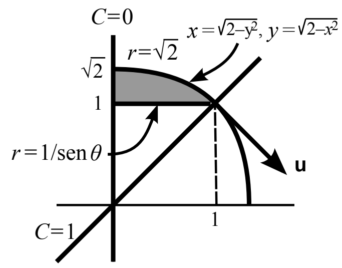
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (30 de enero de 2014)

1. Sea $f(x,y)=\frac{x}{y}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0$ y 1. Hallar el vector unitario $\mathbf{u}$ con la dirección y sentido de $\nabla f(1,1)$ y el valor de la derivada $D_{\mathbf{u}}f(1,1)$. Hallar $\Delta f(x,y)$.

b] Si D es la parte del círculo $x^2+y^2\le 2$ con $x\ge 0$ e $y\ge 1$: i) calcular $\iint_D f\,dx\,dy$ (en ese orden), ii) expresar la integral en polares. [2.6 puntos]



a] $f=0\to x=0$, $f=1\to y=x$. $\nabla f(x,y)=(y^{-1},-xy^{-2})$. $\nabla f(1,1)=(1,-1)$.

$\|\nabla f(1,1)\|=\sqrt{2}$. $\mathbf{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $D_{\mathbf{u}}f(1,1)=(1,-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boxed{\sqrt{2}}$.

[El ∇f es perpendicular a la recta de nivel y debía ser $D_{\mathbf{u}}=\nabla\cdot\mathbf{u}=\|\nabla\|\|\mathbf{u}\|\cos 0=\|\nabla\|$].

$\Delta f(x,y)=f_{xx}+f_{yy}=2xy^{-3}=\boxed{\frac{2x}{y^3}}$.

b] i) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-y^2}}\frac{x}{y}\,dx\,dy=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2-y^2}{2y}\,dy=\Big[\ln y-\frac{y^2}{4}\Big]_1^{\sqrt{2}}=\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}}$.

Más largo: $\displaystyle\int_0^1\int_1^{\sqrt{2-x^2}}\frac{x}{y}\,dy\,dx=\int_0^1 x\ln\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_0^1\frac{x}{2}\ln(2-x^2)\,dx=\frac{x^2}{4}\ln(2-x^2)\Big]_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^3-2x+2x}{2-x^2}\,dx=\cdots$

ii) Como $y=r\operatorname{sen}\theta=1\Leftrightarrow r=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, en polares: $\displaystyle\iint_D f=\boxed{\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{1/\operatorname{sen}\theta}^{\sqrt{2}} r\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,dr\,d\theta}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\Big[\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{\cos\theta}{2\operatorname{sen}^3\theta}\Big]d\theta=\cdots$

2. Sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(4x,3z-2y,3y)$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. **b]** Hallar el valor de la integral de línea de $\mathbf{f}$ desde $(1,0,0)$ hasta $(1,2,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos. [1.4 puntos]

a] $\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y+h_z=2$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 4x&3z-2y&3y\end{vmatrix}=(3-3)\,\mathbf{i}+(0-0)\,\mathbf{j}+(0-0)\,\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

b] Como $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\mathbf{0}$ y $\mathbf{f}$ es C^1 en $\mathbf{R}^3$, existe la función potencial.

$U_x=4x\to U=2x^2+p(y,z)$
$U_y=3z-2y\to U=3yz-y^2+q(x,z)$, $U=2x^2+3yz-y^2\Rightarrow\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,2,3)-U(1,0,0)=16-2=\boxed{14}$.
$U_z=3y\to U=3yz+r(x,y)$

$\Big[$Con $\mathbf{c}(t)=(1,2t,3t)$, $t\in[0,1]\to\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(1,5t,6t)\cdot(0,2,3)\,dt=\int_0^1 28t\,dt=14t^2\Big]_0^1=14\Big]$.

3. Hallar la solución general [$T(t)$ y $R(r)$, respectivamente] de las siguientes EDOs de segundo orden:
a) $T''+2T'+T=t+2$ **b)** $r^2R''+rR'-n^2R=0$, $n=1,2,\dots$ [1.2 puntos]

a) $\mu^2+2\mu+1=0$, $\mu=-1$ doble $\to T=(c_1+c_2t)e^{-t}+T_p$. $T_p=At+B\to 2A+At+B=t+2\to A=1$, $B=0$.

La solución general es, por tanto: $\boxed{T(t)=(c_1+c_2t)e^{-t}+t}$.

b) Ecuación de Euler. $\mu(\mu-1)+\mu-1=n^2$, $\mu=\pm n\to\boxed{R(r)=c_1r^n+c_2r^{-n}}$.

4. Sea $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)=y(\pi)=0\end{cases}$. Calcular autovalores λ_n, autofunciones $\{y_n\}$ y $\langle y_n,y_n\rangle$ (deben coincidir con el formulario). [1.4 puntos]

$(y')'+\lambda y=0$. $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0\Rightarrow\lambda\ge 0$. $\Big[$Directamente: $\lambda<0$: $y=c_1e^{px}+c_2e^{-px}\to\left.\begin{array}{l}c_1+c_2=0,\ c_2=-c_1\downarrow\\ c_1[\underbrace{e^{p\pi}-e^{-p\pi}}_{>0}]=0\end{array}\right\}\to y\equiv 0\Big]$.

Si $\lambda=0$ es $y=c_1+c_2x\to\left.\begin{array}{l}y(0)=c_1=0\\ y(\pi)=c_1+c_2\pi=0\end{array}\right\}\to c_1=c_2=0$. $\lambda=0$ tampoco es autovalor.

Para $\lambda>0$ es $y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen}wx$, $w=\sqrt{\lambda}>0\to\left.\begin{array}{l}y(0)=c_1=0\downarrow\\ y(\pi)=c_2\operatorname{sen}w\pi=0\end{array}\right\}$ Para que sea $c_2\neq 0$ debe ser:

$w\pi=n\pi\to\boxed{\lambda_n=n^2,\ n=1,2,\dots}$. Para estos λ_n queda c_2 indeterminado, con lo que $\boxed{y_n=\{\operatorname{sen}nx\}}$.

$$\langle y_n,y_n\rangle\underset{r\equiv 1}{=}\int_0^\pi\operatorname{sen}^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi[1-\cos 2nx]\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{\operatorname{sen}2n\pi-\operatorname{sen}0}{4n}=\boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

(Todo como en el formulario).

Elegir 2 problemas entre 5 , 6 y 7 :

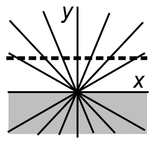
5. Resolver $\begin{cases} yu_y+xu_x=0 \\ u(x,1)=x \end{cases}$.	Hallar sus características $\xi(x,y)=K$ y (utilizando la regla de la cadena) la ecuación para u_η. Hallar su solución general e imponer el dato inicial.	[1.7 puntos]

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ lineal (mejor que separable). $y=K\,\mathrm{e}^{\int dx/x}=K\mathrm{e}^{\ln x}=Kx$. Características: $\boxed{\frac{y}{x}=K}$.

$\begin{cases} \xi=yx^{-1} \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=x^{-1}u_\xi+u_\eta \\ u_x=-yx^{-2}u_\xi \end{cases} \to yu_\eta=0,\ u_\eta=0,\ u=p(\xi).$ $\boxed{u(x,y)=p(\frac{y}{x})}$.

Casi igual: $\begin{cases} \xi=yx^{-1} \\ \eta=x \end{cases} \to \begin{cases} u_y=x^{-1}u_\xi \\ u_x=-yx^{-2}u_\xi+u_\eta \end{cases} \to xu_\eta=0,\ u_\eta=0,\ u=p(\xi).$ $\boxed{u(x,y)=p(\frac{y}{x})}$.

Imponiendo el dato inicial: $u(x,1)=p(\frac{1}{x})=x,\ p(v)=\frac{1}{v},$ $\boxed{u(x,y)=\frac{x}{y}}$ [válida para $y>0$].



Comprobamos: $u(x,1)=x$, y además: $yu_y+xu_x=-yxy^{-2}+xy^{-1}=0$.

[Como $y=1$ no era tangente a las características, la solución debía ser única].

6. Resolver $\begin{cases} u_{tt}+2u_t-u_{xx}=(t+2)\,\mathrm{sen}\,x,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$.	Separar variables en la homogénea, probar serie con sus autofunciones y hallar el $T_n(t)$ no nulo.	[1.7 puntos]

Al ser un problema no homogéneo, debemos probar una serie con la autofunciones X_n del homogéneo.
Separando variables en la ecuación homogémea: $u=XT \to X(T''+2T')=X''T,\ \frac{X''}{X}=\frac{T''+2T'}{T}=-\lambda \to$

$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to \underset{\text{(las del problema 4)}}{X_n=\{\mathrm{sen}\,nx\},\ n=1,2,...}$ [además de $T_n''+2T_n'+\lambda T_n=0$ que ahora no se usa].

Llevamos, pues, a la ecuación $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\mathrm{sen}\,nx$, obteniendo $\sum_{n=1}^{\infty}[T_n''+2T_n'+n^2T_n]\,\mathrm{sen}\,nx=\underset{\text{ya desarrollada}}{(t+2)\,\mathrm{sen}\,x}$.

Los datos iniciales: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\mathrm{sen}\,nx=0,\ u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\,\mathrm{sen}\,nx=0 \Rightarrow T_n(0)=T_n'(0)=0\ \forall n.$

Todas las ecuaciones son homogéneas con datos nulos (y su solución es $T_n\equiv 0$) menos $\begin{cases} T_1''+2T_1'+T_1=t+2 \\ T_1(0)=T_1'(0)=0 \end{cases}$,

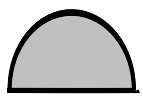
que es la ecuación cuya solución general $T_1=(c_1+c_2t)\mathrm{e}^{-t}+t$ se halló en **3**.

Falta imponer los datos iniciales: $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2-c_1+1=0,\ c_2=-1 \end{cases}$. La solución es, pues: $\boxed{u(x,t)=t(1-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{sen}\,x}$

(que es fácil de comprobar).

7. Sea $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<2,\ 0<\theta<\pi \\ u(2,\theta)=\pi,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$.	Resolverlo por separación de variables y escribir los dos primeros términos no nulos de la serie solución.	[1.7 puntos]

Haciendo $u=R\Theta$ el formulario dice que sale: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0 \end{cases},\ \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\{\mathrm{sen}\,n\theta\},\ n=1,2,...$



[pues $u(r,0)=R(r)\Theta(0)=0,\ u(r,\pi)=R(r)\Theta(\pi)=0$ y de $R(r)\equiv 0$ solo sale la solución cero],

y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0 \xrightarrow{\lambda=n^2} R=c_2r^n+c_2r^{-n}$ (problema **3**). R debe ser **acotada** en $r=0 \to R_n=\{r^n\}$.

Imponemos a $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^n\,\mathrm{sen}\,n\theta$ (que ya cumple ecuación y varios datos de contorno) el dato que falta:

$$u(2,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}2^nc_n\,\mathrm{sen}\,n\theta=\pi \to 2^nc_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi\,\mathrm{sen}\,n\theta\,d\theta=-\frac{2}{n}\cos n\theta\Big]_0^\pi=\frac{2[1-(-1)^n]}{n}$$ [se anula si n es par y es $4/n$ si n impar].

La serie solución es pues: $\boxed{u(r,\theta)=2r\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{1}{6}r^3\,\mathrm{sen}\,3\theta+\cdots}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2m-1}}{2^{2n-3}(2m-1)}\,\mathrm{sen}(2m-1)\theta$.