Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (15 de enero de 2019)

1. Sea $F(x,y,z)=\frac{y+2z}{x}$. **a]** Calcular: i) ∇F y ΔF, ii) el vector $\overline{u}$ unitario para el que es máxima la derivada direccional $D_{\overline{u}}F(1,0,1)$, iii) la ecuación del plano tangente a la superficie $F=2$ en el punto $(1,0,1)$. [1+1=2pt]

Elegir entre calcular: **b]** $\iiint_V F$, con V sólido acotado por $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $y+2z=0$.

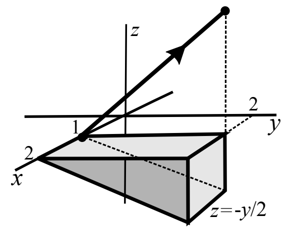
b*] La integral de línea de F sobre el segmento que une los puntos $(1,0,0)$ y $(1,2,2)$.

a] i) $\boxed{\nabla F=\left(-\frac{y+2z}{x^2},\frac{1}{x},\frac{2}{x}\right)}$. $\nabla F(1,0,1)=(-2,1,2)$. $\boxed{\Delta F=2\frac{y+2z}{x^3}}$.

ii) La $D_{\overline{u}}$ es máxima en la dirección y sentido del gradiente. $\|\nabla F\|=3$. $\boxed{\overline{u}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}$. [Y la $D_{\overline{u}}F=3$].

iii) Plano tangente: $0=(-2,1,2)\cdot(x-1,y,z-1)=-2x+2+y+2z-2$, es decir, $\boxed{z=x-\frac{1}{2}y}$.

$\big[$Claro, la superficie $F=2$ es el plano $y+2z=2x$ y su plano tangente es él mismo$\big]$.



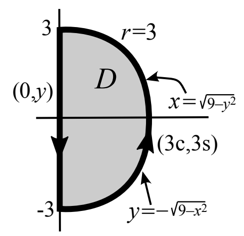
b] $\iiint_V F=\int_1^2\int_0^2\int_{-y/2}^0\frac{y+2z}{x}\,dz\,dy\,dx=\int_1^2\frac{1}{x}\int_0^2\frac{1}{4}y^2\,dy\,dx=\frac{2}{3}\int_1^2\frac{1}{x}\,dx=\boxed{\frac{2}{3}\ln 2}$.

b*] $\overline{b}-\overline{a}=(0,2,2)$, $\overline{c}(t)=(1,2t,2t)$, $t\in[0,1]$. $\overline{c}'(t)=(0,2,2)$. $F(\overline{c})=6t$. $\|\overline{c}'\|=\sqrt{8}$.

$$\int_C F\,ds=\int_0^1 12\sqrt{2}\,t\,dt=\boxed{6\sqrt{2}}.$$

2. Sea D el semicírculo dado por $x^2+y^2\leq 9$, $x\geq 0$. **a]** Calcular $\iint_D x\,dx\,dy$ usando i) polares, ii) cartesianas.

b] Si $\overline{f}(x,y)=(-xy,y)$: i) ¿Es $\overline{f}$ conservativo? ii) Hallar $\operatorname{div}\overline{f}$. iii) Hallar el valor de $\oint_{\partial D}\overline{f}\cdot d\overline{s}$. [1.2+1.1=2.3pt]



a] i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^3 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=2\big[\operatorname{sen}\theta\big]_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3=\boxed{18}$.

ii) $\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-y^2}}x\,dx\,dy=\frac{2}{2}\int_0^3\left(9-y^2\right)dy=27-\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3=\boxed{18}$.

O bien: $\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}x\,dy\,dx=\int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx=-\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3=\frac{2}{3}27=\boxed{18}$.

b] i) Como $g_x-f_y=x$ el campo **no es conservativo** (debía ser $\equiv 0$). ii) $\operatorname{div}\overline{f}=f_x+g_y=\boxed{1-y}$.

iii) Según el teorema de Green el valor de la integral de linea recorrida en sentido antihorario coincide con el valor de la integral doble calculada en **a]**: $\boxed{18}$.

Calculando la integral de línea directamente: $\overline{c}(t)=(3\cos t,3\operatorname{sen}t)$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. $\overline{c}_*(t)=(0,y)$, $y\in[3,-3]$.

$$\oint_{\partial D}\overline{f}\cdot d\overline{s}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-9cs,3s)\cdot(-3s,3c)\,dt+\int_3^{-3}(0,y)\cdot(0,1)\,dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\underbrace{27s^2c}_{\text{par}}+\underbrace{9sc}_{\text{impar}})\,dt-\int_{-3}^{3}\overset{\text{imp}}{y}\,dy=18s^3\Big]_0^{\pi/2}=18.$$

3. **a]** Hallar la solución de $y''+y'=2\,\mathrm{e}^x$ que cumple los datos iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=2$. [1+1=2pt]

b] Determinar si $\lambda=0$ y $\lambda=-2$ son o no autovalores de $\begin{cases}y''+y'+\lambda y=0\\ y'(0)=y'(1)=0\end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea.

a] $\mu^2+\mu=0$, $\mu=0,-1$. $y_p=A\,\mathrm{e}^x\to A+A=2$. $y=c_1+c_2\,\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x\xrightarrow{d.i.}\begin{matrix}y(0)=c_1+c_2+1=0\\ y'(0)=-c_2+1=2\end{matrix}$, $\boxed{y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

($\mu=1$ no autovalor)

O bien: $y'=v\to v'=-v+2\,\mathrm{e}^x$, $v=C\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\int 2\,\mathrm{e}^{2x}dx=C\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x$. $y=K-C\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x$, como antes.

b] $\mu^2+\mu+\lambda=0$. $\lambda=0$, $y=c_1+c_2\,\mathrm{e}^{-x}$, $y'=-c_2\mathrm{e}^{-x}\xrightarrow{cc}\begin{matrix}-c_2=0\\ -c_2\mathrm{e}^{-1}=0\end{matrix}$, $\forall c_1$. Es **autovalor** con $\boxed{y_0=\{1\}}$.

$\lambda=-2$, $\mu=1,-2$, $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-2x}$, $y'=c_1\mathrm{e}^x-2c_2\mathrm{e}^{-2x}\xrightarrow{cc}\begin{matrix}c_1=2c_2\searrow & c_2=0\\ c_1\mathrm{e}-2c_2\mathrm{e}^{-2}=c_1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-2})=0, & c_1=0\end{matrix}$. **No autovalor**.

$\big[$Como la ecuación en forma autoadjunta es $\left[y'\mathrm{e}^x\right]'+\lambda\mathrm{e}^x y=0$, al ser $q=\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$ sabemos que no había $\lambda<0\big]$.

4. Sea $\begin{cases} u_t - 8tu_{xx} = 0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$, con **a]** $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, **b]** $f(x)=\frac{\pi}{4}$. [2 ptos]

Hallar la solución en el caso **a]** y los 2 primeros términos no nulos de la serie solución en el caso **b]**.

[Separar variables en la EDP, obtener el problema de contorno que da las X_n y encontrar las T_n. Utilizando el dato inicial, precisar los c_n de una serie (identificando en **a]** y haciendo un desarrollo de Fourier en **b]**)].

$$u(x,t)=X(x)\,T(t)\,,\ \frac{T'}{8tT}=\frac{X''}{X}=-\lambda \ \to\ \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to\ \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}\,,\ n=1,2,\dots\,,\ X_n=\Big\{\cos\frac{(2n-1)x}{2}\Big\}\,.$$

Y además $T'=-8\lambda tT=-2(2n-1)^2tT \ \to\ T_n=\big\{e^{-(2n-1)^2t^2}\big\}$.

Probamos pues: $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-(2n-1)^2t^2}\cos\frac{(2n-1)x}{2}$, y sólo falta cumplirse $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\cos\frac{(2n-1)x}{2}=f(x)$.

Para **a]** es claramente $c_1=1$ y los otros $c_n=0$ $\to$ $\boxed{u(x,t)=e^{-t^2}\cos\frac{x}{2}}$ es la solución (fácilmente comprobable).

En el caso **b]** debemos hallar el desarrollo en serie de autofunciones de $f(x)=\frac{\pi}{4}$:

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{1}{2n-1}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,.$$ La solución es ahora la serie:

$$\boxed{u(x,t)=e^{-t^2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\,e^{-9t^2}\cos\frac{3x}{2}+\cdots}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,e^{-(2n-1)^2t^2}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,.$$

Elegir entre 5 y 6:

5. **a]** Hallar la solución general $y(x)$ de $y''+y=3$. [0.6+1.1=1.7 ptos]

b] Escribir la EDP de segundo orden $u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u=x+y$ en forma canónica y hallar su solución general.

a] $\mu^2+1=0$, $\mu=\pm i$. $y_p=3$ a ojo ($y_p=A\to A=3$). Solución general $\boxed{y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x+3}$.

b] $B^2-4AC=0$ parabólica $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=y\end{cases}\ \to\ \begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases},\ \begin{cases}u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases}\ \to\ u_{\eta\eta}+u=x+y\,,\ \boxed{u_{\eta\eta}+u=\xi}$ forma canónica

$\mu=\pm i$, $u_p=\xi$ (casi como **a]**) $\to$ $u=p(\xi)\cos\eta+q(\xi)\,\text{sen}\,\eta+\xi=\boxed{p(x+y)\cos y+q(x+y)\,\text{sen}\,y+x+y}$ solución general

6. **a]** Calcular la solución general $R(r)$ de la ecuación $r^2R''+rR'-\frac{1}{4}R=7r^3$. [0.7+1=1.7 ptos]

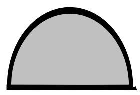
b] Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=7r\cos\frac{\theta}{2}\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=u_\theta(r,0)=u(r,\pi)=0\end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y precisar el R_n no nulo usando otros datos de contorno].

a] Euler. $\mu(\mu-1)+\mu-\frac{1}{4}=0\ \to\ \mu=\pm\frac{1}{2}$, $R=c_1r^{1/2}+c_2r^{-1/2}+R_p$. Podemos hallar la particular con la **f.v.c.**:

$$\begin{vmatrix} r^{1/2} & r^{-1/2} \\ r^{-1/2}/2 & -r^{-3/2}/2\end{vmatrix}=-\frac{1}{r},\ R_p=-r^{-1/2}\int\frac{r^{1/2}\cdot 7r}{1/r}+r^{1/2}\int\frac{r^{-1/2}\cdot 7r}{1/r}=-2r^3+\frac{14}{5}r^3\,.\ \boxed{R=c_1r^{1/2}+c_2r^{-1/2}+\frac{4}{5}r^3}\,.$$

O mejor, $R_p=Ar^3$ ($R_p=Ae^{3s}$ en la de coeficientes constantes) $\to$ $6A+3A-\frac{A}{4}=7$, $A=\frac{4}{5}$ ↗

b] El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la EDP:



$$u=R\Theta\ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta(\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4},\ \Theta_n=\Big\{\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}\Big\},\ n=1,2,\dots$$ (mismo problema de contorno de **5.**)

Llevando $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}$, a la EDP queda: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{(2n-1)^2}{4r^2}R_n\Big]\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}=7r\cos\frac{\theta}{2}$.

(ya desarrollada)

Del dato otro de contorno $u(1,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}=0$ deducimos que $R_n(1)=0\ \forall n$.

Y además las soluciones han de estar acotadas en $r=0$. Sólo será no nula la R_1, solución de:

$$\begin{cases} r^2R_1''+rR_1'-\frac{1}{4}R_1=7r^3 \\ R_1 \text{ acotada, } R_1(1)=0\end{cases}\ \underset{\textbf{a]},\,ac.}{\longrightarrow}\ R_1=c_1r^{1/2}+\frac{4}{5}r^3\ \xrightarrow{R_1(1)=0}\ c_1=-\frac{4}{5}\,.$$

La solución es, por tanto: $\boxed{u(r,\theta)=\frac{4}{5}\big[r^3-r^{1/2}\big]\cos\frac{\theta}{2}}$.