Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (9 de septiembre de 2016)

1. Sea $f(x,y)=\frac{y^2}{x^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0$ y 1. Hallar $\|\nabla f(-1,1)\|$ y $\Delta f(x,y)$. Hallar el vector unitario $\overline{u}$ para el que es mínima la derivada de $D_{\overline{u}}f(-1,1)$ y dar su valor en ese caso.
b] Calcular la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, con D triángulo de vértices $(-1,0)$, $(-1,1)$ y $(-2,1)$. [3 ptos]

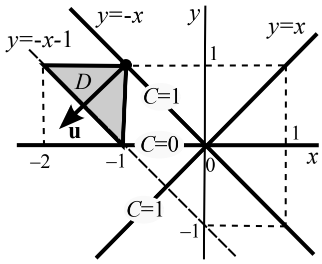
a] $f=0 \to y=0$, $f=1 \to y^2=x^2$, $y=\pm x$. $\nabla f(x,y)=\left(-2x^{-3}y^2, 2x^{-2}y\right)$.

$\|\nabla f(1,1)\|=\|(2,2)\|=2\sqrt{2}$. $\Delta f(x,y)=f_{xx}+f_{yy}=\frac{6y^2}{x^4}+\frac{2}{x^2}$.

$D_{\overline{u}}$ mínima en sentido opuesto al gradiente: $(-1,-1)\to \overline{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$D_{\overline{u}}f(-1,1)=\nabla\cdot\overline{u}=(2,2)\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boxed{-2\sqrt{2}}.$$

$\big[$Debía valer $-\|\nabla f(1,-1)\|$, pues $\overline{u}$ es unitario y es $\nabla\cdot\overline{u}=\|\nabla\|\,\|\overline{u}\|\cos\pi\,\big]$.



b] $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\int_{-x-1}^{1}\frac{y^2}{x^2}\,dy\,dx=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{3}+1+\frac{1}{x}+\frac{2}{3x^2}\right)dx=1+\left[\frac{x^2}{6}+\ln|x|-\frac{2}{3x}\right]_{-2}^{-1}=\boxed{\frac{5}{6}-\ln 2}$.

O bien: $\displaystyle\int_0^1\int_{-y-1}^{-1}\frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy=\int_0^1\frac{y^3}{y+1}\,dy=\int_0^1\left[y^2-y+1-\frac{1}{y+1}\right]dy=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2=\boxed{\frac{5}{6}-\ln 2}$.

2a. Hallar la solución $T(t)$ de la ecuación $T'=4-4T$ que satisface el dato inicial $T(0)=0$. [0.8 ptos]

La solución de la homogénea es Ce^{-4t} y la $T_p=1$ salta a la vista. La solución general es, pues, $T=Ce^{-4t}+1$.
O bien, con la fórmula de las lineales de primer orden: $T=Ce^{-4t}+e^{-4t}\int 4e^{4t}dt=Ce^{-4t}+e^{-4t}e^{4t}=Ce^{-4t}+1$.
Imponiendo el dato inicial: $T(0)=C+1=0\to C=-1$, $\boxed{T(t)=1-e^{-4t}}$.

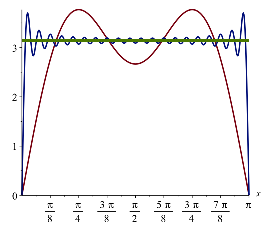
2b. Hallar los 2 primeros términos no nulos del desarrollo de $f(x)=\pi$ en las autofunciones de $\begin{cases} y''+\lambda y=0\\ y(0)=y(\pi)=0\end{cases}$.
[0.8 ptos] [usando el formulario]

El formulario nos da las autofunciones $y_n=\{\operatorname{sen} nx\}$, $n=1,2,\dots$, y la expresión para hallar los coeficientes:

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi\operatorname{sen} nx\,dx=\left[-\frac{2}{n}\cos nx\right]_0^n=2\,\frac{1-(-1)^n}{n}\quad\text{(los pares se anulan)}$$

$$\to c_1=4,\ c_2=0,\ c_3=\tfrac{4}{3},\ \dots\ \to\ \boxed{\pi=4\operatorname{sen}x+\tfrac{4}{3}\operatorname{sen}3x+\cdots}.$$

$\Big[\,\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x$ sería la expresión general, y con Maple, por ejemplo, podemos dibujar la suma de los 2 términos de arriba y de 20 términos de la serie $\to\Big]$.



2c. Sea el problema no homogéneo $\begin{cases} u_t-u_{xx}+3u=F(x),\ x\in(0,\pi),\ t>0\\ u(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$, con **a)** $F(x)=4\operatorname{sen}x$, **b)** $F(x)=\pi$.
Hallar la solución en el caso **a)** y los 2 primeros términos no nulos de la serie solución en el caso **b)**.
[Separar variables en la ecuación homogénea, probar una serie con sus autofunciones y hallar el único $T_n(t)$ no nulo para **a)** y los 2 pedidos para **b)**]. [2 ptos]

$u=X(x)T(t)$, $(T'+3T)X''=XT'$, $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+3=-\lambda\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}\to\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\dots$, $X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$.

$\big[$Y además $T'+(3+\lambda)T=0$, que aquí no se utiliza por tratarse de un problema no homogéneo$\big]$.

Llevamos la serie $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx$ a la EDP no homogénea y al dato inicial para calcular los T_n:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+n^2T_n+3T_n\right]\operatorname{sen}nx=F(x)$, función a desarrollar en $\operatorname{sen}nx$ para poder igualar las expresiones.

Además: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=0\to T_n(0)=0$ para todo n. Nos queda en cada caso:

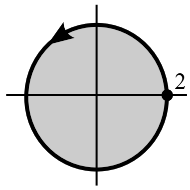
a) $T_1'+4T_1=4$, $T_1(0)=0$ (resuelta en **2.**) y los demás $T_n=0$. La solución es $\boxed{u(x,t)=\left(1-e^{-4t}\right)\operatorname{sen}x}$.

b) A la vista del desarrollo de **3.**, es no nulo el T_1 [el mismo de **a)**] y el siguiente no nulo lo da:

$\begin{cases}T_3'+12T_3=\frac{4}{3}\\ T_3(0)=0\end{cases}$. $T_3=Ce^{-12t}+\frac{1}{9}\xrightarrow{d.i.}C=-\frac{1}{9}$. Por tanto: $\boxed{u=\left(1-e^{-4t}\right)\operatorname{sen}x+\frac{1}{9}\left(1-e^{-12t}\right)\operatorname{sen}3x+\cdots}$.

Elegir 2 problmas entre 3 , 4 y 5 :

3. Sea el campo vectorial $\overline{f}(x,y)=(0,xy^2)$. ¿Deriva de un potencial? Hallar el valor de la integral de línea de $\overline{f}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=4$, recorrida en el sentido opuesto a las agujas del reloj: i) directamente, ii) utilizando el teorema de Green. [1.7 puntos]



Como $g_x-f_y=y^2\not\equiv 0$, el campo vectorial **no deriva de un potencial**.

i) La mejor forma de parametrizar la circunferencia es $\overline{c}(t)=(2\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$.

$$\to \int_{\overline{c}} \overline{f}\cdot d\overline{s} = \int_0^{2\pi}(0,8cs^2)\cdot(-2s,2c)\,dt = \int_0^{2\pi} 16\,\underbrace{s^2c^2}_{4\,\text{sen}^2 2t=2(1-\cos 4t)}\,dt = 4\pi - \Big[\tfrac{\text{sen}\,4t}{2}\Big]_0^{2\pi} = \boxed{4\pi}\,.$$

ii) Y para la integral doble de Green, lo mejor, sin duda, son las polares:

$$\iint_\circ y^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^2 r^3\,\text{sen}^2\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} 2(1-\cos 2\theta)\,d\theta = 4\pi - \big[\text{sen}\,2\theta\big]_0^{2\pi} = \boxed{4\pi}\,.$$

4. Sea la EDP de segundo orden $u_{tt}-u_{xx}=2x$, con $x,t\in\mathbf{R}$. **a]** Escribirla en forma canónica.
b] Hallar su solución que cumple $u(x,0)=u_t(x,0)=0$. [Se puede calcular sin hacer **a]** antes]. [1.7 puntos]

a] Las características de la ecuación de ondas (vistas en clase o sustituyendo en la expresión del formulario para las hiperbólicas) son:

$$\begin{cases}\xi = x+t\\ \eta = x-t\end{cases} \to \begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{tt}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases},\ -4u_{\xi\eta}=2x \xrightarrow{\xi+\eta=2x} \boxed{u_{\xi\eta}=-\tfrac{1}{4}(\xi+\eta)}\ \textbf{forma canónica}.$$

b] Para hallar la solución pedida podemos utilizar la fórmula de D'Alembert directamente:

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\int_0^t\!\!\int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]} 2s\,ds\,d\tau = \int_0^t \big[s^2\big]_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]}\,d\tau = \int_0^t 2x[t-\tau]\,d\tau = x\big[-(t-\tau)^2\big]_0^t = \boxed{xt^2}\,.$$

O bien, por ser $v=-\frac{x^3}{3}$ solución de la EDP, con $w=u-v$ se convertirá en una ecuación homogéna más fácil:

$$\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0\\ w(x,0)=x^3/3,\ w_t(x,0)=0\end{cases} \to\ w=\tfrac{1}{6}\big[(x+t)^3+(x-t)^3\big]=\tfrac{1}{3}x^3+xt^2,\ u=w+v=xt^2\,.$$

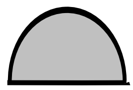
Mucho peor es calcularla a partir de la forma canónica de arriba. Resumiendo algo los cálculos:

$$u_\xi=-\tfrac{1}{4}\xi\eta-\tfrac{1}{8}\eta^2+p(\xi),\ u=-\tfrac{1}{8}\xi\eta(\xi+\eta)+p(\xi)+q(\eta)=\tfrac{1}{4}(xt^2-x^3)+p(x+t)+q(x-t),$$

$$u_t=-\tfrac{xt}{2}+p'(x+t)-q'(x-t) \xrightarrow{d.i.} \begin{cases}u(x,0)=-x^3/4+p(x)+q(x)=0\\ u_t(x,0)=p'(x)-q'(x)=0\to p(x)=q(x)\ \nearrow\end{cases} p(x)=q(x)=\tfrac{x^3}{8}\ \uparrow$$

[Lo que no tiene sentido es usar separación de variables, pues es en todo $\mathbf{R}$ y no hay condiciones de contorno].

5. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ r<2,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(2,\theta)=\text{sen}\,3\theta,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0\end{cases}$ y comprobar el resultado. [1.7 puntos]



El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la ecuación:

$$u=R\Theta\ \to \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=n^2,\ \{\text{sen}\,n\theta\},\ n=1,2,\dots$$ (otra vez el problema de contorno de **2.**).

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0 \xrightarrow{\lambda=n^2} \mu=\pm n,\ R=c_1r^2+c_2r^{-n} \xrightarrow{R\text{ acotado en }r=0} R_n=\{r^n\},\ n=1,2,\dots\,.$$

Probamos, pues, $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n r^n \text{sen}\,n\theta$, y para calcular los b_n imponemos el dato que falta:

$$u_r(2,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}b_n\,\text{sen}\,n\theta=\text{sen}\,3\theta\ \to\ 12b_3=1 \text{ y el resto } 0.\ \boxed{u(r,\theta)=\tfrac{1}{12}r^3\,\text{sen}\,3\theta}\,.$$

Comprobando: $u_r=\frac{1}{4}r^2\,\text{sen}\,3\theta$, $u_{rr}=\frac{1}{2}r\,\text{sen}\,3\theta$, $u_{\theta\theta}=-\frac{3}{4}r^2\,\text{sen}\,3\theta\ \to\ \Delta u=r\,\text{sen}\,3\theta\big[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\big]=0$,
$u_r(2,\theta)=\frac{4}{4}\,\text{sen}\,3\theta$, y es claro que se cumplen las condiciones de contorno.