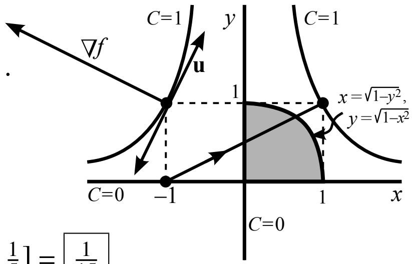
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (29 de enero de 2015)

1. Sea $f(x,y) = x^2y$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0$ y 1 . Hallar $\nabla f(-1,1)$ y $\Delta f(x,y)$. Encontrar un vector unitario $\mathbf{u}$ tal que la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(-1,1)=0$.
b] Si D es la parte del círculo $x^2+y^2\le 1$ con $x,y\ge 0$, calcular $\iint_D f$ en cartesianas (mejor $dy\,dx$) y en polares.
c] Hallar la integral de línea de $\mathbf{g}(x,y)=(2xy,x^2)$ entre $(-1,0)$ y $(1,1)$ siguiendo el segmento que une los puntos.
[3 puntos]

a] $f=0 \to x=0$ o $y=0$; $f=1 \to y=\frac{1}{x^2}$. $\swarrow$ perpendicular a la curva de nivel



$\nabla f(x,y)=(2xy,x^2)$. $\nabla f(-1,1)=\boxed{(-2,1)}$. $\Delta f(x,y)=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{2y}$.

La derivada se anula en la dirección de $\mathbf{v}$ perpendiculares al gradiente:

$\mathbf{v}=(1,2)$ o $(-1,-2)$, $\|(\pm1,\pm2)\|=\sqrt{5} \to \boxed{\mathbf{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$ (o $-\mathbf{u}$).

b] En cartesianas: $\iint_D f=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]=\boxed{\frac{1}{15}}$.

Más largo: $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2y\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^1 y\,(1-y^2)^{3/2}\,dy=-\frac{1}{15}\,(1-y^2)^{5/2}\Big]_0^1=\boxed{\frac{1}{15}}$.

En polares: $\iint_D f=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\,r^3\cos^2\theta\,\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta=\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{15}}$.

c] Como $\mathbf{g}=\nabla f$, para hallar la integral de línea basta calcular $f(1,1)-f(-1,0)=1-0=\boxed{1}$.

Directamente: $\mathbf{c}(t)=\left(t,\frac{1+t}{2}\right)$, $t\in[-1,1] \to \int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^1 (t+t^2,t^2)\cdot\left(1,\frac{1}{2}\right)dt=\int_{-1}^1\left(t+\frac{3}{2}t^2\right)dt=0+1=\boxed{1}$.
(u otra buena parametrización)

2. Sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=\left(\frac{y}{x},\ln|x|,\frac{yz}{x^2}\right)$. Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. ¿Deriva $\mathbf{f}$ de un potencial? [1 punto]

$\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y+h_z=-\frac{y}{x^2}+0+\frac{y}{x^2}=\boxed{0}$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ y/x&\ln|x|&yz/x^2\end{vmatrix}=\frac{z}{x^2}\,\mathbf{i}+\frac{2yz}{x^3}\,\mathbf{j}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)\mathbf{k}=\boxed{\left(\frac{z}{x^2},\frac{2yz}{x^3},0\right)}\neq\mathbf{0}$

$\Rightarrow$ no existe función potencial para $\mathbf{f}$.

3. Hallar la solución general de $r^2R''+r\,R'-R=3r^2$. [1 punto]

Ecuación de Euler. $\mu(\mu-1)+\mu-1=0$, $\mu=\pm1 \to R=c_1r+c_2r^{-1}+R_p$. Para hallar la R_p :

$|W|=\begin{vmatrix}r&r^{-1}\\1&-r^{-2}\end{vmatrix}=-2r^{-1}$. $R_p=r^{-1}\int\frac{r\cdot3}{-2r^{-1}}dr-r\int\frac{r^{-1}\cdot3}{-2r^{-1}}dr=-\frac{1}{2r}\int 3r^2\,dr+\frac{3}{2}r\int dr=r^2$. $\boxed{R(r)=c_1r+c_2r^{-1}+r^2}$.

O más corto, probando $R_p=Ar^2$ (Ae^{2s}): $2Ar^2+2Ar^2-Ar^2=3r^2 \to A=1$ $\nearrow$

4. Sea $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$. **a]** Comprobar (directamente) que $\lambda_1=1$ es autovalor y calcular $\langle y_1,y_1\rangle$. [1.6 puntos]
b] Hallar (usando el formulario) el desarrollo de $f(x)=\pi$ en serie de sus autofunciones.

Si $\lambda=1$ es $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x \to \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0\downarrow\\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=c_2\cos\frac{\pi}{2}=c_2\cdot0=0\end{array}\right\}$ c_2 cualquiera. Es autovalor e $\boxed{y_1=\{\operatorname{sen}x\}}$.

$$\langle y_1,y_1\rangle \underset{r\equiv1}{=} \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[1-\cos2x]\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}0}{4}=\boxed{\frac{\pi}{4}} .$$

El formulario nos dice que $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2^2(\pi/2)^2}=(2n-1)^2$, $n=1,2,\dots$, $y_n=\{\operatorname{sen}(2n-1)x\}$ e $\langle y_n,y_n\rangle \overset{n=1\uparrow}{=} \frac{\pi}{4}$.

Si $\pi=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}(2n-1)x$ los c_n vienen dados por $c_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\pi\operatorname{sen}(2n-1)x\,dx=-\frac{4}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big]_0^{\pi/2}=\frac{4}{2n-1}$.

Por tanto: $\boxed{\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x=4\operatorname{sen}x+\frac{4}{3}\operatorname{sen}3x+\cdots}$.

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ t > 0 \\ u(x,0) = \pi \\ u(0,t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$ [separar $u = XT$, hallar las X_n y T_n, y deducir los coeficientes de una serie con el dato inicial]. [1.6 puntos]

Separando variables en la ecuación (o mirando el formulario): $u = XT \to XT' = 2X''T,\ \frac{X''}{X} = \frac{T'}{2T} = -\lambda \to$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \to \lambda_n = (2n-1)^2,\ X_n = \{\operatorname{sen}(2n-1)x\},\ n = 1, 2, \ldots \text{ (problema 4)}$$

$X(0)T(t) = X'(\frac{\pi}{2})T(t) = 0 \nearrow$ y además $T' = -2\lambda T \to T_n = \left\{ e^{-2(2n-1)^2 t} \right\}$.

A la solución $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-2(2n-1)^2 t} \operatorname{sen}(2n-1)x$, sólo le falta cumplir el dato inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(2n-1)x = \pi,$$ que el desarrollo hallado en el problema 4.

La solución es, pues: $\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2n-1} e^{-2(2n-1)^2 t} \operatorname{sen}(2n-1)x} = 4\, e^{-2t} \operatorname{sen} x + \frac{4}{3} e^{-18t} \operatorname{sen} 3x + \cdots$

Elegir entre 6 y 7:

6. Resolver $\begin{cases} 2yu_y - xu_x = 2u \\ u(-1,y) = y^3 \end{cases}$. Hallar sus características $\xi(x,y) = K$ y (utilizando la regla de la cadena) la ecuación para u_η. Hallar su solución general e imponer el dato inicial. [1.8 puntos]

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$ lineal (mejor que separable). $y = K\, e^{-\int 2dx/x} = K e^{-2\ln x} = \frac{K}{x^2}$. Características: $\boxed{x^2 y = K}$.

$\begin{cases} \xi = x^2 y \\ \eta = y \end{cases} \to \begin{cases} u_y = x^2 u_\xi + u_\eta \\ u_x = 2xy\, u_\xi \end{cases} \to 2yu_\eta = 2u,\ u_\eta = \frac{1}{\eta} u,\ u = p(\xi)\, e^{\ln \eta} = p(\xi)\, \eta$. $\boxed{u(x,y) = p(x^2 y)\, y}$.

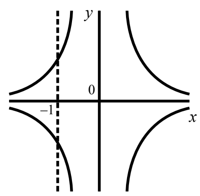
O bien: $\begin{cases} \xi = x^2 y \\ \eta = x \end{cases} \to \begin{cases} u_y = x^2 u_\xi \\ u_x = 2xy u_\xi + u_\eta \end{cases} \to -xu_\eta = 2u,\ u_\eta = -\frac{2}{\eta} u,\ u = p^*(\xi)\, e^{-2\ln \eta} = \frac{p^*(\xi)}{\eta^2}$. $\boxed{u(x,y) = \frac{p^*(x^2 y)}{x^2}}$.

Imponiendo el dato inicial: $u(-1,y) = p(y)\, y = y^3,\ p(v) = v^2,\ u(x,y) = x^4 y^2 y = \boxed{x^4 y^3}$.

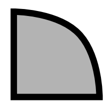
O bien: $u(-1,y) = p^*(y) = y^3,\ p^*(v) = v^3,\ u(x,y) = x^6 y^3 / x^2 = \boxed{x^4 y^3}$.

Comprobamos: $u(-1,y) = y3$, y además: $2yu_y - xu_x = 6x^4y^3 - 4x^4y^3 = 2u$.

[Como $x = -1$ no era tangente a las características, la solución debía ser única].



7. Resolver $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 3 \operatorname{sen}\theta,\ r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u_r(1,\theta) = 0,\ u(r,0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$. Separar variables en la homogénea, probar serie con sus autofunciones y hallar el $R_n(r)$ no nulo. [1.8 puntos]



Por ser no homogéneo, debemos probar una serie con la autofunciones Θ_n del homogéneo.

Haciendo $u = R\Theta$ sale (formulario): $\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases},\ \lambda_n = (2n-1)^2,\ \Theta_n = \{\operatorname{sen}(2n-1)\theta\}_{n=1,2,\ldots}$.

[pues $u(r,0) = R(r)\Theta(0) = 0,\ u(r,\pi) = R(r)\Theta'(\frac{\pi}{2}) = 0$ y de $R(r) \equiv 0$ solo sale la solución cero],

Probamos entonces: $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \operatorname{sen}(2n-1)\theta$, obteniendo $\sum_{n=1}^{\infty} \left[R_n'' + \frac{R_n'}{r} - \frac{(2n-1)^2 R_n}{r^2}\right] \operatorname{sen}(2n-1)\theta = \underbrace{3 \operatorname{sen}\theta}_{\text{ya desarrollada}}$.

Del dato $u_r(1,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n'(1) \operatorname{sen}(2n-1)\theta = 0$ sale $R_n'(1) = 0\ \forall n$ y además deben ser acotadas las R_n en $r = 0$.

La única R_n no nula saldrá de $\begin{cases} r^2 R_1'' + rR_1' - R_1 = 3r^2 \\ R_1 \text{ acotada},\ R_n'(1) = 0 \end{cases}$ $R_1 = c_1 r + c_2 r^{-1} + r^2$ (problema **3**).

R_1 acotada en $r = 0 \to c_2 = 0$. $R_1'(1) = c_1 + 2 = 0 \to c_1 = -2$. La solución es: $\boxed{u(r,\theta) = (2r - r^2) \operatorname{sen}\theta}$.

(que no es difícil comprobar)