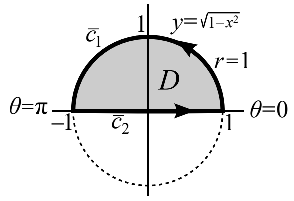
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (26 de enero de 2017)

1. Sea el semicírculo D dado por $x^2+y^2\le 1$ e $y\ge 0$ y sea $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(x^2,3xy)$. Calcular la integral doble $\iint_D 3y$ y la integral de línea de $\bar{\mathrm{f}}$ sobre la ∂D recorrida en el sentido opuesto a las agujas del reloj. ¿Debían tener el mismo valor? ¿Existe alguna $U(x,y)$ tal que $\nabla U=\bar{\mathrm{f}}$? [2 puntos]

El cálculo de la integral doble pide, sin duda, utilizar coordenadas polares:



$$\iint_D 3y\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\!\!\int_0^1 3r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta = \big[r^3\big]_0^1\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi} = \boxed{2}\,.$$

[Aunque en este caso no serían largos los cálculos en cartesianas:

$$\int_{-1}^1\!\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y\,dy\,dx = \tfrac{3}{2}\int_{-1}^1\big[1-x^2\big]\,dx \underset{\text{par}}{=} 3-\big[x^3\big]_0^1 = 2\ \big].$$

Para la semicircunferencia de una de las partes de ∂D también convienen las polares: $\bar{c}_1=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,\pi]$.

$$\int_{\bar{c}_1}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \int_0^{\pi}(c^2,3cs)\cdot(-s,c)\,dt = \int_0^{\pi}2c^2s\,dt = \tfrac{2}{3}\big[-\cos^3 t\,\big]_0^{\pi} = \tfrac{4}{3}\,.$$

[En cartesianas: $\bar{c}_1=\big(t,\sqrt{1-t^2}\,\big)$, $t\in[1,-1]$. $\int_{\bar{c}_1}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \int_1^{-1}\big(t^2,3t\sqrt{..}\big)\cdot\big(1,\frac{-t}{\sqrt{..}}\big)\,dt = \int_{-1}^1 2t^2\,dt = \frac{4}{3}$].

Para el segmento: $\bar{c}_2=(t,0)$, $t\in[-1,1]$. $\int_{\bar{c}_2}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \int_{-1}^1 (t^2,0)\cdot(1,0)\,dt = \int_{-1}^1 t^2\,dt = \frac{2}{3}$.

Por tanto, $\oint_{\partial D}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \frac{4}{3}+\frac{2}{3} = \boxed{2} = \iint_D 3y$. Debía ser así por el teorema de Greeen, ya que $g_x-f_y=3y-0$.

Como la última expresión $g_x-f_y\not\equiv 0$, el campo vectorial $\bar{\mathrm{f}}$ **no deriva de un potencial**.

[O porque la integral de línea a la largo de un camino cerrado ha resultado ser no nula].

2. Hallar la solución general de $x^2y''+xy'-y=4x^2$. [1 punto]

Es de Euler: $\mu(\mu-1)+\mu-1=0$, $\mu=\pm 1$. $y=c_1x+c_2x^{-1}+y_p$. La y_p se puede hallar con la fvc:

$$\begin{vmatrix} x & x^{-1}\\ 1 & -x^{-2}\end{vmatrix} = -2x^{-1},\ \ y_p=-x^{-1}\int\frac{x\cdot 4}{2x^{-1}}+x\int\frac{x^{-1}\cdot 4}{2x^{-1}} = -\tfrac{2}{3}x^2+2x^2=\tfrac{4}{3}x^2\,.\quad \boxed{y=c_1x+c_2x^{-1}+\tfrac{4}{3}x^2}\,.$$

O mejor, $y_p=Ax^2$ $\big(y_p=Ae^{2s}$ en la de coeficientes constantes$\big)\to 3A=4\ \nearrow$

3. Sea $y''+y'=x$. **a]** Hallar la solución general. **b]** Hallar la única que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=-1$. **c]** Estudiar si hay o no una única solución cumpliendo los datos de contorno $y'(0)=y'(1)=0$. [1.4 puntos]

a] $\mu^2+\mu=0$, $\mu=0,-1$. $y_p=Ax^2+Bx\to 2A+2Ax+B=x$, $A=\frac{1}{2}, B=-1$. $\boxed{y=c_1+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x}$ solucion general

($\mu=0$ autovalor)

b] Imponiendo datos: $\begin{cases} c_1+c_2=-1\,, & c_1=-1\\ -c_2-1=-1\,, & c_2=0^{\uparrow}\end{cases}\ \to\ \boxed{y=\frac{1}{2}x^2-x-1}$.

c] Mejor mirar el homogéneo: $y=c_1+c_2e^{-x}\xrightarrow{cc}\begin{cases}-c_2=0\\ -c_2e^{-1}=0\end{cases}$. Infinitas soluciones $y_h=\{1\}$ del homogéneo $\Rightarrow$ infinitas o ninguna del no homogéneo.

[Imponiendo los datos en la no homogénea se comprueba que el problema no tiene solución].

4. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}3x\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$.

a] Resolverlo por separación de variables. [1.6+0.4 puntos]

[Separar variables $u=XT$, hallar las X_n y las T_n, usando todos los datos $=0$, e imponer el dato inicial no nulo].

b] Resolverlo utilizando, razonadamente, la fórmula de D'Alembert.

a] $u(x,t)=X(x)\,T(t)$, $\frac{X''}{X}=\frac{T''}{4T}=-\lambda\ \to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}\to\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\dots$, $X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$.

Y además $\begin{cases}T''+4\lambda T=0\\ T(0)=0\end{cases}$, $\mu^2+4n^2=0\ \to\ T=c_1\cos 2nt+c_2\operatorname{sen}2nt\xrightarrow{d.i.} c_1=0$, $T_n=\{\operatorname{sen}2nt\}$.

Satisface la EDP, $u(x,0)=0$ y las condiciones de contorno la serie: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}2nt\operatorname{sen}nx$.

El dato inicial que falta nos da: $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}2nc_n\operatorname{sen}nx=\operatorname{sen}3x\ \to\ 6c_3=1$ y el resto de los $c_n=0$.

La solución es por tanto: $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{6}\operatorname{sen}6t\operatorname{sen}3x}$ (fácil de comprobar).

b] Como $g(x)=\operatorname{sen}3x$ es impar y de periodo 2π, su extensión $g^*(x)$ es ella misma. Y D'Alembert nos da:

$$u=\tfrac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}g^*(s)\,ds=\tfrac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\operatorname{sen}3s\,ds=-\tfrac{1}{12}\cos 3s\Big]_{x-2t}^{x+2t}=\tfrac{1}{12}\big[\underbrace{\cos(3x-6t)}_{cc+ss}-\underbrace{\cos(3x+6t)}_{cc-ss}\big]=\tfrac{1}{6}\operatorname{sen}6t\operatorname{sen}3x\,.$$

Elegir 2 problemas entre 5 , 6 y 7 :

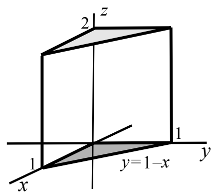
5. Para $F(x,y,z)=z\,e^{x-y}$ calcular: **a]** ∇F , $\operatorname{div}(\nabla F)$, $\operatorname{rot}(\nabla F)$. **b]** El vector unitario $\bar{u}$ para el que es máxima la derivada $D_{\bar{u}}F(1,1,2)$. **c]** $\iiint_V F$, con V sólido acotado por $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $z=0$, $z=2$. [2 puntos]

a] $\nabla F=\boxed{\left(z e^{x-y},-z e^{x-y}, e^{x-y}\right)}$. $\operatorname{div}(\nabla F)=z e^{x-y}+z e^{x-y}+0=\boxed{2z\,e^{x-y}}$. $\operatorname{rot}(\nabla F)=\boxed{\mathbf{0}}$ (lo es el rotacional de todo gradiente).

$$\left[\text{Lo comprobamos: } \operatorname{rot}(\nabla F)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ z e^{x-y} & -z e^{x-y} & e^{x-y}\end{vmatrix}=\left(-e^{\cdot\cdot}+e^{\cdot\cdot},-e^{\cdot\cdot}+e^{\cdot\cdot},-z e^{\cdot\cdot}+z e^{\cdot\cdot}\right)\right].$$

b] La derivada direccional es máxima en el sentido del gradiente:

$$\nabla F(1,1,2)=(2,-2,1)\,,\ \|\cdot\|=\sqrt{9}\ \to\ \boxed{\bar{u}=\left(\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right)}\,.$$



c] $\iiint_V F=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^2 z\,e^{x-y}\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{1-x}2\,e^{x-y}\,dy\,dx=\int_0^1 2\left(e^x-e^{2x-1}\right)dx$

$$=\left[2e^x-e^{2x-1}\right]_0^1=\boxed{e+e^{-1}-2}\,.$$

6. Sea $yu_y+xu_x=2u$. Hallar sus características y, mediante la regla de la cadena, la ecuación para u_η . Calcular su solución general y la única que satisface el dato inicial $u(x,2)=4x$. [Comprobar la solución]. [2 puntos]

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. $y=C\,e^{\int(1/x)}=Cx$. Características: $\boxed{\frac{y}{x}=C}$. $\left[\text{También válidas } \frac{x}{y}=C\,,\ \ln y-\ln x=C\,,\ \ldots\right]$.

Haciendo $\begin{cases}\xi=y/x\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=x^{-1}u_\xi+u_\eta\\ u_x=-yx^{-2}u_\xi\end{cases}\to\ yu_\eta=2u\,,\ u_\eta=\frac{2}{\eta}u\,.\ u=p(\xi)\eta^2=\boxed{p\left(\frac{y}{x}\right)y^2}\,.$

$\Big[$Casi igual: $\begin{cases}\xi=y/x\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=x^{-1}u_\xi\\ u_x=-x^{-2}u_\xi+u_\eta\end{cases}\to\ xu_\eta=2u\,.\ u_\eta=\frac{2}{\eta}u\,.\ u=p^*(\xi)\eta^2=\boxed{p^*\left(\frac{y}{x}\right)x^2}\,.$

Imponiendo el dato inicial: $u(x,2)=p\left(\frac{2}{x}\right)4=4x\ \to\ p(v)=\frac{2}{v}\,,\ u(x,y)=\frac{2x}{y}y^2=\boxed{2xy}\,.$

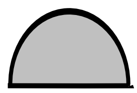
$\left[\text{O bien, } p^*\left(\frac{2}{x}\right)x^2=4x\,,\ p^*(v)=2v\nearrow\right].$

Comprobamos: $u(x,2)=4x$, y además: $yu_y+xu_x=y(2x)+x(2y)=4xy=2u$.

7. Calcular los dos primeros términos no nulos de la serie solución de $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\pi\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi\\ u(1,\theta)=u(r,0)=u(r,\pi)=0\end{cases}$.

[Probar una serie con autofunciones del homogéneo, desarrollar π en esas autofunciones y calcular dos $R_n(r)$ no nulos]. [Hacer antes **2.**]. [2 puntos]

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la ecuación:



$$u=R\Theta\ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=n^2\,,\ \{\operatorname{sen} n\theta\}\,,\ n=1,2,\ldots$$ (el mismo problema de contorno de **4.**)

Probamos entonces $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(r)\operatorname{sen} n\theta$. Que llevada a la ecuación nos da:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[R_n''+\tfrac{1}{r}R_n'-\tfrac{n^2}{r^2}R_n\right]\operatorname{sen} n\theta=\pi=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen} n\theta=4\operatorname{sen}\theta+\tfrac{4}{3}\operatorname{sen}3\theta+\cdots\,,\ \text{ya que:}$$

$$c_n=\tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi\pi\operatorname{sen} n\theta\,d\theta=\left[-\tfrac{2}{n}\cos n\theta\right]_0^n=2\tfrac{1-(-1)^n}{n}\ \text{(los pares se anulan)}\to\ c_1=4\,,\ c_2=0\,,\ c_3=\tfrac{4}{3}\,,\ \ldots$$

Del otro dato de contorno se obtiene: $u(1,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos n\theta=0\ \Rightarrow\ R_n(1)=0\ \forall n$.

La solución, además, debe estar acotada. Los dos primeros problemas con solución no nula son:

$$\begin{cases}r^2R_1''+rR_1'-R_1=4r^2\\ R_1\text{ acotada},\ R_1(1)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{prob }\mathbf{2}}R_1=c_1r+c_2r^{-1}+\tfrac{4}{3}r^2\xrightarrow{c.c.}c_2=0,\ c_1=-\tfrac{4}{3}\,,\quad R_1(r)=\tfrac{4}{3}\left(r^2-r\right).$$

$$\begin{cases}r^2R_3''+rR_3'-9R_3=\tfrac{4}{3}\\ R_3\text{ acotada},\ R_3(1)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{Euler, }R_p=Ar^2}R_3=c_1r^3+c_2r^{-3}-\tfrac{4}{15}r^2\xrightarrow{c.c.}c_2=0,\ c_1=\tfrac{4}{15}\ \to\ R_3(r)=\tfrac{4}{15}\left(r^3-r^2\right).$$

La solución es: $\boxed{u(r,\theta)=\frac{4}{3}\left(r^2-r\right)\operatorname{sen}\theta+\frac{4}{15}\left(r^3-r^2\right)\operatorname{sen}3\theta+\cdots}$.