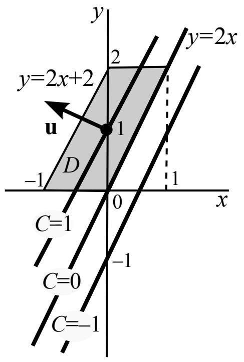
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (9 de septiembre de 2015)

1. Sea $f(x,y)=(y-2x)^3$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0$, 1 y -1 . Hallar $\nabla f(0,1)$ y Δf . Hallar el vector unitario $\mathbf{u}$ para el que es máxima la derivada de f en el punto $(0,1)$ en la dirección de $\mathbf{u}$.
b] Calcular $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(1,2)$, $(0,2)$ y $(-1,0)$. [2.5 puntos]



a] $(y-2x)^3=C \;\to\; y=x+\sqrt[3]{C}$ (rectas). $f=0 \;\to\; y=x$, $y=x+1$, $y=x-1$.

$\nabla f=\left(-6(y-2x)^2,3(y-2x)^2\right)\xrightarrow{(0,1)}\boxed{(-6,3)}$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{30(y-2x)}$.

La derivada $D_{\mathbf{u}}f$ será máxima en la dirección del gradiente [o de $\mathbf{v}=(-2,1)$]:

$$\|(-2,1)\|=\sqrt{5}\;\Rightarrow\;\boxed{\mathbf{u}=\left(-\tfrac{2}{\sqrt{5}},\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)}\,.$$

[El valor de la derivada máxima será $\|\nabla f\|$: $D_{\mathbf{u}}f(0,2)=(-24,12)\cdot\mathbf{u}=\frac{60}{\sqrt{5}}=12\sqrt{5}$].

b] Para no tener que hacer 2 integrales, integramos primero respecto a x :

$$\int_0^2\!\int_{y/2-1}^{y/2}(y-2x)^3\,dx\,dy=\int_0^2-\tfrac{1}{8}\left[(y-2x)^4\right]_{y/2-1}^{y/2}dy=\int_0^2 2\,dy=\boxed{4}\,.$$

Más largo: $\int_{-1}^0\!\int_0^{2x+2}(y-2x)^3dy\,dx+\int_0^1\!\int_{2x}^2(y-2x)^3dy\,dx=\int_{-1}^0\left[4-4x^4\right]dx+\int_0^1 4(x-1)^4dx=4-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=4$.

[Se podría simplificar con un cambio de variable: $\begin{matrix}y-2x=u\\ y=v\end{matrix}$, $\begin{matrix}x=\frac{v-u}{2}\\ y=v\end{matrix}$, $J=\begin{vmatrix}-1/2 & 1/2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}\int_0^2\!\int_0^2 u^3du\,dv=4$].

2. Sea $\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=e^{-z}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-xe^{-z}\,\mathbf{k}$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}$ y $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}$. **b]** Hallar el valor de la integral de línea de $\bar{\mathrm{f}}$ desde $(1,-1,0)$ hasta $(1,0,2)$ a lo largo del segmento que une los puntos. [1.5 puntos]

a] $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}=x\,e^{-z}$, $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ e^{-z} & 1 & -xe^{-z}\end{vmatrix}=(0-0,e^{-z}-e^{-z},0-0)=\bar{0}\overset{\bar{\mathrm{f}}\in C^1}{\Rightarrow}$ deriva de un potencial.

b] $\begin{matrix}U=xe^{-z}+p(y,z)\\ U=y+q(x,z)\\ U=xe^{-z}+r(x,y)\end{matrix}$, $U(x,y,z)=xe^{-z}+y\;\to\;\int_{\mathbf{c}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=U(1,0,2)-U(1,-1,0)=e^{-2}-0=\boxed{e^{-2}}$.

O bien: $\mathbf{c}(t)=(1,t-1,2t)$, $t\in[0,1]\to\int_{\mathbf{c}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_0^1(e^{-2t},1,-e^{-2t})\cdot(0,1,2)\,dt=\int_0^1(1-2e^{-2t})\,dt=1+e^{-2}-1$.

3. Sea $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)=y(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$. Calcular paso a paso sus autovalores λ_n , autofunciones $\{y_n\}$ y $\langle y_n,y_n\rangle$. (el resultado debe coincidir con el formulario). [1.3 puntos]

$(y')'+\lambda y=0$. $\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0\;\Rightarrow\;\lambda\ge 0$. [O bien: $\lambda<0$: $y=c_1e^{px}+c_2e^{-px}\;\to\;\left.\begin{matrix}c_2=-c_1\downarrow\\ c_1[\underbrace{e^{p\pi}-e^{-p\pi}}_{>0}]=0\end{matrix}\right\}\to\;y\equiv 0$].

Si $\lambda=0$ es $y=c_1+c_2x\;\to\;\left.\begin{matrix}y(0)=c_1=0\\ y(\frac{\pi}{2})=c_1+\frac{\pi}{2}c_2=0\end{matrix}\right\}\to\;c_1=c_2=0$. No es autovalor.

Para $\lambda>0$ es $y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen}wx$ ($w=\sqrt{\lambda}>0$) $\to\;\left.\begin{matrix}y(0)=c_1=0\downarrow\\ y(\frac{\pi}{2})=c_2\operatorname{sen}\frac{w\pi}{2}=0\end{matrix}\right\}$ Para que sea $c_2\neq 0$ debe ser:

$\frac{w\pi}{2}=n\pi\;\to\;\boxed{\lambda_n=4n^2\,,\;n=1,2,\dots}$. Para esos λ_n queda c_2 indeterminado. Así pues $\boxed{y_n=\{\operatorname{sen}2nx\}}$.

$\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[1-\cos 4nx]\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\operatorname{sen}2n\pi-\operatorname{sen}0}{8n}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$. (Todo como en el formulario).

4. **a]** Hallar la solución de la ecuación $T'+\frac{2}{t}T=3$ que satisface el dato inicial $T(1)=0$.
b] Resolver separando variables el problema no homogéneo $\begin{cases}u_t-\frac{1}{2t}u_{xx}=3\operatorname{sen}2x\,,\;x\in(0,\frac{\pi}{2})\,,\;t>1\\ u(x,1)=u(0,t)=u(\frac{\pi}{2},t)=0\end{cases}$ [2.2 puntos]

a] Lineal primer orden. $e^{\int(-2/t)\,dt}=e^{-2\ln t}=\frac{1}{t^2}$, $T(t)=\frac{C}{t^2}+\frac{1}{t^2}\int 3t^2dt=\frac{C}{t^2}+t\overset{d.i.}{\to}C=-1$, $\boxed{T(t)=t-\frac{1}{t^2}}$.

b] Haciendo $u=XT$ en la homogénea: $XT'-\frac{X''T}{2t}=0$, $\frac{X''}{X}=\frac{2tT'}{T}=-\lambda\;\to\;\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$ prob **3** [además $T'+\frac{\lambda}{2t}T=0$].

Llevamos a la EDP: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}2nx\;\to\;\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+\frac{2n^2}{t}T_n\right]\operatorname{sen}2nx=3\operatorname{sen}2x$. Y del dato inicial:

$u(x,1)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(1)\operatorname{sen}2nx=0\;\to\;T_n(1)=0\;\forall n$. Sólo es no nulo: $\begin{cases}T_1'+\frac{2}{t}T_1=3\\ T_1(1)=0\end{cases}\xrightarrow{\textbf{a]}}\boxed{u=[t-\frac{1}{t^2}]\operatorname{sen}2x}$.

[fácil de comprobar]

5. Hallar la solución general $y(x)$ de las ecuaciones: i) $y''-y=x$, ii) $x^2y''+xy'-4y=0$. [1 punto]

i) Coeficientes constantes. $\mu^2-4=0$, $\mu=\pm 2$, $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+y_p$. $y_p=Ax+B \rightarrow A=-1$, $B=0$.

Por tanto: $\boxed{y=c_1\,e^x+c_2\,e^{-x}-x}$. [La y_p se podía haber encontrado a ojo].

ii) Euler. $\mu(\mu-1)+\mu-4=0$, $\mu=\pm 2$. $\boxed{y=c_1x^2+c_2x^{-2}}$.

Elegir entre 6 y 7 :

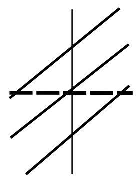
6. Sea $u_{yy}+2u_{xy}+u_{xx}-u=y$. Escribirla en forma canónica. Hallar su solución general. Hallar a partir de ella la solución que cumple los datos iniciales $u(x,0)=1$, $u_y(x,0)=0$. [1.5 puntos]

$B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}u_x=u_\xi\\ u_y=-u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $\begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}\\ u_{xy}=-u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{yy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases} \rightarrow \boxed{u_{\eta\eta}-u=\eta}$ forma canónica

Problema 5i) (con otros nombres) $\rightarrow$ $u=p(\xi)\,e^\eta+q(\xi)\,e^{-\eta}-\eta=\boxed{p(x-y)\,e^y+q(x-y)\,e^{-y}-y}$ solución general

$\rightarrow u_y(x,y)=[p(x-y)-p'(x-y)]\,e^y-[q'(x-y)+q(x-y)]\,e^{-y}-1$.

Imponiendo datos: $\begin{cases}p(x)+q(x)=1 \rightarrow p'(x)+q'(x)=0 \searrow\\ p(x)-q(x)-p'(x)-q'(x)=1, \quad p(x)-q(x)=1\end{cases} \rightarrow p(x)=1$, $q(x)=0$.

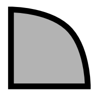


Por tanto: $\boxed{u(x,y)=e^y-y}$. Comprobamos: $u(x,0)=1-0$, $u_y(x,0)=1-1$.
Y además: $u_{yy}+2u_{xy}+u_{xx}-u=e^y+0+0-e^y+y=y$.

[Como $y=0$ no era característica, la solución debía ser única].

7. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, \ r<2, \ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ u(2,\theta)=1, \ u(r,0)=u(r,\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$. [Dibujar el recinto]. [1.5 puntos]

Haciendo $u=R\Theta$ (formulario) sale: $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(\frac{\pi}{2})=0\end{cases} \xrightarrow{\text{prob } \mathbf{3}} \lambda_n=4n^2$, $\Theta_n=\{\,\text{sen}\,2n\theta\,\}$, $n=1,2,\ldots$



Y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0 \xrightarrow{\lambda=4n^2} R=c_1r^{2n}+c_2r^{-2n} \xrightarrow{R\text{ acotado}} R_n=\{r^{2n}\}$.

Probamos $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nr^{2n}\,\text{sen}\,2n\theta$. Imponiendo el dato inicial: $u(2,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n2^{2n}\,\text{sen}\,2n\theta=1$

$\rightarrow 2^{2n}c_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\text{sen}\,2n\theta\,d\theta=\frac{2}{n\pi}[1-\cos n\pi]$, $c_n=\frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n2^{2n}}$ $[=0$ si n par$]$.

La solución es pues: $\boxed{u(r,\theta)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}\text{sen}\,2n\theta}=\frac{1}{\pi}r^2\,\text{sen}\,2\theta+\frac{1}{48\pi}r^4\cos 6\theta+\cdots$