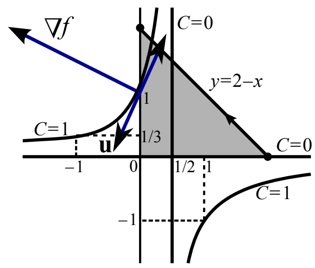
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (10 de septiembre de 2013)

1. Sea $f(x,y)=y-2xy$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0$ y 1, y $\nabla f(0,1)$. Hallar un vector unitario $\mathbf{u}$ tal que la derivada de f en el punto $(0,1)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ sea 0. Hallar $\Delta f(x,y)$.
b] Calcular la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,2)$. [3 puntos]



a] $y(1-2x)=0 \to$ rectas $y=0$, $x=\frac{1}{2}$. $y(1-2x)=0 \to y=\frac{1}{1-2x}$ $\quad y=0,\ x=\frac{1}{2}$ asíntotas. $y(-1)=\frac{1}{3}$, $y(1)=-1$.

$\nabla f(x,y)=(-2y,1-2x)$, $\boxed{\nabla f(0,1)=(-2,1)}$ (perpendicular a la última curva de nivel).

La derivada direccional será nula en la dirección de un vector perpendicular al gradiente. Por tanto, o bien $\boxed{\mathbf{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$ o bien $\boxed{\mathbf{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$.

$\Delta f(x,y)=f_{xx}+f_{yy}=0+0=\boxed{0}$.

b] $\iint_D f=\int_0^2\int_0^{2-x} y(1-2x)\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2(2-x)^2(1-2x)\,dx=\int_0^2\left(2-6x+\frac{9}{2}x^2-x^3\right)dx=4+\left[-3x^2+\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=\boxed{0}$.

Algo más corto: $\int_0^2\int_0^{2-y} y(1-2x)\,dx\,dy=\int_0^2 y[(2-y)-(2-y)^2]\,dy=\int_0^2[-2y+3y^2-y^3]\,dy=\left[-y^2+y^3-\frac{1}{4}y^4\right]_0^2=\boxed{0}$.

[La integral puede ser perfectamente cero: eso significa que el volumen encerrado por la parte positiva de la gráfica de f sobre el triángulo se cancela con el volumen encerrado por la parte negativa. Desde luego, este 'volumen con signo' no se puede calcular hallando la integral sobre el cuadrado y dividiendo por 2].

2. **a]** Hallar la solución $T(t)$ de la ecuación lineal $T'+T=e^{-2t}$ que satisface el dato inicial $T(0)=0$.
b] Calcular los autovalores λ_n y las autofunciones $\{X_n\}$ de $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X'(0)=X'(\pi)=0\end{cases}$ [deben coincidir con el formulario].
c] Resolver $\begin{cases}u_t-u_{xx}+u=e^{-2t},\ x\in(0,\pi),\ t>1\\u(x,0)=\cos x,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0\end{cases}$. [Separar variables en la ecuación homogénea, probar una serie con sus autofunciones y hallar los $T_n(t)$ no nulos]. [4 puntos]

a] Según la fórmula de variación de las constantes para las lineales de primer orden del formulario:

$$T=Ce^{-t}+e^{-t}\int e^te^{-2t}dt=Ce^{-t}-e^{-2t}\xrightarrow{T(0)=0}C=1,\ \boxed{T(t)=e^{-t}-e^{-2t}}.$$

[La T_p se podía haber hallado tanteando, por tratarse de una ecuación con coeficientes constantes:

$T_p=Ae^{-2t}\to -2Ae^{-2t}+Ae^{-2t}=e^{-2t}\to A=-1\to T_p=-e^{-2t}$].

b] $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0\Rightarrow$ sólo hay $\lambda\geq 0$. $\lambda=0$: $X=c_1+c_2x\to \left.\begin{matrix}X'(0)=c_2=0\\X'(\pi)=c_2=0\end{matrix}\right\}\to\lambda=0$ autovalor, $X_0=\{1\}$.

$\lambda>0$: $X=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen}wx$, $X'=-wc_1\operatorname{sen}wx+wc_2\cos wx$. $X'(0)=0\to c_2=0\to X'(\pi)=-wc_1\operatorname{sen}w\pi=0$

$\to w_n=n$, $\boxed{\lambda_n=n^2,\ X_n=\{\cos nx\},\ n=0,1,2,\dots}$ (como en formulario).

c] $u=XT\to XT'+XT=X''T$, $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+1=-\lambda\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X'(0)=X'(\pi)=0\end{cases}\uparrow$, $\lambda_n=n^2$, $X_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,2,\dots$

[Y además: $T'+(\lambda+1)T=0$, pero esto no se utiliza ahora, por ser el problema no homogéneo].

Llevamos entonces a la ecuación: $u=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx\to T_0+T_0'+\sum_{n=1}^{\infty}[T_n'+T_n+n^2T_n]\cos nx=e^{-2t}$.

[e^{-2t} (constante en x) ya está desarrollada en las autofunciones $\{\cos nx\}$, pues la primera de ellas es $\{1\}$].

Imponiendo el dato inicial $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos nx=\cos x$, deducimos: $T_1(0)=1$ y $T_n(0)=0$ si $n\neq 1$.

Por tanto, sólo son no nulas las soluciones de estos 2 problemas:

$$\begin{cases}T_0'+T_0=e^{-2t}\\T_0(0)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{a]}}T_0(t)=e^{-t}-e^{-2t},\qquad\begin{cases}T_1'+2T_1=0\\T_1(0)=1\end{cases}\to T_1=Ce^{-2t}\xrightarrow{T_1(0)=1}T_1(t)=e^{-2t}.$$

Concluimos que la solución del problema es: $\boxed{u(x,t)=e^{-t}-e^{-2t}+e^{-2t}\cos x}$.

3. Sea el campo vectorial $\mathbf{g}(x,y)=(xy^2,xy)$. ¿Deriva de un potencial? Hallar el valor de la integral de línea de $\mathbf{g}$ entre $(2,0)$ y $(0,2)$ a lo largo del segmento que une estos puntos. [1.5 puntos]

Como $g_x-f_y = y-2xy \not\equiv 0$, $\mathbf{g}$ no deriva de un potencial y hay que calcularse la integral.

Una posible parametrización es: $\mathbf{c}(x)=(x,2-x)$, $x\in[2,0]$ (si $x\in[0,2]$ se recorre al revés), $\mathbf{c}'(x)=(1,-1)$ $\to$

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s} = \int_2^0 \big(x(2-x)^2, x(2-x)\big)\cdot(1,-1)\,dx = \int_2^0 (2x-3x^2+x^3)\,dx = x^2-x^3+\tfrac{1}{4}x^4\Big]_2^0 = 4-8+4 = \boxed{0}.$$

[Se podría hacer utilizando el teorema de Green en el triángulo del problema **1** y el resultado de allí. El borde del triángulo está formado por nuestro segmento, además de otro vertical y otro horizontal. Como sobre los ejes es $\mathbf{g}=\mathbf{0}$, las integrales sobre ellos son 0. Además g_x-f_y es la f del **1**. Así:

$$\iint_D [g_x-f_y]\,dx\,dy = 0 = \oint_{\partial D} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s} = 0+0+\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}\ \Big].$$

4. Sea $yu_y - xu_x = y$. Hallar su solución general y la que satisface el dato inicial $u(-1,y)=3y$. [1.5 puntos]

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Lo más corto es mirarla como lineal. $y = C\,e^{-\int 1/x} = C\,e^{\ln x^{-1}} = \frac{C}{x}$. Características: $\boxed{xy = C}$.

Más corto será hacer $\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = y \end{cases} \to \begin{cases} u_y = xu_\xi + u_\eta \\ u_x = yu_\xi \end{cases} \to\ yu_\eta = y,\ u_\eta = 1,\ u(\xi,\eta) = \eta + p(\xi),\ \boxed{u(x,y) = y + p(xy)}$.

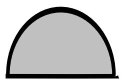
$\Big[$Más largo: $\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = x \end{cases} \to \begin{cases} u_y = xu_\xi \\ u_x = yu_x + u_\eta \end{cases} \to\ -xu_\eta = y,\ u_\eta = -\frac{\xi}{\eta^2} \to u = \underset{\uparrow}{\frac{\xi}{\eta} + p(\xi)}\Big]$.

Imponiendo el dato: $u(-1,y) = y+p(-y)=3y$, $p(-y)=2y \to p(v)=-2v \to$ $\boxed{u(x,y)=y-2xy}$ (la de siempre).

Comprobamos: $u_y=1-2x$, $u_x=-2y$, $yu_y-xu_x=y-2xy+2xy=y$, y además $u(-1,y)=3y$.

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0,\ \ r<1,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}2\theta,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$ [1.5 puntos]

Haciendo $u=R\Theta$ el formulario nos dice que sale: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=n^2$, $\{\operatorname{sen} n\theta\}$, $n=1,2,\dots$



[pues $u(r,0)=R(r)\Theta(0)=0$, $u(r,\pi)=R(r)\Theta(\pi)=0$ y de $R(r)\equiv 0$ solo sale la solución cero],

y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0 \xrightarrow{\lambda=n^2} \mu(\mu-1)+\mu-n^2=0$, $\mu=\pm n$, $R=c_2r^n+c_2r^{-n}$, R acotado $\to$ $R_n=\{r^n\}$.

Imponiendo a $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \operatorname{sen} n\theta$ (que ya cumple la ecuación y dos datos de contorno) el dato que falta:

$$u(1,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}2\theta \to \text{todos los } b_n=0, \text{ excepto } b_1=1,\ b_2=-1.$$

La solución es $\boxed{u(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta-r^2\operatorname{sen}2\theta}$ $[\,= r\operatorname{sen}\theta-2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = y-2xy$ (otra vez)$]$.