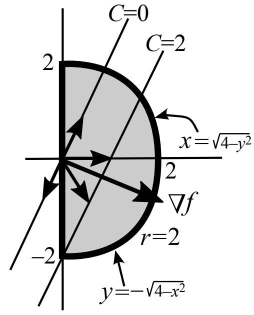
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (11 de septiembre de 2017)

Hacer los problemas 1, 2, 3 y 4. Elegir entre 5 y 6.

1. Sea $f(x,y)=2x-y$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y $f=2$, y el vector ∇f en el origen. [2.4 ptos]
Encontrar un vector unitario $\overline{u}$ para el que la derivada direccional $D_{\overline{u}}f(0,0)$ valga: i) 0, ii) 2.
b] Si D es el semicírculo dado por $x^2+y^2\le 4$, $x\ge 0$, hallar $\iint_D f\,dx\,dy$ utilizando: i) cartesianas, ii) polares.

a] $f=0 \to y=2x$, $f=1 \to y=2x-2$. $\nabla f(x,y)=(2,-1)$.



i) $D_{\overline{u}}=0$ cuando $\overline{u}\perp\nabla f$ (sobre recta de nivel): $(1,2)\to$ $\boxed{\overline{u}=\big(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\big)}$ (o $-\overline{u}$).

ii) Uno claro es $\boxed{\overline{u}=(1,0)}$, pues la parcial $f_x=2$ es la derivada según $\mathbf{i}$.

Con menos vista: $D_{\overline{u}}f(0,0)=\nabla\cdot\overline{u}=(2,-1)\cdot(a,b)=2a-b=2$ y $a^2+b^2=1$ $\to$
$a^2+4a^2-8a+4=1$, $5a^2-8a+3=0$, $a=1$ ó $\frac35$ $\to$ $b=0$ ó $-\frac45$. $\overline{u}=\big(\frac35,-\frac45\big)$ otro.

b] i) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(2x-y)\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}\big(\underbrace{4-y^2}_{\text{par}}-\underbrace{y\sqrt{4-y^2}}_{\text{impar}}\big)\,dy=16-\big[\tfrac23y^3\big]_0^2=16-\tfrac{16}{3}=\boxed{\tfrac{32}{3}}$.

O bien: $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(2x-y)\,dy\,dx=\int_0^2 4x\sqrt{4-x^2}\,dx=-\tfrac43(4-x^2)^{3/2}\big]_0^2=\boxed{\tfrac{32}{3}}$.

ii) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 r^2(2\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta=\frac83\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\underbrace{2\cos\theta}_{\text{par}}-\underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\text{impar}})\,d\theta=\frac{32}{3}\big[\operatorname{sen}\theta\big]_0^{\pi/2}=\boxed{\tfrac{32}{3}}$.

2. Sea el campo vectorial $\overline{f}(x,y,z)=\big(2e^{2x-y},-e^{2x-y},z\big)$. **a]** Calcular $\operatorname{div}\overline{f}$ y $\operatorname{rot}\overline{f}$. ¿Deriva $\overline{f}$ de un potencial?
b] Determinar el valor de la integral de línea $\int_{\overline{c}}\overline{f}\cdot d\overline{s}$, siendo $\overline{c}(t)=\big(t^2,4t,t\big)$, con $t\in[0,2]$. [1.6 ptos]

a] $\operatorname{div}\overline{f}=4e^{2x-y}+e^{2x-y}+1=\boxed{5e^{2x-y}+1}$. $\operatorname{rot}\overline{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 2e^{2x-y}&-e^{2x-y}&z\end{vmatrix}=\big(0-0,0-0,-2e^{2x-y}+2e^{2x-y}\big)=\overline{0}$.

Como además $\overline{f}\in C^1$,
$\overline{f}$ **deriva de un potencial**.

b] Para calcular la integral de línea podemos usar la definición para el camino dado:

$$\int_{\overline{c}}\overline{f}\cdot d\overline{s}=\int_0^2\big(2e^{2t^2-4t},-e^{2t^2-4t},t\big)\cdot(2t,4,1)\,dt=\int_0^2\big[(4t-4)e^{2t^2-4t}+t\big]\,dt=\big[e^{2t^2-4t}+\tfrac12t^2\big]_0^2=1-1+2=\boxed{2}.$$

O calcular la función potencial y evaluarla en los puntos final e inicial:

$U_x=2e^{2x-y}\to U=e^{2x-y}+p(y,z)$
$U_y=-e^{2x-y}\to U=e^{2x-y}+q(x,z)$ $\to$ $U=e^{2x-y}+\frac12z^2\to\int_{\overline{c}}\overline{f}\cdot d\overline{s}=U(4,8,2)-U(0,0,0)=2-0=\boxed{2}$.
$U_z=z\to U=\frac12z^2+r(x,y)$

O, como no depende del camino, hallar la integral sobre el sencillo segmento $\overline{c}_*(t)=(4t,8t,2t)$, $t\in[0,1]$:

$$\int_{\overline{c}_*}\overline{f}\cdot d\overline{s}=\int_0^1\big(2e^0,-e^0,2t\big)\cdot(4,8,2)\,dt=\int_0^1 4t\,dt=\big[2t^2\big]_0^1=\boxed{2}.$$

3. **a]** Precisar si $\lambda=-3$ y $\lambda=2$ son o no autovalores de $\begin{cases}y''+2y'+\lambda y=0\\ y(0)=y(\pi)=0\end{cases}$ y dar la autofunción cuando lo sea.
b] Hallar la solución general de $y''+2y'+\lambda y=e^{-x}$ para esos mismos $\lambda=-3$ y $\lambda=2$. [2.2 ptos]
c] ¿Para alguno de esos valores de λ hay sólo una solución de $y''+2y'+\lambda y=e^{-x}$ que cumpla $y(0)=y(\pi)=0$?

a] $\mu^2+2\mu+\lambda=0$, $\mu=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$. Si $\lambda=-3$, $\mu=1,-3\to y=c_1e^x+c_2e^{-3x}\xrightarrow{cc}\begin{cases}c_1+c_2=0\\ c_1e^{\pi}+c_2e^{-3\pi}=0\end{cases}\to c_1=c_2=0$.
No es autovalor (se sabía porque $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$).

Si $\lambda=1$, $\mu=-1\pm i\to y=(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)e^{-x}\underset{cc}{\to}\begin{cases}c_1=0\\ -c_1e^{-\pi}=0\end{cases}\forall c_2$. Autovalor con autofunción $\boxed{\{e^{-x}\operatorname{sen}x\}}$.

b] En ninguno de los dos casos $\mu=-1$ es autovalor, con lo que la y_p a probar es $y_p=Ae^{-x}$ en ambos casos:

$Ae^{-x}-2Ae^{-x}+\lambda Ae^{-x}=e^{x}$, $A=\frac{1}{\lambda-1}\to$ $\boxed{y=c_1e^x+c_2e^{-3x}-\frac14e^{-x}}$ si $\lambda=-3$.
$\boxed{y=(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)e^{-x}+e^{-x}}$ si $\lambda=2$.

c] Sólo tiene solución única cuando el homogéno tiene sólo la trivial, o sea, para $\lambda=-3$.

4. a] Escribir el desarrollo de la función $f(x)=\frac{\pi}{4}$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$.

b] Resolver $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=\frac{\pi}{4},\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=u(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Llevar una serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial y calcular las infinitas $T_n(t)$]. [2.2 ptos]

a] El formulario nos da las autofunciones $X_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\right\}$, $n=1,2,\ldots$, y la expresión para los coeficientes:

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\Big[-\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^\pi=\frac{1}{2n-1} \to \boxed{\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}}=\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3x}{2}+\cdots$$

(esos cosenos se anulan en π)

b] $u=X(x)T(t)$, $T'X=4X''T$, $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{4T}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\right\}$ de antes.

$\big[$Y además $T'+4\lambda T=0$ (en formulario, como $X''+\lambda X=0$), que no se utiliza por ser problema no homogéneo$\big]$.

Llevamos la serie $u(x,t)=\sum_{n=1}^\infty T_n(t)\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}$ a la EDP no homogénea y al dato inicial para calcular los T_n :

$$\sum_{n=1}^\infty \big[T_n'+(2n-1)^2T_n\big]\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}=\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}.\quad u(x,0)=\sum_{n=1}^\infty T_n(0)\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}=0\to T_n(0)=0\ \forall n.$$

Sólo falta resolver los problemas: $\begin{cases} T_n'+(2n-1)^2T_n=\frac{1}{2n-1} \\ T_n(0)=0 \end{cases} \underset{\bullet}{\to} T_n=Ce^{-(2n-1)^2t}+\underbrace{\frac{1}{(2n-1)^3}}_{T_p \text{ a ojo}} \xrightarrow{d.i.} C=-\frac{1}{(2n-1)^3}$.

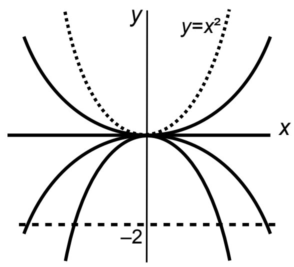
Por tanto: $\boxed{u=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n-1)^3}\big[1-e^{-(2n-1)^2t}\big]\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}}=\big(1-e^{-t}\big)\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\frac{1}{1}\big(1-e^{-9t}\big)\operatorname{sen}\frac{3x}{2}+\cdots$.

• O usando la fórmula: $T_n=Ce^{-(2n-1)^2t}+e^{-(2n-1)^2t}\int e^{(2n-1)^2t}\frac{1}{2n-1}\,dt=Ce^{-(2n-1)^2t}+\frac{1}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2t}e^{(2n-1)^2t}$.

Elegir entre 5 y 6:

5. Sea $2yu_y+xu_x=4x^2y$. Hallar sus características y, con la regla de la cadena, escribirla en las variables (ξ,η). Calcular su solución general y la única que satisface el dato inicial $u(-2,y)=3y$. [1.6 ptos]

$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}\to y=Ce^{\int(2/x)}=Ce^{2\ln x}=Cx^2$. $\begin{cases}\xi=yx^{-2}\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=x^{-2}u_\xi+u_\eta\\ u_x=-2yx^{-3}u_\xi\end{cases}\to$



$2yu_\eta=4x^2y$, $u_\eta=2x^2=\frac{2\eta}{\xi}\to u=\frac{\eta^2}{\xi}+p(\xi)$. $\boxed{u(x,y)=x^2y+p\big(\frac{y}{x^2}\big)}$ solución general

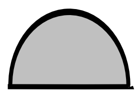
O bien $\begin{cases}\xi=yx^{-2}\\ \eta=x\end{cases}\to xu_\eta=4x^2y$, $u_\eta=4xy=4\xi\eta^3\to u=\xi\eta^4+p(\xi)=x^2y+p\big(\frac{y}{x^2}\big)$.

Imponiendo el dato: $4y+p\big(\frac{y}{4}\big)=3y$, $p\big(\frac{y}{4}\big)=-y$, $p(v)=-4v$, $\boxed{u(x,y)=x^2y-\frac{4y}{x^2}}$.

[Solución única por no ser tangente $x=-2$ a las características].

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ r<4,\ 0<\theta<\pi\\ u(4,\theta)=2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2},\ u(r,0)=u_\theta\big(r,\pi\big)=0\end{cases}$ y comprobar el resultado. [1.6 ptos]

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la ecuación:



$u=R\Theta\to\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases}$, $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$, $\Theta_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2}\right\}$, $n=1,2,\ldots$

$r^2R''+rR'-\lambda R=0\xrightarrow{\lambda=\lambda_n}\mu=\pm\frac{(2n-1)}{2}$, $R=c_1r^{(2n-1)/2}+c_2r^{-(2n-1)/2}\xrightarrow{R\text{ acotado en }r=0}R_n=\left\{r^{(2n-1)/2}\right\}$, $n=1,2,\ldots$.

Probamos, pues, $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^\infty c_n\,r^{(2n-1)/2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2}$, y para calcular los c_n imponemos el dato que falta:

$u(4,\theta)=\sum_{n=1}^\infty 4^{(2n-1)/2}c_n\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\to 4^{1/2}c_1=2$, $c_1=1$ y el resto 0. $\boxed{u(r,\theta)=r^{1/2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$.

Comprobando: $u_r=\frac{1}{2}r^{-1/2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $u_{rr}=-\frac{1}{4}r^{-3/2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $u_{\theta\theta}=-\frac{1}{4}r^{1/2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\to\Delta u=r^{-3/2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\big[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\big]=0$,

$u(4,\theta)=4^{1/2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, y es fácil comprobar las condiciones de contorno.