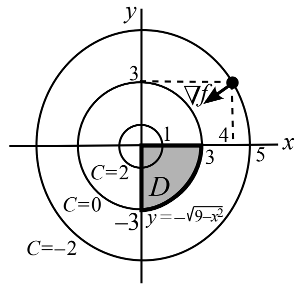
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (2 de febrero de 2016)

1. Sea $f(x,y)=3-\sqrt{x^2+y^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=2,0$ y -2 . Hallar $\nabla f(4,3)$ y la ecuación del plano tangente en $(4,3)$. Calcular $\Delta f(4,3)$ [mejor en polares].
b] Calcular $\iint_D f$, siendo D la parte del círculo $x^2+y^2\le 9$ con $x\ge 0$, $y\le 0$. [2.4 puntos]



a. $x^2+y^2=(3-C)^2$ circunferencias de radio $3-C$ [$1,3$ y 5 , si $C=2,0$ y -2].

$\nabla f=(f_x,f_y)=\left(-x(x^2+y^2)^{-1/2},-y(x^2+y^2)^{-1/2}\right)\to\nabla f(4,3)=\boxed{\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)}$.

Plano tangente: $z=-2-\frac{4}{5}(x-4)-\frac{3}{5}(y-3)$. Es decir, $\boxed{z=3-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y}$.

$f(r,\theta)=3-r\ \to\ \Delta f=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=-\frac{1}{r}\xrightarrow{r=5}\boxed{-\frac{1}{5}}=\Delta f(4,3)$.

[Más largo: $-2(x^2+y^2)^{-1/2}+x^2(x^2+y^2)^{-3/2}+y^2(x^2+y^2)^{-3/2}=-(x^2+y^2)^{-1/2}$].

b. Muchísimo mejor en polares: $\int_{-\pi/2}^{0}\int_0^3 r(3-r)\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\left[\frac{3r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^3=\boxed{\frac{9\pi}{4}}$. [Es un cuarto del volumen de un cono].

[En cartesianas aparecen integrales complicadas: $\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\left(3-\sqrt{x^2+y^2}\right)dy\,dx$].

2. Hallar la solución general de $r^2R''+rR'=-r$: i) haciendo $R'=v$, ii) viéndola como de Euler. [1.4 puntos]

i) Haciendo $R'=v\ \to\ v'=-\frac{v}{r}-\frac{1}{r}$. $e^{-\int dr/r}=e^{-\ln r}=\frac{1}{r}$. $v=\frac{C}{r}-\frac{1}{r}\int dr=\frac{C}{r}-1$, $\boxed{R=K+C\ln r-r}$.

ii) Viéndola como Euler: $\mu(\mu-1)+\mu=0$, $\mu=0$ doble. $R=c_1+c_2\ln r+R_p$. La R_p se puede hallar con la fvc:

$\begin{vmatrix}1 & \ln r\\ 0 & r^{-1}\end{vmatrix}=r^{-1}$, $R_p=-\ln r\int\frac{1\cdot r^{-1}}{r^{-1}}+1\int\frac{\ln r\cdot r^{-1}}{r^{-1}}=-r\ln r+r\ln r-r=-r$. $\boxed{R=c_1+c_2\ln r-r}$, como arriba.

O mejor, $R_p=Ar$ ($R_p=Ae^s$ en la de coeficientes constantes) $\to$ $A=-1$

3. Sea $\begin{cases}y''+2y'+\lambda y=0\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Precisar si $\lambda=-3$ es o no autovalor, dando la autofunción en el caso que lo sea. [1 punto]

Multiplicando por e^{2x} : $e^{2x}y''+2e^{2x}y'+\lambda e^{2x}y=\boxed{[e^{2x}y']'+\lambda e^{2x}y=0}$ forma autoadjunta.

Como $q\equiv 0$ y $\alpha\alpha=\beta\beta'=0$, sabemos que un $\lambda<0$ no puede ser autovalor, pero lo comprobamos:

$$\mu^2+2\mu-3=0\ \to\ \mu=1,-3\,,\ y=c_1e^x+c_2e^{-3x}\xrightarrow{cc}\begin{cases}c_1+c_2=0\,,\ c_2=-c_1 & c_2=0\\ c_1e+c_2e^{-3}=0 & c_1[\underbrace{e-e^{-3}}_{\neq 0}]=0\ \to\ c_1=0\end{cases}$$

4. Resolver $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x\\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0\end{cases}$. [Separar variables $u=XT$, hallar las X_n y las T_n , usando todos los datos $=0$, y calcular los coeficientes de una serie imponiendo el dato inicial no nulo]. [2 puntos]

$u=X(x)\,T(t)$, $\frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=-\lambda\ \to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'(\pi)=0\end{cases}\to\lambda_n=n^2$, $n=0,1,\dots$, $X_n=\{\cos nx\}$ [con $X_0=\{1\}$].

Y además $\begin{cases}T''+\lambda T=0\\ T(0)=0\end{cases}$, $\mu^2+n^2=0\ \to$ $\begin{matrix}T=c_1+c_2t\ \to\ T_0=\{t\}\\ T=c_1\cos nt+c_2\,\mathrm{sen}\,nt\to T_n=\{\mathrm{sen}\,nt\},\ n\ge 1\end{matrix}$

Satisface la EDP, $u(x,0)=0$ y las condiciones de contorno la serie: $u(x,t)=\frac{c_0}{2}t+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{sen}\,nt\cos nx$.

El dato inicial que falta nos da: $u_t(x,0)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\cos nx=x\ \to\ c_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$, y para $n\ge 1$:

$$c_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2x}{n^2\pi}\,\mathrm{sen}\,nx\Big]_0^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,nx\,dx=\frac{2}{n^3\pi}\left[(-1)^n-1\right]$$ (se anula si n par).

La solución es por tanto:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{\pi}{2}t-\frac{4}{\pi}\left[\mathrm{sen}\,t\cos x+\frac{1}{27}\mathrm{sen}\,3t\cos 3x+\cdots\right]}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\,\mathrm{sen}(2n-1)t\cos(2n-1)x\,.$$

[Esas condiciones de contorno significan que se da libertad a los extremos de la cuerda, y como esta está subiendo inicialmente, la altura de la cuerda lo hace indefinidamente].

Elegir 2 problemas entre 5 , 6 y 7 :

5. Sea el campo vectorial $\bar{f}(x,y,z)=(xy\,,x\,,-yz)$. Hallar $\operatorname{div}\bar{f}$ y $\operatorname{rot}\bar{f}$. Calcular la integral de línea de $\bar{f}$ a lo largo del camino $\bar{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t,1)$, $t\in[0,\pi]$ y la longitud de la curva descrita por $\bar{c}(t)$. [1.6 puntos]

$\operatorname{div}\bar{f}=y+0-y=\boxed{0}$. $\operatorname{rot}\bar{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ xy & x & -yz\end{vmatrix}=-z\,\mathbf{i}+0\,\mathbf{j}+(1-y)\,\mathbf{k}=\boxed{(-z,0,1-y)}$ [no deriva de un potencial].

$$\int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_0^\pi(\cos t\operatorname{sen}t,\cos t,-\operatorname{sen}t)\cdot(-\operatorname{sen}t,\cos t,0)\,dt=\int_0^\pi(\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t\cos t)\,dt$$
$$=\tfrac{\pi}{2}+\Big[\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2t-\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\Big]_0^\pi=\boxed{\tfrac{\pi}{2}}\,.$$

Como $\|\bar{c}'\|=\sqrt{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t+0}=1$, la longitud de la curva es $L=\int_0^\pi 1\,dt=\boxed{\pi}$.

6. Resolver $\begin{cases}2xu_y+u_x=4xy\\ u(1,y)=1\end{cases}$ [Hallar sus características y la ecuación para u_η (utilizando la regla de la cadena). Hallar su solución general e imponer el dato inicial]. [1.6 puntos]

$\frac{dy}{dx}=2x$. $y=x^2+C$. Características: $\boxed{y-x^2=C}$. [También válidas $x^2-y=C\,,\dots$].

Haciendo $\begin{cases}\xi=y-x^2\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=-2xu_\xi\end{cases}\to\ 2xu_\eta=4xy\,,\ u_\eta=2y=2\eta\,.\ u=p(\xi)+\eta^2=\boxed{p(y-x^2)+y^2}$.

[Más largo: $\begin{cases}\xi=y-x^2\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=-2xu_\xi+u_\eta\end{cases}\to\ u_\eta=4xy=4\xi\eta-4\eta^3\,.\ u=p^*(\xi)+2\xi\eta-\eta^3=p^*(y-x^2)+2x^2y-x^4$].

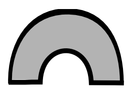
Imponiendo el dato inicial: $u(1,y)=p(y-1)+y^2=1\ \to\ p(v)=-2v-v^2$, $\boxed{u(x,y)=2x^2y-2y+2x^2-x^4}$.

[O bien, $p^*(y-1)+2y-1=1$, $p^*(v)=-2v\ \nearrow$].

Comprobamos: $u(1,y)=1$, y además: $2xu_y+u_x=2x(2x^2-2)+(4xy+4x-4x^3)=4xy$.

7. Resolver $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=-\frac{1}{r}\,,\ 1<r<3\,,0<\theta<\pi\\ u(1,\theta)=2+\cos\theta\,,\ u(3,\theta)=0\\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{cases}$ [Probar una serie con las autofunciones del homogéneo y calcular los $R_n(r)$ no nulos]. [Hacer antes el problema 2]. [1.6 puntos]

Haciendo $u=R\Theta$ (formulario) sale: $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases}\to\ \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\{\cos n\theta\}\,,\ n=0,1,\dots$



Probamos entonces $u(r,\theta)=R_0(r)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos n\theta$. Que llevada a la ecuación nos da:

$R_0''+\frac{1}{r}R_0'+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{n^2}{r^2}R_n\big]\cos n\theta=-\frac{1}{r}$. Y de los otros dos datos se obtiene:

$$u(1,\theta)=R_0(1)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos n\theta=2+\cos\theta\,,\quad u(3,\theta)=R_0(3)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(3)\cos n\theta=0\,.$$

Los únicos problemas con solución no nula son:

$\begin{cases}r^2R_0''+rR_0=-r\\ R_0(1)=2,\ R_0(3)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{prob }\mathbf{2}}R_0=c_1+c_2\ln r-r\ \xrightarrow{d.i.}\ \begin{matrix}c_1-1=2,\ c_1=3\searrow\\ c_1+c_2\ln 3-3=0,\ c_2=0\end{matrix}\ ,\ R_0(r)=3-r\,.$

$\begin{cases}r^2R_1''+rR_1'-R_1=0\\ R_1(1)=1,\ R_1(3)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{Euler}}R_2=c_1r+c_2r^{-1}\ \xrightarrow{d.i.}\ \begin{matrix}c_1+c_2=1 & c_1=-1/8\\ 3c_1+\frac{1}{3}c_2=0,\ c_2=-9c_1 & \uparrow\end{matrix}\ \to\ R_2(r)=\frac{1}{8}\big[\frac{9}{r}-r\big]\,.$

La solución es pues: $\boxed{u(r,\theta)=3-r+\frac{1}{8}\big[\frac{9}{r}-r\big]\cos\theta}$.