infinitas $T_n(t)$].

4.17. **a]** Resolver $\begin{cases} T'=-(1+2t)\,T+e^{-t^2} \\ T(0)=1 \end{cases}$. **b]** Desarrollar $f(x)=\frac{\pi}{4}$ en serie de autofunciones de $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$.

c] Hallar 2 términos no nulos de la serie solución de $\begin{cases} u_t-u_{xx}+2tu=e^{-t^2}\operatorname{sen}x\,,\ x\in(0,\pi)\,,\, t>0 \\ u(x,0)=\frac{\pi}{4}\,,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$.

4.18. Resolver por separación de variables:

a) $\begin{cases} u_t-2u_{xx}=e^{-t}\operatorname{sen}x\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>0 \\ u(x,0)=\operatorname{sen}3x\,,\ u(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=\operatorname{sen}t\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\operatorname{sen}^2x\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-2t}\cos x\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u_x(0,t)=0,\ u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-2t}\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_t-\frac{1}{\pi}u_{xx}=\pi\operatorname{sen}\pi x\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\frac{\pi}{4}\,,\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_t-\frac{1}{t}u_{xx}=1\,,\ x\in(0,\pi),\ t>1 \\ u(x,1)=\cos 2x\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

4.19. Sea el problema no homogéneo $\begin{cases} u_t-u_{xx}+3u=F(x)\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$, con **a)** $F(x)=4\operatorname{sen}x$, **b)** $F(x)=\pi$.

Hallar la solución en el caso **a)** y los 2 primeros términos no nulos de la serie solución en el caso **b)**.

4.20. Resolver: a) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=t \end{cases}$, b) $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=\cos\frac{\pi x}{2},\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=2,\ u_x(0,t)=1,\ u(1,t)=2 \end{cases}$.

Determinar en cada caso el límite de la solución $u(x,t)$ cuando $t\to\infty$.

4.21. Escribir en forma canónica y resolver por diferentes vías: a) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6t\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=16\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(0,t)=t\,,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$.

4.22. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\cos^2x\,,\ u(0,t)=t \end{cases}$. a] Hallar $u(\pi,2\pi)$. b] Hallar $u(x,2\pi)$ para $x\geq 2\pi$.

4.23. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\left\{\begin{smallmatrix} 2x-x^2, & x\in[0,2] \\ 0\ , & x\in[2,\infty) \end{smallmatrix}\right.,\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$. Dibujar la extensión f^* y dar su expresión. Hallar $u(1,1)$. Dibujar $u(x,1)$.

4.24. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=4x-x^3,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$. Hallar $u\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$. Dibujar $u(x,2)$.

4.25. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=u(0,t)=0,\ u(2,t)=4 \end{cases}$. Hallar $u(1,2)$ y $u(x,1)$, con D'Alembert y separando variables.

4.26. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,3]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=3x-x^2 \\ u(0,t)=u(3,t)=0 \end{cases}$. Hallar $u(1,2)$ utilizando la fórmula de D'Alembert. Resolver separando variables y aproximar $u(1,2)$ con el primer término de la serie solución.

4.27. **a]** Calcular la solución de $\begin{matrix} T''+T=2e^{-t} \\ T(0)=1\,,\ T'(0)=0 \end{matrix}$. **b]** Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2e^{-t}\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}x,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$.

4.28. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=4\operatorname{sen}6x\cos 3x\,,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$ (no es necesario hacer integrales).

4.29. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\,,\ u(0,t)=\operatorname{sen}wt,\ u(\pi,t)=0 \end{cases}$. Dar valores de w para los que la solución no esté acotada.

4.30. Resolver $\begin{cases} u_{tt}+2u_t-5u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x)\,,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ i) para cualquier $g(x)$, ii) para $g(x)=2\operatorname{sen}x$.

4.31. a) Desarrollar $f(\theta)=\cos\theta$ en $\{\operatorname{sen}n\theta\}$ simplificando el resultado. ¿Converge la serie hacia f en todo $[0,\pi]$?

b) Resolver por separación de variables $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=\cos\theta\,,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$.

4.32. Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{3} \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}3\theta\,,\ u(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{3}\right)=0 \end{cases}$ por separación de variables.

4.33. Resolver por separación de variables estos problemas planos homogéneos:

a) $\begin{cases} \Delta u = 0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=\theta,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } r<1 \\ u_r(1,\theta)=\operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta u = 0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}2\theta \\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$

4.34. Sea $\begin{cases} \Delta u = 0\,,\ r<1,\ \theta\in(0,\pi) \\ u(1,\theta)+2u_r(1,\theta)=4\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$. Hallar su única solución y comprobar que cambiando $+2u_r$ por $-2u_r$ el problema físicamente imposible que resulta pasa a tener infinitas soluciones.

4.35. Resolver $\begin{cases} \Delta u = 0\,,\ 1<r<2,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4} \\ u(1,\theta)=0,\ u_r(2,\theta)=\operatorname{sen}\theta \\ u(r,0)=u(r,\frac{\pi}{4})-u_\theta(r,\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$ [El problema de contorno tiene autovalor sencillo y en la solución sólo aparece una autofunción].

4.36. Sean: a) $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ \ r<2\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(2,\theta)=\pi\,,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\pi\,,\ r<1\,,0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$.

Resolverlos por separación de variables y escribir los dos primeros términos no nulos de la serie solución.

4.37. Resolver: a) $\begin{cases} \Delta u = 3\operatorname{sen}\theta\,,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u_r(1,\theta)=u(r,0)=u_\theta(r,\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} \Delta u=\operatorname{sen}\theta\,,\ 1<r<2 \\ u_r(1,\theta)=u(2,\theta)=0 \end{cases}$.

4.38. Resolver: **e1]** $rR''+R'=4r$, **e2]** $rR''+R'=-1$ (haciendo $R'=v$ o viéndolas como ecuaciones de Euler) y los problemas:

a] $\begin{cases} \Delta u=4\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=3 \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$ **b]** $\begin{cases} \Delta u=4,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=1-\cos 2\theta \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$ **c]** $\begin{cases} \Delta u=-\frac{1}{r}\,,\ 1<r<3\,,0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=2+\cos\theta \\ u(3,\theta)=u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$.

Problemas adicionales de Métodos Matemáticos (otros temas más allá del curso)

Integrales de superficie

5.1. Sea S la superficie cilíndrica $x^2+y^2=4$ comprendida entre los planos $z=0$ y $z=3$. Hallar el área de S utilizando integrales de superficie y calcular la integral de superficie de $\mathbf{f}(x,y,z)=(xz,yz,2)$ sobre S.

5.2. Sean las superficies $S=\{x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0\}$ y $B=\{x^2+y^2\leq R^2,\ z=0\}$. Comprobar que se verifica el teorema de la divergencia sobre $S\cup B$ para el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(\,y\,,-x\,,1\,)$.

5.3. Sea S el triángulo determinado por los puntos $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(-1,1,1)$ y $\mathbf{f}(x,y,z)=(yz,\mathrm{e}^y,1)$. Calcular la integral de superficie de $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ sobre S directamente y utilizando el teorema de Stokes.

5.4. Sea S la parte del paraboloide elíptico $z=4-4x^2-y^2$ con $z\geq 0$ y $x\geq 0$, y sea el campo $\mathbf{f}(x,y,z)=(3,x^2,y)$. Comprobar el teorema de Stokes calculando la integral de superficie de $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ sobre S y la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo del contorno cerrado que limita dicha superficie.

5.5. Sea S la parte de la superficie cónica $z^2=x^2+y^2$, con $1\leq z\leq 2$, y sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,1)$. i) Calcular la integral de superficie $\mathbf{f}$ sobre S respecto de la normal exterior al cono. ii) Hallar el $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. Sin calcularla: ¿cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo de la circunferencia que limita superiormente S?

Soluciones de EDOs por medio de series

5.6. Sea $(a+bx^2)\,y''-2y=g(x)$. **a]** Para $a=0$, $b=1$, $g(x)=0$, hallar la solución general de la ecuación.
b] Para $a=2$, $b=0$, $g(x)=\mathrm{e}^x$, hallar la solución general tanteando (coeficientes indeterminados) y con la **fvc**.
c] Para $a=2$, $b=0$, $g(x)=2x^2$, hallar la solución que satisface los datos iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=3$.
d] Para $a=b=1$, $g(x)=0$, probando una serie de potencias en la ecuación, hallar el desarrollo hasta x^5 de la solución que cumple $y(0)=0$, $y'(0)=3$.

5.7. Hallar los 3 primeros términos no nulos de una solución de $y''+xy'+y=0$ que se anule en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia.

5.8. Sea $y''+[2-2x]y'+[1-2x]y=0$. a) Hallar el desarrollo hasta x^4 de la solución en forma de serie de potencias que cumple $y(0)=0$, $y'(0)=1$. b) Sabiendo que $y=\mathrm{e}^{-x}$ es otra solución, escribir la solución de a) en términos de una integral, desarrollar la integral y comparar.

5.9. Sea $4x^2y''-3y=x^2$. a) Hallar la solución general de la no homogénea. b) Hallar el desarrollo hasta orden 4 en torno a $x=1$ de la solución de la homogénea con $y(1)=0, y'(1)=1$.

5.10. Sea $3xy''+(2-6x)y'+2y=0$. Hallar una solución que no sea analítica en $x=0$. Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial que sea analítica en $x=0$.

5.11. Sea $4xy''+2y'+y=0$. Comprobar que $x=0$ es punto singular regular y encontrar las raíces de su polinomio indicial. Hallar el desarrollo en serie de la solución que es analítica en el punto y deducir la solución general en términos de funciones elementales. Comprobarlo haciendo el cambio de variable $s=x^{1/2}$.

5.12. Sea $2\sqrt{x}\,y''-y'=0$. Precisar si $x=0$ es punto singular regular. Calcular, hasta tercer orden, el desarrollo en serie en torno a $x=1$ de la solución que cumple $y(1)=y'(1)=1$.

5.13. Sea $(1-x^2)y''-2xy'+y=0$. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de la solución con $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Esudiar si hay soluciones no triviales que se anulen en $x=-1$.

5.14. Hallar la solución general de $x^2y''+x(4-x)y'+2(1-x)y=0$, desarrollando en torno a $x=0$ e identificar las series solución con funciones elementales.

5.15. Sea $xy''-2y'+4\,\mathrm{e}^x y=0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de potencias de una solución que se anule en $x=0$.

5.16. Sea $xy''+(1-x^2)y'+pxy=0$. Precisar, resolviendo por series en torno a $x=0$, los valores de p para los que hay soluciones que son polinomios y escribir uno de estos polinomios para $p=4$.

Problemas más complicados por separación de variables

5.17. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{\rho\rho}-\frac{2}{r}u_\rho=0\,,\ \rho\le 1\,,\ t\ge 0 \\ u(\rho,0)=0,\ u_t(\rho,0)=\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\pi\rho\,,\ u(1,t)=0 \end{cases}$ i) por separación de variables, ii) haciendo $v=u\rho$ y usando las técnicas de 4.4.

5.18. Resolver la ecuación de Legendre $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$ en torno a $x=1$, estudiar la acotación de las soluciones en ese punto y volver a obtener los polinomios P_0, P_1 y P_2.

5.19. Sea $\begin{cases} \big([1-x^2]y'\big)'+\lambda y=0 \\ y(0)=0,\ y \text{ acotada en } 1 \end{cases}$ Hallar los 3 primeros términos del desarrollo de $f(x)=1$ en serie de autofunciones de este problema singular $\big[$los P_{2n-1} de Legendre$\big]$.

5.20. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el espacio: $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ 1<\rho<2 \\ u(1,\theta)=\cos\theta\,,\ u(2,\theta)=0 \end{cases}$

5.21. Resolver $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$, i) mediante un cambio de la forma $y=x^ru$, ii) por series.

5.22. Hallar los autovalores y autofunciones de $\begin{cases} x^2y''+xy'+[\lambda x^2-\frac{1}{4}]y=0 \\ y(1)=y(4)=0 \end{cases}$, a) haciendo $s=\sqrt{\lambda}\,x$, b) haciendo $u=\sqrt{x}\,y$.

5.23. Hallar (en términos de funciones elementales) una solución acotada de:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+4u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$$

[Separando variables y haciendo $s=2r$ aparece una ecuación conocida].

5.24. Sea una placa circular homogénea de 1 cm de de radio, inicialmente a 0º. Supongamos que en $t=0$ todo su borde se calienta hasta 1º y luego se mantiene a esa temperatura. Hallar las temperaturas en la placa para $t>0$ y la distribución estacionaria hacia la que tienden cuando $t\to\infty$.

5.25. Resolver los problemas en 3 variables:

a) $\begin{cases} u_t-\Delta u=0,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\, t>0 \\ u(x,y,0)=1+\cos x\cos 2y \\ u_x(0,y,t)=u_x(\pi,y,t)=u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,y,0)=0\,,\ u_t(x,y,0)=\operatorname{sen}3x\ \operatorname{sen}^2 2y \\ u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0 \end{cases}$

Transformada de Fourier

5.26. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-3u_{xt}+2u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$ con transformadas de Fourier y deducir la solución para $f(x)=x^2$.

5.27. Obtener la fórmula de D'Alembert utilizando transformadas de Fourier.

5.28. Resolver a] $\begin{cases} 2u_t+u_x=tu \\ u(x,0)=e^{-x^2} \end{cases}$, b] $\begin{cases} u_t+e^tu_x+2tu=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$, c] $\begin{cases} u_{tt}-6u_{tx}+9u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\, u_t(x,0)=0 \end{cases}$ i) con las características, ii) utilizando la $\mathcal{F}$.

5.29. Dar su solución sin incluir integrales: a] $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u_x=0\,,\ x\in\mathbf{R},\, t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/2} \end{cases}$, b] $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R},\, t>0 \\ u(x,0)=\delta(x),\ u \text{ acotada} \end{cases}$.