Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (25 de enero de 2018)

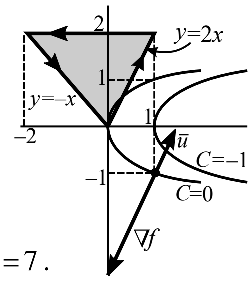
1. Sean $f(x,y)=y^2-x$ y D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(-2,2)$ y $(1,2)$.

a] Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y $f=-1$. Hallar el plano tangente en $(1,-1)$. **b]** Calcular $\iint_D f\,dx\,dy$.

Elegir entre: **c₁]** Hallar el $\overline{u}$ unitario para el que la derivada $D_{\overline{u}}f(1,-1)$ es mínima y el valor de esa derivada.

c₂] Calcular Δf en cartesianas y también utilizando coordenadas polares.

c₃] Si $\overline{f}(x,y)=\left(xy,xy^2\right)$, hallar $\oint_{\partial D}\overline{f}\cdot d\overline{s}$ haciendo uso de un teorema. [0.8+1+0.6=2.4 ptos]



a] $f=0\to x=y^2$, $f=-1\to x=y^2+1$ (parábolas). $\nabla f(x,y)=(-1,2y)$.

$f(1,-1)=0$, $\nabla f(1,-1)=(-1,-2)$. Plano: $z=-(x-1)-2(y+1)$, $\boxed{z=-x-2y-1}$.

b] $\int_0^2\int_{-y}^{y/2}(y^2-x)\,dx\,dy=\int_0^2\left[y^2\left(\frac{y}{2}+y\right)-\frac{y^2/4-y^2}{2}\right]dy=\int_0^2\left[\frac{3y^3}{2}+\frac{3y^2}{8}\right]dy=\boxed{7}$.

Peor: $\int_{-2}^{0}\int_{-x}^{2}(y^2-x)\,dy\,dx+\int_0^1\int_{2x}^{2}(y^2-x)\,dy\,dx$

$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{8+x^3}{3}-2x-x^2\right)dx+\int_0^1\left(\frac{8-8x^3}{3}-2x+2x^2\right)dx=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}+4-\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-\frac{2}{3}-1+\frac{2}{3}=7$.

c₁] $D_{\overline{u}}$ es mínima en sentido opuesto a ∇f: $(1,2)\to\boxed{\overline{u}=\left(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right)}$. $D_{\overline{u}}f(1,-1)=(-1,-2)\cdot\overline{u}=\boxed{-\sqrt5}$

(debía ser menos el módulo del gradiente).

c₂] $f_{xx}+f_{yy}=\boxed{2}$. $f(r,\theta)=r^2\text{sen}\,\theta-r\cos\theta$. $f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}=2s^2+2s^2-\frac{c}{r}+2c^2-2s^2+\frac{c}{r}=2(s^2+c^2)=2$.

c₃] Como $g_x-f_y=y^2-x$, según el teorema de Green el valor de la integral coincide con la doble de **b]**: $\boxed{7}$.

2. Sea el campo vectorial $\overline{g}(x,y,z)=\left(z,y^2,x\right)$. **a]** Calcular $\text{div}\,\overline{g}$, $\nabla(\text{div}\,\overline{g})$ y $\text{rot}\,\overline{g}$. **b]** Determinar el valor de la integral de línea $\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}$, siendo $\overline{c}(t)=(\cos t,\text{sen}\,t,-\text{sen}\,t)$, con $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. [0.6+1=1.6 ptos]

a] $\text{div}\,\overline{g}=0+2y+0=\boxed{2y}$. $\nabla(\text{div}\,\overline{g})=\boxed{(0,2,0)}$. $\text{rot}\,\overline{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ z&y^2&x\end{vmatrix}=(0-0,1-1,0-0)=\boxed{\overline{0}}$

(y $\overline{g}\in C^1\Rightarrow\overline{g}$ conservativo).

b] Para calcular la integral de línea podemos usar la definición para el camino dado:

$$\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_0^{\pi/2}(-s,s^2,c)\cdot(-s,c,-c)\,dt=\int_0^{\pi/2}\big[s^2\underbrace{-c^2+s^2}_{-\cos 2t}c\big]\,dt=\left[\tfrac13\text{sen}^3t-\tfrac12\text{sen}\,2t\right]_0^{\pi/2}=\boxed{\tfrac13}.$$

O calcular la función potencial y evaluarla en los puntos final e inicial:

$U_x=x\;\to\;U=xz+p(y,z)$

$U_y=y^2\;\to\;U=\frac13y^3+q(x,z)\;\to\;U=xz+\frac13y^3\;\to\;\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=U(0,1,-1)-U(1,0,0)=\frac13-0=\boxed{\tfrac13}$.

$U_z=z\;\to\;U=xz+r(x,y)$

O, como no depende del camino, hallar la integral sobre el sencillo segmento $\overline{c}_*(t)=(1-t,t,-t)$, $t\in[0,1]$:

$$\int_{\overline{c}_*}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_0^1(-t,t^2,t)\cdot(-1,1,-1)\,dt=\int_0^1 t^1\,dt=\left[\tfrac13t^2\right]_0^1=\boxed{\tfrac13}.$$

4. **a]** Determinar si $\lambda=0$ y $\lambda=-2$ son o no autovalores de $\begin{cases}x^2y''+\lambda y=0\\ y'(0)=y'(1)=0\end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea.

b] Precisar si hay o no una única solución de $x^2y''-2y=2$ cumpliendo esos datos de contorno. [1.4+0.2 ptos]

[Había una errata en el enunciado que hacía sutil un cálculo, por eso añadí 0.2 puntos de más en la corrección].

a] Euler con $\mu(\mu-1)-\lambda=0$. $\lambda=0\to\mu=0,1$, $y=c_1+c_2x\xrightarrow{cc}\begin{matrix}c_2=0\\ c_2=0\end{matrix}$, $\forall c_1$. Es **autovalor** con $\boxed{y_0=\{1\}}$.

$\lambda=-2\to\mu=2,-1$, $y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}$, $y'=2c_1x-\frac{c_2}{x^2}\xrightarrow{cc}\begin{matrix}c_2=0\text{ para que exista }y'(0)\\ y'(1)=2c_1-c_2=0\end{matrix}\Rightarrow c_1=c_2=0$. **No es autovalor.**

$\big[$Como la ecuación es $[y']'+\lambda\frac{1}{x^2}y=0$ en forma autoadjunta, al ser $q=\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$ sabemos que no había $\lambda<0\big]$.

b] Como el homogéneo tenía sólo la solución $y\equiv0$, sabemos que este no homogéneo tiene seguro **solución única**.

[Imponiendo los datos en la solución de la no homogénea $y=c_1x^2+c_2x^{-1}\underbrace{-1}_{\text{a ojo}}$, se vería que esa única solución es $y=-1$].

En el problema que yo tenía previsto (y cuyas soluciones ya había escrito) el dato era $y'(1)=y'(2)=0$.

Sólo cambian las condiciones de contorno para $\lambda=-2$: $\ldots\;\begin{matrix}y'(1)=2c_1-c_2=0\\ y'(2)=2c_1-\frac14c_2=0\end{matrix}\Rightarrow c_1=c_2=0\;\ldots$

3. Hallar la solución de $y''+y=x^2$ que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=0$. [1 pto]

$\mu^2+1=0$, $\mu=\pm\mathrm{i}$. $y_p=Ax^2+Bx+C \rightarrow 2A+Ax^2+Bx+C=x^2$, $A=1$, $B=0$, $C=-2$.
($\mu=0$ no autovalor)

$$y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x+x^2-2 \xrightarrow{d.i.} \begin{matrix} y(0)=c_1-2=0 \\ y'(0)=c_2=0 \end{matrix} \quad , \quad \boxed{y=2\cos x+x^2-2}\,.$$

5. Resolver $\begin{cases} u_t-2u_{xx}=\mathrm{e}^{-t}\mathrm{sen}\,x\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>0 \\ u(x,0)=\mathrm{sen}\,3x\,,\ u(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$. [Llevar una serie con las autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial y calcular los dos T_n no nulos]. [2 ptos]

$$u(x,t)=X(x)\,T(t)\,,\ \frac{X''}{X}=\frac{T'}{2T}=-\lambda \rightarrow \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n=(2n-1)^2\,,\ n=1,2,\dots\,,\ X_n=\{\mathrm{sen}(2n-1)x\}\,.$$

[Y además $T'+2\lambda T=0$ que ahora no se usa. Las ecuaciones que aparecen y las autofunciones están en el formulario].

Probamos: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\mathrm{sen}(2n-1)x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+2(2n-1)^2T_n\right]\mathrm{sen}(2n-1)x=\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sen}\,x$ (ya desarrollada).

Y del dato incial se deduce: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\mathrm{sen}(2n-1)x=\mathrm{sen}\,3x \rightarrow T_2(0)=1$ y el resto de $T_n(0)=0$.

Sólo hay que resolver: $\begin{cases} T_1'+2T_1=\mathrm{e}^{-t} \\ T_1(0)=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} T_2'+18T_2=0 \\ T_2(0)=1 \end{cases}$, pues el resto de $T_{n\geq 3}\equiv 0$ claramente.

$$T_{1p}=A\mathrm{e}^{-t} \rightarrow -A+2A=1\,,\ T_1=C\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\ \left[\text{ó } T_1=C\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-2t}\!\int\mathrm{e}^{t}\right] \xrightarrow{T_1(0)=0} T_1(t)=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

$T_2=C\mathrm{e}^{-18t} \xrightarrow{T_2(0)=1} T_2(t)=\mathrm{e}^{-18t}$. La solución es: $\boxed{u(x,t)=\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{sen}\,x+\mathrm{e}^{-18t}\,\mathrm{sen}\,3x}$.

Elegir entre 6 y 7:

6. Sea $u_y+2yu_x=3xu$. Hallar sus características y, con la regla de la cadena, escribirla en las variables (ξ,η). Calcular su solución general y la única que satisface el dato inicial $u(x,0)=2x$. [1.6 ptos]

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$. $\int 2y\,dy=\int dx+C$. Características: $\boxed{y^2-x=C}$. $\left[\text{También se podría haber puesto } x-y^2=C\,,\dots\right]$.

Haciendo $\begin{cases} \xi=y^2-x \\ \eta=y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y=2yu_\xi+u_\eta \\ u_x=-u_\xi \end{cases} \rightarrow u_\eta=3xu=(3\eta^2-3\xi)u\,,\ u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta^3-3\xi\eta}=\boxed{p(y^2-x)\,\mathrm{e}^{3xy-2y^3}}$.

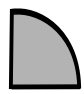
$\left[\text{Peor tomando: } \begin{cases} \xi=y^2-x \\ \eta=x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y=2yu_\xi \\ u_x=-u_\xi+u_\eta \end{cases} \rightarrow u_\eta=\frac{3x}{2y}u=\frac{3\eta}{2\sqrt{\xi+\eta}}u\text{, con la integral bastante más larga de calcular}\right]$.

Imponiendo el dato inicial: $u(x,0)=p(-x)=2x \rightarrow p(v)=-2v$, $u(x,y)=\boxed{2\left(x-y^2\right)\mathrm{e}^{3xy-2y^3}}$.

7. Escribir los dos primeros términos no nulos de la serie solución de $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(2,\theta)=\pi,\ u(r,0)=u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$.
[Obtener autovalores y autofunciones usando el formulario, precisar las R_n y determinar los c_n de una serie con un desarrollo de Fourier]. [1.6 ptos]

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la EDP:

$u=R\Theta \rightarrow \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=(2n-1)^2$, $\{\mathrm{sen}(2n-1)\theta\}$, $n=1,2,\dots$ (mismo problema de contorno de **5.**)



Y además $r^2R''+rR'-\lambda R=0 \rightarrow \mu^2=(2n-1)^2$, $R=c_1r^{2n-1}+c_2r^{1-2n}$. Como R debe ser acotada: $R_n=\left\{r^{2n-1}\right\}$.

Probamos entonces $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{2n-1}\,\mathrm{sen}(2n-1)\theta$. Sólo nos falta aplicar el último dato de contorno:

$u(2,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n2^{2n-1}\,\mathrm{sen}(2n-1)\theta=\pi$. Por tanto debe ser:

$$c_n2^{2n-1}=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\pi\,\mathrm{sen}(2n-1)\theta\,d\theta=\left[-\frac{4}{2n-1}\cos(2n-1)\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{4}{2n-1}\ \left(\text{esos cosenos se anulan en } \frac{\pi}{2}\right).$$

Los 2 primeros coeficientes son: $2c_1=4$, $c_1=2$ y $8c_2=\frac{4}{3}$, $c_1=\frac{1}{6}$.

Y los 2 primeros de la serie solución son: $\boxed{u(r,\theta)=2r\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{1}{6}r^3\,\mathrm{sen}\,3\theta+\cdots}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n-1}}{(2n-1)\,2^{2n-3}}\,\mathrm{sen}(2n-1)\theta$.