1. Sean $\mathbf{x}=4\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}$, $\mathbf{y}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$. Hallar y dibujar $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$, y hallar el módulo de estos 3 vectores. Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. ¿Forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ un ángulo agudo u obtuso entre ellos? Hallar la distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ y el ángulo formado por $\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$.

2. Sean $\mathbf{a}=(1,0,-1)$, $\mathbf{b}=(1,1,0)$. Hallar $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. Hallar la distancia de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ y el ángulo que forman. Comprobar la desigualdad triangular para $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Escribir una expresión del plano que contiene esos vectores. Dar ecuaciones paramétricas del segmento que une $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que lo recorran en sentidos opuestos.

3. Con las curvas de nivel y algunas secciones dibujar las superficies definidas por:

a) $z=4-2x-y$ b) $z=|y|$ c) $4x^2+y^2+4z^2=4$ d) $z^2=x^2+y^2-1$

4. Sean: a) $f(x,y)=xy$, b) $g(x,y)=y^2$, c) $h(x,y)=2x-y$, d) $k(x,y)=(x^2+y^2)^{-1}$. Dibujar algunas curvas de nivel. Hallar y dibujar su gradiente en algunos puntos. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1)$.

5. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de:

$$f(x,y)=x^5y-4x-xy^3 \qquad g(x,y)=x\,\mathrm{e}^{x+y} \qquad h(x,y)=\frac{\cos(xy)}{x} \qquad k(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$$

6. Sea $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-2y}$. Dibujar la curva de nivel $f=1$ y $\nabla f(2,1)$. Hallar $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}$. Precisar el vector unitario $\overline{u}$ para el que es máxima la derivada direccional $D_{\overline{u}}f(2,1)$ y dar el valor de esa derivada máxima.

7. Sea $F(x,y,z)=x^3-2yz+\mathrm{e}^xz^2$. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $F=0$ en el punto $(0,1,2)$. Encontrar un $\mathbf{u}$ unitario que sea perpendicular al vector $(1,0,1)$ y tal que $D_{\mathbf{u}}F(0,1,2)=0$.

8. Sea $F(x,y,z)=\frac{z-x}{y^2}$. Hallar el plano tangente a $F=1$ en el punto $(0,-1,1)$. Calcular $\Delta F=F_{xx}+F_{yy}+F_{zz}$.

9. Sean $f(x,y)=\big(x^3-y\big)^2$ y $\mathbf{c}(t)=(t,\ln t)$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1. Hallar la derivada de f en el punto $(1,0)$ en la dirección del vector unitario tangente la curva dada por $\mathbf{c}$.

10. Sea la curva dada por $\mathbf{c}(t)=\big(\mathrm{e}^t,t^2\big)$, $t\in[-2,2]$. Dibujarla y hallar: i) la recta tangente en el punto $(\mathrm{e},1)$ y un vector unitario normal a la curva en ese punto, ii) su punto de corte con la curva $\mathbf{r}(s)=(s,s-1)$, $s\in[0,5]$.

11. Sean $g(x,y)=\sqrt{20-x^2-y^2}$ y la curva $\mathbf{c}(t)=\big(t,t^2\big)$, $t\in[-2,2]$. a) Dibujar en el plano xy las curvas de nivel $g(x,y)=2\sqrt{5}\,,4\,,0$ y la curva C descrita por $\mathbf{c}(t)$. b) Hallar de dos formas la ecuación del plano tangente a la gráfica de g en $(-1,1)$. c) Hallar la derivada de $h(t)=g(\mathbf{c}(t))$ en $t=-1$ utilizando la regla de la cadena.

12. Sea $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ de C^2 y sea $h(t)=f(t,-t,t^2)$. Hallar, mediante la regla de la cadena, $h''(t)$ en función de las derivadas de f y comprobar la fórmula obtenida en el caso de que sea $f(x,y,z)=x+y+z^2$.

13. Sean $\mathbf{f}(u,v)=\big(\mathrm{e}^{u+2v},2u+v\big)$ y $\mathbf{g}(x,y,z)=\big(2x^2-y+3z^3,2y-x^2\big)$. Calcular la matriz de la diferencial de $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ en $(2,-1,1)$, i) utilizando la regla de la cadena, ii) componiendo y diferenciando.

14. Sea $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0\,,1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{2}{5}$, y $\nabla f(2,1)$. Hallar algún vector $\mathbf{u}$ unitario tal que la derivada $D_{\mathbf{u}}f(2,1)$ valga: i) 0, ii) $-\frac{3}{25}$. Hallar $\operatorname{div}(\nabla f)$ en cartesianas y polares.

15. Sea $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2+x^2+y^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=C$ con $C=\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}$, el corte con $x=0$ y su gráfica. **b]** En el punto $(1,-1)$ hallar la ecuación de su plano tangente y la derivada de f según el vector $\mathbf{u}=(2,2)$. ¿En la dirección de qué vector unitario $\mathbf{v}$ es máxima la derivada direccional en ese punto? **c]** Hallar Δf.

16. Sean $\mathbf{f}(x,y)=(x^2,1,y^2)$, $g(x,y,z)=z$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, ∇g, Δg, $\operatorname{rot}(\nabla g)$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})$, $\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g)$, $\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g)$, $\operatorname{rot}\big(\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g)\big)$, $\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g)\big)$. b) Probar que en general es: $\operatorname{rot}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{rot}\mathbf{f}+\nabla g\times\mathbf{f}$, $\operatorname{div}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{div}\mathbf{f}+\nabla g\cdot\mathbf{f}$, y comprobarlo con los campos anteriores.

17. Si $\mathbf{F}(x,y,z)=xy\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}$, hallar: $\operatorname{div}\mathbf{F}$, $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$, $\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})$.

1. Hallar las integrales dobles $\iint_D f\,dx\,dy$ de las f que se dan en los recintos $D\subset\mathbf{R}^2$ que se indican:

a) $f(x,y)=x^2+y^2,\ D=[0,1]\times[0,1]$ b) $f(x,y)=xy$, D región limitada por las curvas $y=x$, $y=x^2$
c) $f(x,y)=y\,e^{xy},\ D=[0,1]\times[0,1]$ d) $f(x,y)=y/x^2$, D triángulo de vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$
e) $f(x,y)=x$, D círculo unidad f) $f(x,y)=\operatorname{sen}x$, D triángulo acotado por $y=0$, $y=x$, $y=\pi-x$

2. Sea $f(x,y)=y^2-x$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y $f=-1$. Hallar el plano tangente en $(1,-1)$. Hallar el $\mathbf{u}$ unitario para el que la derivada $D_{\mathbf{u}}f(1,-1)$ es mínima y el valor de esa derivada. Calcular Δf en cartesianas y también utilizando polares. **b]** Hallar $\iint_D f\,dx\,dy$, con D triángulo de vértices $(0,0)$, $(-2,2)$ y $(1,2)$.

3. Sea $f(x,y)=\frac{y}{x+1}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0,1,-1$, hallar $\nabla f(0,1)$, $\Delta f(x,y)$ y la derivada de f en $(0,1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$. **b]** Calcular $\iint_D f$, con D acotada por $x=0$, $y=1$ y $x=y^2$.

4. Sea $g(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$. a) Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(0,-2)$. Hallar Δg (mejor polares). b) Calcular la integral doble $\iint_D g$, siendo D la parte del círculo $x^2+y^2\le 4$ y con $x\le 0$, $y\ge 0$.

5. Sea $f(x,y)=\frac{2y^2}{x^2+y^2}$. a) Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y $f=1$. Dar un $\mathbf{u}$ unitario para el que $D_{\mathbf{u}}f(1,1)=0$. Calcular $\Delta f(1,1)$. b) Hallar $\iint_D f$ en polares, siendo D parte del círculo $x^2+y^2\le 2$ con $y\ge 1$.

6. Calcular, trabajando en cartesianas y polares, $\iint_D x\,dx\,dy$, con D región dada por $x^2+y^2\le 2$, $x\ge 1$, $y\ge 0$.

7. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie:
a) $z=x^2+y$ sobre el rectángulo $[0,1]\times[1,2]$.
b) $z=x^2$ sobre el semicírculo $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$.

8. Sea R una lámina que ocupa la región $r\le\cos\theta$. Si $\rho(r,\theta)=\cos\theta$ es su densidad, hallar su centro de masas.

9. Calcular $\iiint_V f$, siendo: a) $f(x,y,z)=e^y$ y V el sólido limitado por $x=0$, $x=2$, $y=1$, $z=0$, $y+z=0$. b) $f(x,y,z)=xy^2z^3$ y V el sólido limitado en $x,y,z\ge 0$ por la superficie $z=xy$ y los planos $y=x$ y $x=1$.

10. Dibujar la gráfica de $g(x,y)=2\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ y calcular el volumen del recinto que encierra con el plano $z=1$.

11. Sea $F(x,y,z)=y+2xz$. a) Hallar un $\mathbf{u}$ unitario para el que $D_{\mathbf{u}}F(1,2,-1)=0$ y que además sea perpendicular al vector $(1,-1,0)$. b) Calcular $\iiint_V F$, si V es el medio cilindro descrito por $x^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$, $0\le z\le 3$.

12. Calcular $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, siendo V el sólido limitado por las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2+y^2+z^2=4$, trabajando en coordenadas cilíndricas y esféricas.

13. a) Probar que la longitud de una curva dada en polares por $r=f(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$ es $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}\,d\theta$. b) Si R es la región del primer cuadrante acotada por los ejes y la circunferencia $r=2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)$, calcular mediante integrales: i) el área de R, ii) la longitud del perímetro de R.

14. Hallar $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ para la f y las curvas que se indican:
a) $f(x,y,z)=yz$, $\mathbf{c}(t)=(t,3t,2t)$, $t\in[1,3]$.
b) $f(x,y,z)=x+z$, $\mathbf{c}(t)=\left(t,t^2,\frac{2}{3}t^3\right)$, $t\in[0,1]$.

15. Sea $f(x,y)=\cos(y-2x)$. **a]** Hallar $\nabla f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y dibujarlo junto con la curva de nivel que pasa por $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Escribir la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. **b]** Si D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,-\pi)$ y $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, calcular $\iint_D f\,dx\,dy$. **c]** Calcular $\int_C f\,ds$ siendo C el segmento que une $(0,0)$ y $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

16. Si $F(x,y,z)=\frac{y+2z}{x}$, hallar: a) ∇F, ΔF, el $\mathbf{u}$ unitario que hace máxima $D_{\mathbf{u}}F(1,0,1)$ y la ecuación del plano tangente a la superficie $F=2$ en el punto $(1,0,1)$. b) $\iiint_V F$, V sólido acotado por $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $y+2z=0$. c) La integral de línea de F sobre el segmento que une los puntos $(1,0,0)$ y $(1,2,2)$.

17. Sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(xy,x,-yz)$. Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. Calcular la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo del camino $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t,1)$, $t\in[0,\pi]$ y la longitud de la curva descrita por $\mathbf{c}(t)$.

18. Hallar la integral de $\mathbf{f}(x,y)=(xy,0)$ entre $(-1,0)$ y $(1,0)$ a lo largo de: a) el eje x, b) la parábola $y=1-x^2$, c) la línea quebrada $y=|x|-1$, d) la parte inferior de la circunferencia $x^2+y^2=1$. ¿Es $\mathbf{f}$ conservativo?

19. Sea $\mathbf{f}(x,y)=(y,x)$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$. Probar que $\mathbf{f}$ deriva de un potencial y calcularlo. **b]** Hallar el valor de la integral de línea de $\mathbf{f}$ desde $(-1,1)$ hasta $(2,4)$ a lo largo del segmento que une los puntos: i) directamente, encontrando una parametrización, ii) utilizando el potencial hallado en **a]**.

20. Sea $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=\left(y+3x^2,x\right)$. **a]** Calcular $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}$. ¿Deriva $\bar{\mathrm{f}}$ de un potencial? **b]** Determinar el valor de la integral de línea de $\bar{\mathrm{f}}$ desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$ a lo largo de la semicircunferencia $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$. **c]** Si D es el semicírculo dado por $x^2+y^2\leq 1$, $y\geq 0$, hallar el valor de la integral doble $\iint_D \operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}$.

21. Sea $f(x,y)=x^2y$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1. Hallar $\nabla f(-1,1)$ y un $\mathbf{u}$ unitario tal que $D_{\mathbf{u}}f(-1,1)=1$. **b]** Si D es la parte del círculo $x^2+y^2\leq 1$ con $x,y\geq 0$, calcular $\iint_D f$ en cartesianas y polares. **c]** Hallar la integral de línea de $\mathbf{g}(x,y)=(2xy,x^2)$ entre $(-1,0)$ y $(1,1)$ siguiendo el segmento que los une.

22. Sea $g(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^{2x-z}$. **a]** Hallar $\nabla g(1,-1,2)$ y escribir un vector unitario $\mathbf{u}$ para el que sea $D_{\mathbf{u}}g(1,-1,2)=0$. **b]** Calcular $\iiint_V g$, con V sólido limitado por los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$ y $z=2-x$. **c]** Hallar el valor de la integral de línea de i) g, ii) ∇g desde $(0,0,0)$ hasta $(1,2,2)$ sobre el segmento que une los puntos.

23. Sea $\mathbf{g}(x,y,z)=\left(3x^2-y^2,-2xy,-xz\right)$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{g}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{g}$. b) Dibujar el sólido V acotado por $x=0$, $x=1$, $z=0$, $z=1-y^2$, y calcular $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{g}$. c) Calcular la integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \bar{g}\cdot d\bar{s}$, para $\mathbf{c}(t)=\left(1,t,1-t^2\right)$, $t\in[0,1]$.

24. Sea el campo vectorial $\bar{g}(x,y,z)=\left(z,y^2,x\right)$. **a]** Calcular $\operatorname{div}\bar{g}$, $\nabla(\operatorname{div}\bar{g})$ y $\operatorname{rot}\bar{g}$. **b]** Determinar el valor de la integral de línea $\int_{\bar{c}} \bar{g}\cdot d\bar{s}$, siendo $\bar{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,-\operatorname{sen} t)$, con $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

25. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=\left(z^2,2y,cxz\right)$, c constante. Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, precisar para qué valor de c deriva $\mathbf{f}$ de un potencial U y calcularlo. Para este c, ¿cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}$ entre $(0,0,0)$ y $(1,0,1)$ a lo largo del segmento que une los puntos?

26. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=2xz\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+x^2\,\mathbf{k}$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})$ y $\Delta(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})$. **b]** Hallar $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz$, siendo V el sólido limitado por los planos $y=0$, $y=3$, $x=0$, $z=0$, $x+z=2$. **c]** Hallar la integral de línea de $\mathbf{f}$ desde $(2,3,0)$ hasta $(1,3,1)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

27. Comprobar el teorema de Green $\displaystyle\iint_D [g_x-f_y]\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ para:

a) $\mathbf{f}(x,y)=\left(y^2,2x\right)$ y D la región del plano encerrada entre la parábola $x=4-y^2$ y la recta $y=x-2$.

b) $\mathbf{f}(x,y)=\left(0,xy^2\right)$ y D círculo $x^2+y^2\leq 4$.

c) $\mathbf{f}(x,y)=\left(y^2,xy\right)$ y D semicírculo girado dado por $x^2+y^2\leq 2$ e $y\geq x$.

28. Sea D la región del plano limitada por las gráficas de $y=\mathrm{e}^{-x}$, $y=\mathrm{e}^{x-2}$ y el eje y. a) Hallar $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{e}^x\,dxdy$.

b) ¿Cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=(xy\,\mathrm{e}^x,1)$ a lo largo de ∂D, en el sentido de las agujas del reloj?

29. Sea D el semicírculo dado por $x^2+y^2\leq 9$, $x\geq 0$. **a]** Calcular $\iint_D x\,dx\,dy$ usando i) polares, ii) cartesianas. **b]** Si $\mathbf{f}(x,y)=(-xy,y)$: i) ¿Es $\mathbf{f}$ conservativo? ii) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$. iii) Hallar el valor de $\displaystyle\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$.

30. Sea $f(x,y)=y-2xy$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0$ y 1, y $\nabla f(0,1)$. Hallar un vector unitario $\mathbf{u}$ tal que la derivada de f en el punto $(0,1)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ sea 0. Hallar $\operatorname{div}\left(\nabla f\right)$.

b] Calcular la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,2)$.

c] Sea el campo vectorial $\mathbf{g}(x,y)=(xy^2,xy)$. ¿Deriva de un potencial? Hallar el valor de la integral de línea de $\mathbf{g}$ entre $(2,0)$ y $(0,2)$ a lo largo del segmento que une estos puntos.

1. Hallar la solución general de estas EDOs de primer orden:

a) $y'=-\frac{2y}{x}$ b) $y'=-\frac{y}{x^2}$ c) $y'=y+5$ d) $y'=x+\frac{x}{y}$ e) $y'=x+\frac{y}{x}$

2. Hallar la solución general $T(t)$ y la que cumple el dato inicial $T(0)=0$ de las ecuaciones lineales:

a) $T'=4-4T$ b) $T'+9T=t$ c) $T'+(1+2t)T=0$ d) $T'=T+2\operatorname{sen} t$

3. Hallar la solución general y la que cumple el dato inicial $y(1)=1$:

a) $\frac{dy}{dx}=2xy^2$ b) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3x}+2$ c) $\frac{dy}{dx}=\mathrm{e}^{x-y}$

4. Resolver $\frac{dy}{dx}=-\frac{12x+5y}{5x+2y}$: i) como exacta, tras comprobar que lo es, ii) haciendo $z=\frac{y}{x}$.

5. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden:

a) $y''+2y'+5y=0$ b) $x^2y''-3xy'+3y=0$ c) $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0$

6. Hallar la solución general de $y''+2y'-3y=f(x)$ para a) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$, b) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$, c) $f(x)=\operatorname{sen} x$.

7. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes:

a) $y''-3y=\mathrm{e}^{2x}$ b) $y''+y=x\cos x$ c) $y''+y=6\cos^2 x$ d) $y''+4y'+5y=x$ e) $y''-2y'+y=x^2$

8. Hallar su solución general y la que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=0$:

a) $y''+2y'+2y=2$ b) $y''+2y'+y=x+2$ c) $y''+y=x^2$ d) $y''+y=2x\mathrm{e}^x$ e) $y''+y=\frac{2}{\cos^3 x}$

9. Hallar la solución general de estas ecuaciones de Euler no homogéneas:

a) $xy''+2y'=x$ b) $x^2y''-2y=2$ c) $x^2y''+4xy'+2y=\mathrm{e}^x$

10. Sea (e) $x^2y''-3xy'=4$. Hallar la solución general de (e) viéndola como ecuación de Euler y haciendo $y'=v$. Hallar la solución particular de (e) que satisface $y(1)=y'(1)=3$.

11. **a]** Resolver $\frac{dy}{dx}=-\frac{y-2}{x}$ tratándola como: i) lineal, ii) separable, iii) exacta.
b] Hallar la solución general de $x^2y''+xy'=2x$: i) haciendo $y'=v$, ii) mirándola como ecuación de Euler.

12. Hallar la solución general de $(x+1)y''-y'=(x+1)^2$: i) haciendo $y'=v$, ii) haciendo $x+1=s$.

13. a) Hallar la solución general de $y''+y'=2x-1$, i) como lineal de segundo orden, ii) haciendo $y'=v$.
b) Calcular la única solución que satiface los datos iniciales $y(0)=y'(0)=0$.
c) Precisar cuántas soluciones de la ecuación cumplen los datos de contorno $y'(0)=y'(1)=0$.

14. Precisar si i) $\lambda=-2$ ii) $\lambda=\frac{1}{4}$ son o no autovalores de $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y'(-2)=y(0)=0 \end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea.

15. a) Hallar la solución de $y''+\frac{1}{4}y=\mathrm{e}^{x/2}$ que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=2$.
b) Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=\frac{1}{4}$ son o no autovalores de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-\pi)=y(\pi)=0 \end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea.

16. a) Hallar la solución de $y''+y'=2\,\mathrm{e}^x$ que cumple los datos iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=2$.
b) Precisar si $\lambda=0$ y $\lambda=-2$ son o no autovalores de $\begin{cases} y''+y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea.

17. **a]** Hallar la solución de $y''+2y'+y=4\mathrm{e}^x$ que cumple los datos iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=2$.
b] Sea $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(1)=0 \end{cases}$. Precisar si $\lambda=1$ y $\lambda=2$ son autovalores dando la autofunción cuando lo sea.

18. Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0)-2y'(0)=y(1)-2y'(1)=0 \end{cases}$. Hallar sus λ_n y autofunciones $\{y_n\}$, y calcular $\langle y_n,y_n\rangle\ \forall n$. [Son calculables exactamente todos los λ_n, y hay uno negativo].

19. Sea $\begin{cases} x^2y''+3xy'+y+\lambda y=0 \\ y(1)=y(\mathrm{e})=0 \end{cases}$. **a]** Escribirla en forma autoadjunta y hallar el peso. **b]** Precisar si $\lambda=0$ es o no autovalor. **c]** Probar que $\lambda=\pi^2$ lo es, dar su $\{y_1\}$ y calcular $\langle y_1\, ,\, y_1\rangle$.

20. Sea $\begin{cases} y''+y'+\lambda y = 0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Precisar si $\lambda=-2$ y $\lambda=0$ son o no autovalores. ¿Cuántas soluciones de $y''+y'-2y=4x$ cumplen esos datos?

21. **a]** Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=-2$ son o no autovalores de $\begin{cases} x^2y'' + \lambda y = 0 \\ y'(1)=y'(2)=0 \end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea.
b] Precisar si hay o no una única solución de $x^2y''-2y=2$ cumpliendo esos datos de contorno.

22. Hallar, si existe, un valor de a para el que $\begin{cases} xy''-y'=x^2-a \\ y'(2)=y'(4)=0 \end{cases}$ tenga infinitas soluciones.

23. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y = \operatorname{sen} x \\ y(0)=y'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$. Precisar, si lo hay, algún λ para el que: i) tenga solución única, ii) tenga infinitas soluciones, iii) no tenga solución.

24. Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0)=y'(\frac{1}{2})=0 \end{cases}$. **a]** Hallar sin mirar apuntes sus autovalores λ_n, autofunciones $\{y_n\}$ e $\langle y_n, y_n\rangle$. **b]** Calcular el desarrollo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\, y_n(x)$ de $f(x)=x$ en serie de autofunciones.

25. Hallar los desarrollos de a) $f(x)=1$ y b) $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$, en serie de i) $\{\operatorname{sen} n\pi x\}$, ii) $\{\cos n\pi x\}$. Dibujar con algún programa de ordenador algunas sumas parciales de las series obtenidas.

26. Sea $f(x)=\begin{cases} 1,\ 0\le x\le 1 \\ 0,\ 1<x\le 2 \end{cases}$. Hallar su desarrollo en serie de Fourier $f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2}$.
¿Cuánto debe sumar la serie para i) $x=1$, ii) $x=2$? Comprobarlo sustituyendo en la serie.

27. Desarrollar en senos y cosenos en $[-\pi,\pi]$, dibujando las funciones hacia las que tienden las series:
a) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ b) $f(x)=\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

28. Sea (P) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0)=y(1)-y'(1)=0 \end{cases}$. a) Probar que $\lambda_0=0$ es autovalor y hallar la $\{y_0\}$ asociada. Justificar gráficamente que hay infinitos $\lambda_n>0$ y que no hay $\lambda_n<0$.
b) Hallar el coeficiente que acompaña a y_0 en el desarrollo de $f(x)=1$ en serie de autofunciones de (P).

29. Desarrollar $f(x)=1$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 \\ y(0)+y'(0)=y(\frac{1}{2})=0 \end{cases}$.

30. Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = \cos 3x \\ y'(0)=y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$. Calcular el primer término del desarrollo de $f(x)=\cos 3x$ en serie de autofunciones del problema homogéneo.
Precisar para i) $\lambda=0$, ii) $\lambda=1$ cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.

1. Hallar la solución general $\big[\, y(x)$ y $u(x,y)$ respectivamente$\big]$ de: i) $x^2y''=2y$, ii) $x^2u_x=2u$.

2. Para las siguientes EDPs de primer orden, hallar sus características y, con la regla de la cadena, escribirla en las variables (ξ,η) , calcular su solución general y la única que satisface el dato que se indica:

a) $\begin{array}{l} yu_y-xu_x=xy^2 \\ u(x,2)=0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} u_y-u_x=2(x+y)u \\ u(x,x)=1 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} u_y+u_x=u+x \\ u(x,0)=-x \end{array}$ d) $\begin{array}{l} 2xyu_y-u_x=2xy \\ u(1,y)=0 \end{array}$

3. Sea [E] $2yu_y+xu_x=4x^2y$. a) Hallar sus características y, con la regla de la cadena, dar la ecuación para u_η . Calcular su solución general. b) Encontrar la única solución de [E] que satisface el dato inicial $u(-2,y)=3y$. c) Precisar cuántas soluciones cumplen los datos: i) $u\big(x,x^2\big)=0$, ii) $u\big(x,x^2\big)=x^4$.

4. Sea $(2x-y)u_y+xu_x=yu$. **a]** Resolver $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x}$ (lineal, exacta o haciendo $z=\frac{y}{x}$). **b]** Hallar su solución general y la única que satisface $u(1,y)=1$. **c]** Escribir 2 soluciones distintas que cumplan el dato $u(x,x)=\mathrm{e}^x$.

5. Hallar la solución de los siguientes problemas:

a) $\begin{array}{l} (2y-x)u_y+xu_x=2y \\ u(1,y)=0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 2u_y+u_x=-u+\mathrm{e}^{y-2x} \\ u(0,y)=0 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} 2yu_y-xu_x=2u \\ u(-1,y)=y^3 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} u_y+3y^2u_x=\frac{2u}{y}+6y^4x \\ u(x,1)=x^2 \end{array}$

6. Reducir a forma canónica, si es necesario, y, si es posible, encontrar la solución general:

a) $u_{xx}+4u_{xy}-5u_{yy}+6u_x+3u_y=9u$ b) $u_{yy}+2u_{xy}+2u_{xx}=0$ c) $u_{xx}-3u_x+2u=y$

7. **a]** Hallar la solución general $y(x)$ de la EDO $y''+y=3$. **b]** Escribir la EDP $u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u=x+y$ en forma canónica y calcular su solución general.

8. Escribir en forma canónica y dar la solución general de la ecuación de ondas $u_{tt}-4u_{xx}=4$, $x,t\in\mathbf{R}$. Hallar, a partir de ella y usando algún otro camino, la solución que cumple $u(x,0)=u_t(x,0)=0$.

9. Resolver: a) $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}+2u_t+4u_x=0 \\ u(x,0)=x\,,\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt}+2u_{xt}=2 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_{yy}+2u_{xy}+u_{xx}-u=y \\ u(x,0)=1\,,\ u_y(x,0)=0 \end{cases}$

[Escribir las ecuaciones en forma canónica, hallar su solución general e imponer los datos].

10. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=1 \end{cases}$. [La v del cambio salta a la vista].

11. **a]** Escribir $f(x)=1$ en serie de autofunciones de $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$. ¿Cuánto suma la serie si $x=\frac{\pi}{2}$?

b] Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-4(1+2t)\,u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

12. Sea $\begin{cases} u_t-8tu_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$, con **a]** $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, **b]** $f(x)=\frac{\pi}{4}$.

Hallar la solución en el caso **a]** y los 2 primeros términos no nulos de la serie solución en el caso **b]**.

13. **a]** Hallar la solución de $T'=-4tT+\mathrm{e}^{-2t^2}$ que cumple $T(0)=0$.

b] Resolver por separción de variables el problema no homogéneo $\begin{cases} u_t-tu_{xx}=\mathrm{e}^{-2t^2}\operatorname{sen}2x\,,\ x\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=u\big(\frac{\pi}{2},t\big)=0 \end{cases}$.

14. **a]** Escribir el desarrollo de la función $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$.

b] Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=\operatorname{sen}x\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\frac{\pi}{2}-x\,,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial y calcular las infinitas $T_n(t)$ no nulas].

15. Resolver: a) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=4\operatorname{sen}2x\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=2\operatorname{sen}x\,,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=\mathrm{e}^{-2t},\ x\in(0,\pi),\ t>1 \\ u(x,0)=\cos x\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$.

16. Escribir la forma canónica de las ecuaciones y resolver los problemas utilizando diferentes caminos:

a) $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=\mathrm{e}^{-t}\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2x\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$

17. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}3x \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. **a]** Resolverlo por separación de variables. **b]** Resolverlo utilizando, razonadamente, la fórmula de D'Alembert.

18. **a]** Hallar la solución de la ecuación $y''+y=2$ que satisface el dato inicial $y(0)=y'(0)=0$.

b] Hallar la solución del problema no homogéneo $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$.

19. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\begin{cases} 2x-x^2\,,\ x\in[0,2] \\ 0\,,\ x\in[2,\infty) \end{cases},\ u(0,t)=0 \end{cases}$. Hallar: i) $u(5,2)$, ii) $u(3,2)$, iii) $u(1,2)$.

20. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi] \\ 0\,,\ x\in[\pi,2\pi] \end{cases},\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2\pi,t)=0 \end{cases}$. Dibujar $u(x,\pi)$ y hallar su expresión con D'Alembert. Resolver por separación de variables y comprobar.

21. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Separar variables $u=XT$, hallar las X_n y las T_n, usando todos los datos $=0$, y calcular los coeficientes de una serie imponiendo el dato inicial no nulo].

22. Resolver $\begin{cases} u_{tt}+4u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}2x\,,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$.

23. Resolver por separación de variables estos problemas planos en cartesianas:

a) $\begin{cases} \Delta u=0 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u(\pi,y)=5+\cos y \\ u(0,y)=u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u=y\cos x \text{ en } (0,\pi)\times(0,1) \\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \\ u_y(x,0)=u_y(x,1)=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta u+6u_x=0 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u_y(x,0)=0\,,\ u_y(x,\pi)=0 \\ u_x(0,y)=0\,,\ u(\pi,y)=2\cos^2 2y \end{cases}$

24. Resolver por separación de variables estos problemas planos y comprobar el resultado:

a) $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(2,\theta)=\operatorname{sen}3\theta\,,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=\cos 2\theta\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$.

25. Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$. Resolverlo por separación de variables y escribir los dos primeros términos no nulos de la serie solución.

26. Hallar los dos primeros términos no nulos de la serie solución de $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(2,\theta)=\pi,\ u(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$.

27. Resolver por separación de variables estos problemas planos:

a) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=0,\ u(2,\theta)=1+\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u=\cos\theta\,,\ r<2 \\ u(2,\theta)=\operatorname{sen}2\theta \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<4\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(4,\theta)=2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$

28. Resover el problema plano $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<2\,,\ \theta\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big) \\ u_r(2,\theta)+ku(2,\theta)=8\cos 2\theta \\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0 \end{cases}$, para: i) $k=1$, ii) $k=0$.

29. Resolver: **a]** $r^2R''+rR'-\frac{1}{4}R=7r^3$ y **b]** $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=7r\cos\frac{\theta}{2}\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=u_\theta(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$.

30. Resolver: **a]** $r^2R''+rR'-R=5$ y **b]** $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\frac{5}{r^2}\operatorname{sen}\theta\,,\ 1<r<2\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=u(2,\theta)=u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$.