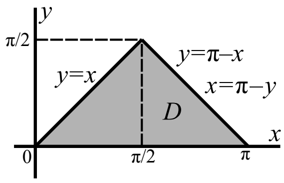
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (30 de enero de 2013)

1. Hallar $\iint_D \operatorname{sen} x\, dx\, dy$, siendo D el triángulo limitado por las rectas $y=0$, $y=x$ e $y=\pi-x$.



Mejor: $\iint_D \operatorname{sen} x\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2}\int_y^{\pi-y} \operatorname{sen} x\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} [\cos y - \underbrace{\cos(\pi-y)}_{=-\cos y}]\, dy = \big[2\operatorname{sen} y\big]_0^{\pi/2} = \boxed{2}$

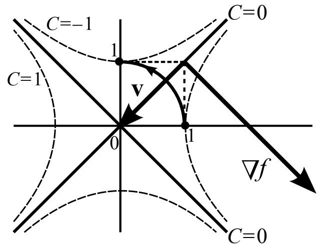
Peor: $\iint_D = \int_0^{\pi/2}\int_0^{x} \operatorname{sen} x\, dy\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi-x} \operatorname{sen} x\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-x)\operatorname{sen} x\, dx$

$= -x\cos x\big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx - (\pi-x)\cos x\big]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\, dx = 0+1+0+1 = \boxed{2}$

2. a] Sea $f(x,y)=x^2-y^2$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y el vector $\nabla f(1,1)$. Hallar la derivada de f en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v}=(-1,-1)$. Hallar $\Delta f(x,y)$.

b] Hallar el valor de la integral de línea del campo $\mathbf{g}(x,y)=(2x,-2y)$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$ a lo largo del tramo de circunferencia dado por $x^2+y^2=1$, $x,y\geq 0$.

a] $x^2-y^2=0 \to$ las rectas $y=\pm x$. [Las demás curvas de nivel son hipérbolas].



$\nabla f(x,y)=(2x,-2y)$, $\nabla f(1,1)=(2,-2)$. $D_{\mathbf{u}} f(1,1) = (2,-2)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \boxed{0}$

[Debía anularse por ser f constante sobre $y=x$, o bien, porque $\mathbf{v}$ es perpendicular al gradiente; al tratarse de 'derivada direccional' hemos puesto el vector unitario $\mathbf{u}$, aunque siendo nula...].

$\Delta f(x,y) = f_{xx}+f_{yy} = 2-2 = \boxed{0}$.

b] Como $\mathbf{g}=\nabla f$ (f es función potencial para $\mathbf{g}$), será $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s} = f(0,1)-f(1,0) = \boxed{-2}$.

$\Big[$Directamente: $\mathbf{c}(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}] \to \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2}(2\cos t,-2\operatorname{sen} t)\cdot(-\operatorname{sen} t,\cos t)\,dt = -2\operatorname{sen}^2 t\Big]_0^{\pi/2} = -2$

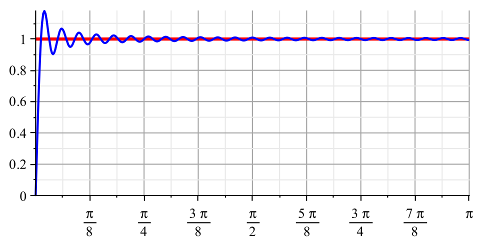
O bien: $\mathbf{c}(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$, $t\in[1,0] \to \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s} = \int_1^0 (2t,-2\sqrt{-})\cdot(1,\frac{-t}{\sqrt{-}})\,dt = \int_1^0 4t\,dt = -2\Big]$.

3. a] Escribir $f(x)=1$ en serie de autofunciones de $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$ [utilizando formulario]. ¿Cuánto suma la serie si $x=\frac{\pi}{2}$?

b] Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t-4(1+2t)u_{xx}=0,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=1,\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$ [separar $u=XT$, hallar X_n y T_n, probar serie e imponer dato inicial].

a] Según el formulario: $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$, $X_n=\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\}$ y $\langle X_n,X_n\rangle=\frac{L}{2}=\frac{\pi}{2}$. Como $r=1$, es:

$c_n=\frac{\langle 1,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\,dx = -\frac{4}{\pi(2n-1)}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi(2n-1)}$. Por tanto: $\boxed{1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}}$.



Como la función que desarrollamos es continua en $x=\frac{\pi}{2}\in(0,\pi)$, la suma de la serie infinita será el valor de f en el punto: $1=f(\frac{\pi}{2})$.

[Con ordenador, sumando 50 términos de la serie para $x=\frac{\pi}{2}$ se obtiene 1.0090..., sumando 1000 sale 0.9995..., ...].

[También se puede con un ordenador dibujar diferentes sumas parciales (a la izquierda S_{50}) y ver cómo se acercan en todo $(0,\pi]$ a la $f(x)=1$].

b] $u=XT \to XT'=(4+8t)X''T$, $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{(4+8t)T}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$, $X_n=\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\}$;

Y además: $T'+4\lambda_n(1+2t)T=0$, $T_n=\{e^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\}$. Probamos entonces: $u=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}$.

Imponiendo el dato inicial $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2} = 1$, obtenemos que los c_n son los calculados en **a]**.

Por tanto, la solución del problema es: $\boxed{u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}}$.

4. Sea $u_y+u_x=u+x$. Hallar su solución general y la que satisface el dato inicial $u(x,0)=-x$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1}\ \rightarrow$ características: $\boxed{y-x=C}$. Más corto: $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=-u_\xi+u_\eta\end{cases}\rightarrow\ u_\eta=u+x=u+\eta$.

$u(\xi,\eta)=p(\xi)\,e^{\eta}+e^{\eta}\int e^{-\eta}\eta\,d\eta=p(\xi)\,e^{\eta}-\eta-1$ [o probando $u_p=A\eta+B$]. $\boxed{u(x,y)=p(y-x)\,e^{x}-x-1}$.

[Algo más largo: $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=y\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=-u_\xi\end{cases}\rightarrow\ u_\eta=u+x=u+\eta-\xi$. $u=p(\xi)\,e^{\eta}+e^{\eta}\int e^{-\eta}(\eta-\xi)\,d\eta=p(\xi)\,e^{\eta}+\xi-\eta-1$].

Imponiendo el dato inicial: $u(x,0)=p(-x)\,e^{x}-x-1=-x\ \rightarrow\ p(-x)=e^{-x}$, $p(v)=e^{v}$, $\boxed{u(x,y)=e^{y}-x-1}$.

[Comprobamos: $u(x,0)=-x$, y además: $u_y+u_x=e^{y}-1=e^{y}-x-1+x=u+x$].

5. a] Hallar la solución de la ecuación $y''+y=2$ que satisface el dato inicial $y(0)=y'(0)=0$.

b] Hallar la solución del problema no homogéneo $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=2\,\text{sen}\,x,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$.

a] De coeficientes constantes. $\mu^2+1=0$, $\mu=\pm i\ \rightarrow\ y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x+y_p$. Como $\mu=0$ no es autovalor:

$y_p=A\ \rightarrow\ A=2$, $y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x+2$ (o y_p simplemente a ojo; no conviene usar aquí la f. v. constantes).

Imponiendo los datos: $\begin{cases}c_1+2=0\\ c_2=0\end{cases}$, se obtiene la solución única del problema: $\boxed{y=2-2\cos x}$.

b] Al ser un problema no homogéneo, debemos probar una serie con la autofunciones X_n del homogéneo.

Sabemos (formulario) que al separar variables aparece $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}\rightarrow\ X_n=\{\text{sen}\,nx\}$, $n=1,2,\ldots$

Llevamos, pues, a la ecuación $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\text{sen}\,nx$, obteniendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[T_n''+n^2T_n]\,\text{sen}\,nx=2\,\text{sen}\,x$.

Los datos iniciales: $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\text{sen}\,nx=0$, $u_t(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\,\text{sen}\,nx=0\ \Rightarrow\ T_n(0)=T_n'(0)=0\ \forall n$.

Todas las ecuaciones son homogéneas con datos nulos (y su solución es $T_n\equiv 0$) excepto $\begin{cases}T_1''+T_1=2\\ T_1(0)=T_1'(0)=0\end{cases}$,

que es lo resuelto (con otros nombres) en **a]**. La solución es, entonces: $\boxed{u(x,t)=2(1-\cos t)\,\text{sen}\,x}$.

[Se podría usar D'Alembert. Como $2\,\text{sen}\,x$ es impar y 2π-periódica, su extensión es ella misma, y entonces:

$u=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}2\,\text{sen}\,s\,ds\,d\tau=\int_0^t[\cos(x-t+\tau)-\cos(x+t-\tau)]\,d\tau=[\,\text{sen}(x-t+\tau)+\text{sen}(x+t-\tau)]_0^t=2\,\text{sen}\,x-2\,\text{sen}\,x\cos t$].

[Para $x=t=\frac{\pi}{2}$, la integral anterior $(=2)$ fue la calculada en el problema **1**].

6. a] Calcular los autovalores λ_n y las autofunciones $\{\Theta_n\}$ de $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$ [deben coincidir con el formulario].

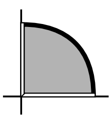
b] Resolver mediante separación de variables $\begin{cases}\Delta u=0,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ u(1,\theta)=\cos 2\theta,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$

a] $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0\ \Rightarrow$ sólo hay $\lambda\geq 0$. $\lambda=0$: $\Theta=c_1+c_2\theta\ \rightarrow\ \left.\begin{array}{l}\Theta'(0)=c_2=0\\ \Theta'(\frac{\pi}{2})=c_2=0\end{array}\right\}\rightarrow\ \lambda=0$ autovalor, $\Theta_0=\{1\}$.

$\lambda>0$: $\Theta=c_1\cos w\theta+c_2\,\text{sen}\,w\theta$, $\Theta'=-wc_1\,\text{sen}\,w\theta+wc_2\cos w\theta$. $\Theta'(0)=0\rightarrow c_2=0\rightarrow\Theta'(\frac{\pi}{2})=-wc_1\,\text{sen}\,\frac{w\pi}{2}=0$

$\rightarrow\ w_n=2n$, $\boxed{\lambda_n=4n^2\ ,\ \Theta_n=\{\cos 2n\theta\}\ ,\ n=0,1,2,\ldots}$ (como en formulario).

b] $u=R\Theta\ \rightarrow\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$, y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0$, $\mu=\pm 2n$, R acotado $\rightarrow\ R_n=\{r^{2n}\}$.



Imponiendo a $u=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}\,r^{2n}\cos 2n\theta$ el dato que falta: $u(1,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos 2n\theta=\cos 2\theta\ \rightarrow$

todos los $a_{2n}=0$, menos $a_2=1$. La solución (única) es $\boxed{u=r^2\cos 2\theta}$ $[\,=r^2\cos^2\theta-r^2\,\text{sen}^2\theta=x^2-y^2\,]$.