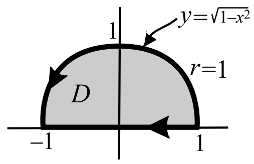
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (11 de julio de 2018)

Hacer los problemas 1, 2 y 3. Elegir dos problemas entre 4, 5 y 6.

1. Sea $\overline{\mathrm{f}}(x,y)=\big(y+3x^2,x\big)$. **a]** Calcular $\operatorname{div}\overline{\mathrm{f}}$. ¿Deriva $\overline{\mathrm{f}}$ de un potencial? **b]** Determinar el valor de la integral de línea de $\overline{\mathrm{f}}$ desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$ a lo largo de la semicircunferencia $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$. [2.2 ptos]
c] Si D es el semicírculo dado por $x^2+y^2\leq 1$, $y\geq 0$, hallar el valor de la integral doble $\iint_D \operatorname{div}\overline{\mathrm{f}}$.

a] $\operatorname{div}\overline{f}=6x+0=\boxed{6x}$. $g_x=1=f_y$ y $\overline{\mathrm{f}}\in C^1$ $\to$ **deriva de un potencial**.



b] Para calcular el valor de la integral de línea podemos calcular el potencial:

$$\begin{matrix} U_x=y+3x^2 \to U=xy+x^3+p(y) \\ U_y=x \quad\to U=xy+q(x)\end{matrix} \to U=xy+x^3,\ \int_{\overline{c}}\overline{f}\cdot d\overline{s}=U(-1,0)-U(1,0)=\boxed{-2}.$$

O podemos parametrizar la curva y calcular la integral: $\overline{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,\pi]$ $\to$

$$\int_{\overline{c}}\overline{f}\cdot d\overline{s}=\int_0^{\pi}\big(s+3c^2,c\big)\cdot(-s,c)\,dt=\int_0^{\pi}\big[\underbrace{c^2-s^2}_{\cos 2t}-3c^2s\big]\,dt=\big[\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t+\cos^3 t\big]_0^{\pi}=\boxed{-2}.$$

O, como no depende del camino, hallar la integral sobre el sencillo segmento $\overline{c}_*(x)=(x,0)$, $x\in[1,-1]$:

$$\int_{\overline{c}_*}\overline{f}\cdot d\overline{s}=\int_1^{-1}\big(3x^2,x\big)\cdot(1,0)\,dx=\int_1^{-1}3x^2\,dx=\big[x^3\big]_1^{-1}=\boxed{-2}.$$

c] Por ser $6x$ impar y el recinto D simétrico, la integral valdrá 0, pero la hallamos en cartesianas y polares:

$$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}6x\,dx\,dy=\int_0^1 0\,dx=\boxed{0} \quad \text{o} \quad \int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}6x\,dy\,dx=\int_{-1}^1\underbrace{6x\sqrt{1-x^2}}_{\text{impar}}\,dx=-2\big(1-x^2\big)^{3/2}\big]_{-1}^1=\boxed{0}.$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 6r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=2\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta=2\operatorname{sen}\theta\big]_0^{\pi}=\boxed{0}.$$

2. a] Hallar la solución general de $y''+y=2x\,\mathrm{e}^x$ y la única que satisface los datos inciales $y(0)=y'(0)=0$.
b] ¿Hay o no una única solución de la ecuación cumpliendo los datos de contorno $y(0)=y(\pi)=0$? [1.3 ptos]

a] $\mu^2+1=0$, $\mu=\pm\mathrm{i}$ $\to$ $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+y_p$. $y_p=(Ax+B)\,\mathrm{e}^x$, $y_p'=(Ax+B+A)\,\mathrm{e}^x$, $y_p''=(Ax+B+2A)\,\mathrm{e}^x$
$\to$ $(2Ax+2B+2A)\,\mathrm{e}^x=2x\,\mathrm{e}^x$ $\to$ $A=1, B=-1$. La solución general es $\boxed{y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+(x-1)\,\mathrm{e}^x}$.
De los datos iniciales: $\begin{cases}c_1-1=0\\ c_2=0\end{cases}$ $\to$ $\boxed{y=\cos x+(x-1)\,\mathrm{e}^x}$.

b] Como el problema homogéneo $y''+y=0$, $y(0)=y(\pi)=0$ tiene soluciones no triviales $\{\operatorname{sen}x\}$ (es la primera autofunción del más famoso problema de contorno) el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna, pero **no única**.
[Imponiendo los datos: $\begin{cases}c_1-1=0\\ -c_1+(\pi-1)\,\mathrm{e}^{\pi}=0\end{cases}$ $\to$ no compatible, c_1 no puede valer dos cosas distintas. No hay solución].

3. a] Escribir el desarrollo de la función $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}$.
b] Resolver $\begin{cases}u_t-u_{xx}=\operatorname{sen}x,\ x\in(0,\pi),\ t>0\\ u(x,0)=\frac{\pi}{2}-x,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial y calcular las infinitas $T_n(t)$ no nulas]. [2.5 ptos]

a] El formulario nos da las autofunciones $X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$, $n=1,2,\dots$, y la expresión para los coeficientes:

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\big(\tfrac{\pi}{2}-x\big)\operatorname{sen}nx\,dx=\Big[\frac{2x-\pi}{n\pi}\cos nx\Big]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n+1}{n}\to\boxed{\frac{\pi}{2}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}2nx}.$$

b] $u=X(x)\,T(t)$ $\to$ $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}$ $\to$ $X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$ de antes. [Y además $T'+\lambda T=0$ que ahora no usamos].

Llevamos la serie $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx$ a la EDP no homogénea y al dato inicial para calcular los T_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+n^2T_n\big]\operatorname{sen}nx=\operatorname{sen}x.\quad u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=\frac{\pi}{2}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}2nx\to \begin{matrix}T_{2n-1}(0)=0\\ T_{2n}(0)=\frac{1}{n}\end{matrix}$$

Son no nulos: $\begin{cases}T_1'+T_1=1\\ T_1(0)=0\end{cases}\to \underbrace{T_1=Ce^{-t}+1}_{T_p \text{ a ojo}}\xrightarrow{d.i.}C=-1$ y $\begin{cases}T_{2n}'+4n^2T_{2n}=0\\ T_{2n}(0)=0\end{cases}\to T_{2n}=C\mathrm{e}^{-4n^2t}\xrightarrow{d.i.}C=1$.

$$\to \boxed{u=\big(1-\mathrm{e}^{-t}\big)\operatorname{sen}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-4n^2t}\operatorname{sen}2nx}=\big(1-\mathrm{e}^{-t}\big)\operatorname{sen}x+\mathrm{e}^{-4t}\operatorname{sen}2x+\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-16t}\operatorname{sen}4x+\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-36t}\operatorname{sen}6x+\cdots$$

Elegir DOS problemas entre 4 , 5 y 6 :

4. Sea $F(x,y,z)=z\,e^{2x+y}$. **a]** Calcular: i) $\nabla F(-1,2,1)$, ii) la ecuación del plano tangente a la superficie $F=1$ en el punto $(-1,2,1)$, iii) un vector unitario $\overline{u}$ para el que la derivada direccional $D_{\overline{u}}F(-1,2,1)=0$. [2 ptos]

Elegir entre calcular: **b]** $\iiint_V F$, con V sólido acotado por $x=0$, $y=0$, $2x+y=2$, $z=0$, $z=2$.

b*] La integral de línea de F sobre el segmento que une los puntos $(1,0,0)$ y $(0,2,2)$.

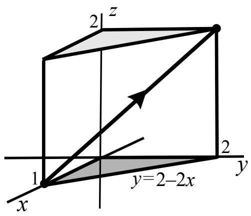
a] i) $\nabla F=\big(2z\,e^{2x+y},\ z\,e^{2x+y},\ e^{2x+y}\big)$. $\nabla F(-1,2,1)=\boxed{(2,1,1)}$.

ii) Plano tangente: $0=(2,1,1)\cdot(x+1,y-2,z-1)=2x+y+z-1$, o bien, $\boxed{z=1-2x-y}$.

[Más largo despejando $z=e^{-2x-y}$ y usando la otra fórmula para el plano].

iii) La $D_{\overline{u}}=0$ cuando $\overline{u}\perp\nabla F$. Infinitos $\overline{u}=(a,b,c)$ posibles. $\big[$Debe ser $2a+b+c=0$ y se divide por $\|\overline{u}\|$ $\big]$.

Por ejemplo, $\boxed{\overline{u}=\big(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\big)}$, $\boxed{\overline{u}=\big(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},0\big)}$, . . .



b] $\iiint_V F=\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^2 z\,e^{2x+y}\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{2-2x}2\,e^{2x+y}\,dy\,dx=\int_0^1 2\big(e^2-e^{2x}\big)\,dx=\boxed{e^2+1}$.

b*] $\overline{b}-\overline{a}=(-1,2,2)$, $\overline{c}(t)=(1-t,2t,2t)$, $t\in[0,1]$. $F(\overline{c})=2t\,e^{2-2t+2t}$, $\|\overline{c}\,'\|=\sqrt{1+4+4}=3$.

$$\int_C F\,ds=\int_0^1 2te^2 3\,dt=\boxed{3\,e^2}\,.$$

5. Sea la EDP de segundo orden $u_{tt}-4u_{xx}=4$, con $x,t\in\mathbf{R}$. **a]** Escribirla en forma canónica.
b] Hallar su solución que cumple $u(x,0)=u_t(x,0)=0$. [Se puede calcular sin hacer **a]** antes]. [2 ptos]

a] Las características de la ecuación de ondas (vistas en clase o usando el formulario) son:

$$\begin{cases}\xi=x+2t\\ \eta=x-2t\end{cases}\to\begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{tt}=4u_{\xi\xi}-8u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}\end{cases},\ -16u_{\xi\eta}=4\ \to\ \boxed{u_{\xi\eta}=-\tfrac{1}{4}}\ \ \textbf{forma canónica}.$$

b] Para hallar la solución pedida podemos utilizar la fórmula de D'Alembert directamente:

$$u(x,t)=\tfrac{1}{4}\int_0^t\int_{x-2[t-\tau]}^{x+2[t-\tau]}4\,ds\,d\tau=\int_0^t 4[t-\tau]\,d\tau=\big[-2(t-\tau)^2\big]_0^t=\boxed{2t^2}\,.$$

O bien, por ser $v=2t^2$ solución de la EDP, con $w=u-v$ se convertirá en una ecuación homogéna más fácil:

$$\begin{cases}w_{tt}-w_{xx}=0\\ w(x,0)=w_t(x,0)=0\end{cases}\ \text{(casualidad que sea tan sencilla)}\ \to\ w=0\ \to\ u=w+v=2t^2\,.$$

Mucho peor es calcularla a partir de la forma canónica de arriba. Resumiendo algo los cálculos:

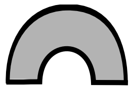
$$u_\xi=-\tfrac14\eta+p^*(\xi)\,,\ u=-\tfrac14\xi\eta+p(\xi)+q(\eta)=t^2-\tfrac14x^2+p(x+2t)+q(x-2t)\,,\ u_t=2t+2p'(x+2t)-2q'(x-2t)$$

$$\xrightarrow{d.i.}\begin{cases}u(x,0)=-x^2/4+p(x)+q(x)=0\\ u_t(x,0)=2p'(x)-2q'(x)=0\to p(x)=q(x)\end{cases}\nearrow\ p(x)=q(x)=\tfrac{x^2}{8}\ \uparrow$$

[Lo que no tiene sentido es usar separación de variables, pues es en todo $\mathbf{R}$ y no hay condiciones de contorno].

6. Resolver por separación de variables $\begin{cases}u_{rr}+\frac1r u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ 1<r<2,\ 0<\theta<\pi\\ u_r(1,\theta)=0,\ u(2,\theta)=\operatorname{sen}\theta,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0\end{cases}$. [2 ptos]

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la ecuación:



$$u=R\Theta\ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\{\operatorname{sen}n\theta\},\ n=1,2,\dots$$

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0\ \xrightarrow{\lambda=\lambda_n}\ \mu=\pm n\,,\ R=c_1r^n+c_2r^{-n}\ \xrightarrow{R'(1)=0}\ R_n=\big\{r^n+r^{-n}\big\}\,,\ n=1,2,\dots.$$

Probamos, pues, $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\big(r^n+r^{-n}\big)\operatorname{sen}n\theta$, y para calcular los c_n imponemos el dato que falta:

$$u(2,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\big(2^n+2^{-n}\big)c_n\operatorname{sen}n\theta=\operatorname{sen}\theta\ \to\ \big(2+\tfrac12\big)c_1=1\,,\ c_1=\tfrac25\ \text{y el resto }0\,.\ \ \boxed{u(r,\theta)=\tfrac25\big(r+\tfrac1r\big)\operatorname{sen}\theta}\,.$$

Comprobando: $u_r=\frac25\big(1-\frac{1}{r^2}\big)\operatorname{sen}\theta$, $u_{rr}=\frac{4}{5r^3}\operatorname{sen}\theta$, $u_{\theta\theta}=-\frac25\big(r+\frac1r\big)\operatorname{sen}\theta$, $\Delta u=\operatorname{sen}\theta\big[\frac{4}{5r^3}-\frac{2}{5r^3}-\frac{2}{5r^3}+\frac{2}{5r}-\frac{2}{5r}\big]=0$,
$u_r(1,\theta)=0$, $u(2,\theta)=\operatorname{sen}\theta$, y es claro que se cumplen las condiciones de contorno.