Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (9 de septiembre de 2014)

1. Sea $f(x,y)=(x-y)^2$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0$ y 1. Hallar $\nabla f(x,y)$ y $\operatorname{div}(\nabla f)$. Hallar el vector unitario $\mathbf{u}$ para el que es mínima la derivada de f en el punto $(0,-1)$ en la dirección de $\mathbf{u}$.
b] Calcular la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D el semicírculo dado por $x^2+y^2\le 4$, $x\ge 0$ [mucho mejor en polares].
c] ¿Cuál debe ser el valor de la integral de línea de ∇f desde $(-1,0)$ hasta $(1,2)$ a lo largo del segmento que une los puntos? Parametrizar el segmento, hallar la integral y comprobarlo. [4 puntos]

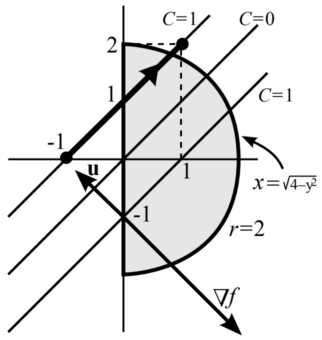
a] $(x-y)^2=C \to x-y=\pm\sqrt{C}$ (rectas). $f=0 \to y=x$, $f=1 \to y=x\pm 1$.

$\nabla f(x,y)=\boxed{(2x-2y,2y-2x)}$. $\operatorname{div}(\nabla f)=\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=2+2=\boxed{4}$ $\forall(x,y)$.

La derivada direccional será mínima en el sentido opuesto al gradiente.

$\nabla f(0,-1)=(2,-2)$. Opuesto: $(-1,1)$, de módulo $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

[La derivada mínima será $D_{\mathbf{u}}f(0,-1)=(2,-2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{2}=-\|\nabla f(0,-1)\|$, pues debía ser: $D_{\mathbf{u}}f=\nabla f\cdot\mathbf{u}=\|\nabla f\|\,\|\mathbf{u}\|\cos\pi=-\|\nabla f\|$].



b] En polares es $f(r,\theta)=(r\cos\theta-r\operatorname{sen}\theta)^2=r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)=r^2(1-\operatorname{sen}2\theta)$. Por tanto:

$$\iint_D f\,dx\,dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 \underset{\uparrow\text{ por el jacobiano}}{r^3}(1-\operatorname{sen}2\theta)\,dr\,d\theta=4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\underset{\text{(era impar)}}{(1-\operatorname{sen}2\theta)}\,d\theta=4\pi+[2\cos 2\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\boxed{4\pi}.$$

[En cartesianas mucho peor: $\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2-2xy+y^2)\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}\left(y^3-4y+\frac{2}{3}(y^2+2)\right)\sqrt{4-y^2}\,dy=\cdots$].

c] Sabemos que $\int_{\mathbf{c}}\nabla f\cdot d\mathbf{s}=f(\mathbf{c}(b))-f(\mathbf{c}(a))=f(1,2)-f(-1,0)=\boxed{0}$ (en la misma curva de nivel).

Posible parametrización (viendo la recta que pasa por ambos puntos): $\boxed{\mathbf{c}(x)=(x,x+1),\ x\in[-1,1]}$.

$\to\ \mathbf{c}'(x)=(1,1)$, $\int_{\mathbf{c}}\nabla f\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^{1}(-2,2)\cdot(1,1)\,dx=\int_{-1}^{1}0\,dx=0$.

2. Hallar la solución general $R(r)$ de $rR''+R'=4r$: i) Haciendo $R'=v$, resolviendo e integrando. ii) Mirándola como ecuación de Euler. [1.4 puntos]

i) $v'=-\frac{1}{r}v+4$ lineal de primer orden. $e^{-\int(1/r)dr}=e^{-\ln r}=\frac{1}{r}$. $v=\frac{C}{r}+\frac{1}{r}\int 4r\,dr=\frac{C}{r}+2r$. $\boxed{R(r)=K+C\ln r+r^2}$.

ii) $r^2R''+rR'=4r^2$. $\mu(\mu-1)+\mu=0$, $\mu=0$ doble. $R=c_1+c_2\ln r+R_p$. Para hallar la R_p podemos hacer:

$$|W|=\begin{vmatrix}1 & \ln r\\ 0 & \frac{1}{r}\end{vmatrix}=\frac{1}{r}.\quad R_p=\ln r\int\frac{4\,dr}{1/r}-\int\frac{4\ln r\,dr}{1/r}=2r^2\ln r-2r^2\ln r+\int 2r\,dr=r^2\ \nearrow$$

O, mejor, probar $R_p=Ar^2$ (pues al hacer $r=e^s$ queda $\cdots=4e^{2s}\to R_p=Ae^{2s}$) $\to$ $2Ar^2+2Ar^2=4r^2$, $A=1\ \uparrow$

3. Sea $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y'(0)=y'(\pi)=0\end{cases}$. Calcular autovalores λ_n, autofunciones $\{y_n\}$ y $\langle y_n,y_n\rangle$ (deben coincidir con el formulario). [1.4 puntos]

$(y')'+\lambda y=0$. $\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0 \Rightarrow \lambda\ge 0$. [Directamente: $\lambda<0$: $\begin{matrix}y=c_1e^{px}+c_2e^{-px}\\ y'=pc_1e^{px}-pc_2e^{-px}\end{matrix}$ $\to$ $\left.\begin{matrix}c_2=c_1\downarrow\\ c_1p[\underbrace{e^{p\pi}-e^{-p\pi}}_{>0}]=0\end{matrix}\right\}\to y\equiv 0$].

Si $\lambda=0$ es $y=c_1+c_2x$ $\to$ $\left.\begin{matrix}y'(0)=c_2=0\\ y'(\pi)=c_2=0\end{matrix}\right\}\to$ c_1 cualquiera. $\lambda=0$ es autovalor con autofunción $\boxed{y_0=\{1\}}$.

Para $\lambda>0$ es $\begin{matrix}y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen}wx,\ w=\sqrt{\lambda}>0\\ y'=-wc_1\operatorname{sen}wx+wc_2\cos wx\end{matrix}$ $\to$ $\left.\begin{matrix}y'(0)=wc_2=0\downarrow\\ y'(\pi)=wc_1\operatorname{sen}w\pi=0\end{matrix}\right\}$ Para que sea $c_1\ne 0$ debe ser:

$w\pi=n\pi \to \boxed{\lambda_n=n^2,\ n=1,2,\ldots}$. Para estos λ_n queda c_1 indeterminado, con lo que $\boxed{y_n=\{\cos nx\}}$.

$$\langle y_0,y_0\rangle\underset{r\equiv 1}{=}\int_0^\pi 1^2\,dx=\boxed{\pi}.\qquad \langle y_n,y_n\rangle=\int_0^\pi\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi[1+\cos 2nx]\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{\operatorname{sen}2n\pi-\operatorname{sen}0}{4n}=\boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

(Todo como en el formulario).

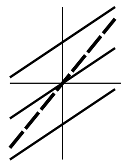
Elegir 2 problemas entre 4 , 5 y 6 :

4. Resolver $\begin{cases} u_y+\frac{3}{2}u_x=x-y \\ u(x,x)=0 \end{cases}$. Hallar sus características $\xi(x,y)=K$ y (utilizando la regla de la cadena) la ecuación para u_η . Dar su solución general y la que cumple el dato inicial. [1.6 puntos]

$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}$. Características: $\boxed{y-\frac{2}{3}x=K}$. $\begin{cases} \xi=y-\frac{2}{3}x \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=u_\xi+u_\eta \\ u_x=-\frac{2}{3}u_\xi \end{cases} \to u_\eta=x-y=\frac{\eta}{2}-\frac{3\xi}{2}\,,\ u=\frac{\eta^2}{4}-\frac{3\xi\eta}{2}+p(\xi) \to$

$\boxed{u(x,y)=xy-\frac{5}{4}y^2+p(y-\frac{2}{3}x)}$ solución general $\to u(x,x)=p(\frac{x}{3})-\frac{1}{4}x^2=0,\ p(v)=\frac{9}{4}v^2,\ u=xy-\frac{5}{4}y^2+\frac{9}{4}(y-\frac{2x}{3})^2=\boxed{(x-y)^2}$.

Parecido: $\begin{cases} \xi=y-\frac{2}{3}x \\ \eta=x \end{cases} \to u_\eta=\frac{2\eta}{9}-\frac{2\xi}{3}\,,\ u=\frac{\eta^2}{9}-\frac{2\xi\eta}{3}+p^*(\xi) \to u=\frac{5x^2}{9}-\frac{3xy}{2}+p^*(y-\frac{2}{3}x)\ldots$



Comprobamos: $u(x,x)=0$, y además: $u_y+\frac{3}{2}u_x=-2(x-y)+3(x-y)=x-y$.

[Como $y=x$ no era tangente a rectas las características, la solución debía ser única].

5. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=x\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Separar $u=XT$, hallar las X_n y T_n y determinar los coeficientes de una serie usando el dato inicial]. [1.6 puntos]

Separando variables en la ecuación homogénea: $u=XT \to X(T'+T)=X''T\,,\ \frac{X''}{X}=\frac{T'+T}{T}=-\lambda \to$

$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases} \to \underset{\text{(problema }\mathbf{3}\text{)}}{X_n=\{\cos nx\}}\,,\ n=0,1,2,\ldots$ y además $T_n'+(1+\lambda)T_n=0 \to T_n=\{\mathrm{e}^{-(n^2+1)t}\}$.

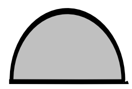
Probamos la serie $u(x,t)=\frac{c_0}{2}\mathrm{e}^{-t}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{-(n^2+1)t}\cos nx$, que satisface ya todo menos el dato inicial:

$u(x,0)=\frac{c_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\cos nx=x$, serie de Fourier en cosenos cuyos coeficientes vienen dados por:

$$c_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\pi\,,\quad c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n}x\,\mathrm{sen}\,nx\Big]_0^\pi-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \mathrm{sen}\,nx\,dx=0+\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big]_0^\pi=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\,.$$

La solución es, por tanto: $\boxed{u(x,t)=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\,\mathrm{e}^{-(n^2+1)t}\cos nx}$ [sólo quedan los impares].

6. Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=4\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=1-\cos 2\theta,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$. [Probar serie con autofunciones del homogéneo y calcular el $R_n(r)$ no nulo]. [Se usa **2.** y **3.**]. [1.6 puntos]



Haciendo $u=R\Theta$ (formulario) sale: $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta'(0)=\Theta'(\pi)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{prob }\mathbf{3}} \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\{\cos n\theta\}\,,\ n=0,1,\ldots$

Probamos entonces $u(r,\theta)=R_0(r)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos n\theta$. Que llevada a la ecuación nos da:

$R_0''+\frac{1}{r}R_0'+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{n^2}{r^2}R_n]\cos n\theta=4$. Y del otro dato sale: $u(1,\theta)=R_0(1)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos n\theta=1-\cos 2\theta$.

Además la solución debe estar acotada si $r=0$. Los únicos problemas con solución no nula son:

$\begin{cases} rR_0''+R_0=4r \\ R_0(1)=1\,,\ R_0 \text{ acotada} \end{cases} \xrightarrow{\text{prob }\mathbf{2}} R_0=c_1+c_2\ln r+r^2 \xrightarrow{\text{acotada}} c_2=0.\quad R_0(1)=c_1+1=1 \to R_0(r)=r^2$.

$\begin{cases} r^2R_2''+rR_2'-4R_2=0 \\ R_2(1)=0\,,\ R_2 \text{ acotada} \end{cases} \xrightarrow{\text{Euler}} R_2=c_1r^2+c_2r^{-2} \xrightarrow{\text{acotada}} c_2=0.\quad R_2(1)=c_1=1 \to R_2(r)=r^2$.

La solución es pues: $\boxed{u(r,\theta)=r^2[1-\cos 2\theta]}$.