Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (26 de junio de 2019)

Hacer los problemas 1 , 2 , 3 y 4 . Elegir un problema entre 5 y 6 .

1. Sea $f(x,y)=(x+y)^2$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y $f=4$. Hallar $\nabla f(1,1)$ y Δf . Precisar el vector unitario $\overline{u}$ para el que la derivada direccional $D_{\overline{u}} f(1,1)$ es máxima y hallar el valor de esa derivada máxima. Escribir la ecuación del plano tangente a f en el punto $(1,1)$.
b] Si D es el círculo $x^2+y^2\le 2$, hallar $\iint_D f\,dx\,dy$ en polares y plantear la integral en cartesianas. [2.6 ptos]

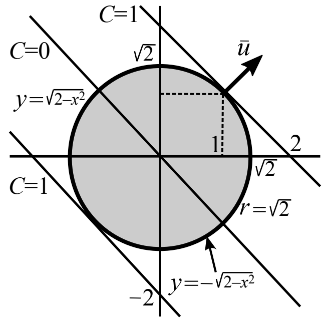
a] $f=0 \to y=-x$. $f=4 \to y=-x\pm 2$. [Rectas de pendiente -1].

$\nabla f(x,y)=(2x+2y,2x+2y)$. $\nabla f(1,1)=\boxed{(4,4)}$. $\Delta f = 2+2 = \boxed{4}$.

$D_{\overline{u}}$ máxima en sentido del ∇f ($\perp$ recta de nivel): $(1,1) \to \boxed{\overline{u}=\big(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\big)}$.

Valor máximo $\|\nabla f\|=\boxed{4\sqrt{2}}$. Comprobamos: $D_{\overline{u}} f(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot\overline{u}=\frac{8}{\sqrt{2}}$.

Plano tangente: $z=4+4(x-1)+4(y-1)$, o bien, $\boxed{z=4x+4y-4}$.



b] $f = x^2+y^2+2xy = r^2 + 2r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$ en polares.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3(1+2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\,dr\,d\theta = \Big(\frac{r^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{2}}\Big)\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\underbrace{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}_{\text{impar}})\,d\theta = \boxed{2\pi} .$$

Se complica mucho el cálculo en cartesianas:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}(\underbrace{x^2+y^2}_{\text{par}}+\underbrace{2xy}_{\text{impar}})\,dy\,dx = 2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\underbrace{\big[x^2\sqrt{2-x^2}+\tfrac{1}{3}(2-x^2)^{3/2}\big]}_{\text{par}}dx = \frac{8}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(x^2+1)\sqrt{2-x^2}\,dx = \cdots = \boxed{2\pi} .$$

2. Sea el campo vectorial $\overline{g}(x,y,z)=\big(2y\mathrm{e}^{2x},\mathrm{e}^{2x},2z\big)$. **a]** Calcular $\mathrm{div}\,\overline{g}$, $\nabla(\,\mathrm{div}\,\overline{g})$ y $\mathrm{rot}\,\overline{g}$. **b]** Hallar el valor de la integral de línea $\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}$, siendo $\overline{c}(t)$ el segmento que une $(0,0,1)$ y $(1,2,1)$ en ese sentido. [1.6 ptos]

a] $\mathrm{div}\,\overline{g}=\boxed{4y\mathrm{e}^{2x}+2}$. $\nabla(\,\mathrm{div}\,\overline{g}\,)=\boxed{\big(8y\mathrm{e}^{2x},4\mathrm{e}^{2x},0\big)}$. $\mathrm{rot}\,\overline{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2y\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & 2z\end{vmatrix}=\big(0-0,0-0,2\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{2x}\big)=\boxed{\overline{0}}$
(y $\overline{g}\in C^1 \Rightarrow \overline{g}$ conservativo).

b] Podemos usar la definición sobre el camino dado $\big[$parametrizando a ojo o usando $\overline{c}(t)=\overline{a}+t(\overline{b}-\overline{a})\big]$:

$$\overline{c}(t)=(t,2t,1),\ t\in[0,1] \ \to\ \int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_0^1\big(4t\mathrm{e}^{2t},\mathrm{e}^{2t},2\big)\cdot(1,2,0)\,dt=\int_0^1(4t+2)\,\mathrm{e}^{2t}dt=\big[2t\mathrm{e}^{2t}\big]_0^1=\boxed{2\mathrm{e}^2} .$$

O podemos calcular la función potencial y evaluarla en los puntos final e inicial:

$U_x=2y\mathrm{e}^{2x} \to U=y\mathrm{e}^{2x}+p(y,z)$
$U_y=\mathrm{e}^{2x} \to U=y\mathrm{e}^{2x}+q(x,z) \quad \to U=y\mathrm{e}^{2x}+z^2 \to \int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=U(1,2,1)-U(0,0,1)=2\mathrm{e}^2+1-1=\boxed{2\mathrm{e}^2}$.
$U_z=2z \to U=z^2+r(x,y)$

3. **a]** Hallar la solución general de $y''-y=x^2$ y la única que cumple los datos inciales $y(0)=y'(0)=0$. [1.8 ptos]
b] Estudiar si i) $\lambda=-1$ ii) $\lambda=0$ son autovalores de $\begin{cases} y''+\lambda y=0\\ y(0)+y'(0)=y(1)+y'(1)=0\end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sean.

a] $\mu^2-1=0$, $\mu=\pm1 \to y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+y_p$. $y_p=Ax^2+Bx+C$, $y_p'=2Ax+B$, $y_p''=2A \to$
$2A-Ax^2-Bx-C=x^2 \to A=-1, B=0, C=-2$. La solución general es $\boxed{y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}-x^2-2}$.

De los datos iniciales: $\begin{cases}c_1+c_2=2\\ c_1-c_2=0\end{cases} \to \boxed{y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-x^2-2}$.

b] i) $\lambda=-1$, $\mu=\pm1 \to \begin{matrix} y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}\\ y'=c_1\mathrm{e}^x-c_2\mathrm{e}^{-x}\end{matrix} \to \begin{cases} y(0)+y'(0)=2c_1=0\\ y(1)+y'(1)=2c_1\mathrm{e}=0\end{cases}$ $\forall c_2$. Es **autovalor** con $\boxed{y_-=\{\mathrm{e}^{-x}\}}$.

i) $\lambda=0$, $\mu=0$ doble $\to y=c_1+c_2x$, $y'=c_2 \to \begin{cases} y(0)+y'(0)=c_1+c_2=0\\ y(1)+y'(1)=c_1+2c_2=0\end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=0$. No es **autovalor**.

4. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 4\,\mathrm{sen}\,2x\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=2\,\mathrm{sen}\,x\,,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial y calcular las dos $T_n(t)$ no nulas]. [2 ptos]

a] $u(x,t)=X(x)\,T(t) \to XT'-X''T=0\,,\ \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\{\mathrm{sen}\,nx\}\,,\ n=1,2,\dots$.

[Y además $T'+\lambda T=0$ que ahora no se usa. Las ecuaciones que aparecen y las autofunciones están en el formulario].

Probamos en la EDP: $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\mathrm{sen}\,nx \to \sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+n^2T_n\big]\,\mathrm{sen}\,nx = 4\,\mathrm{sen}\,2x$ (ya desarrollada en senos).

Y del dato incial se deduce: $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0)\,\mathrm{sen}\,nx = 2\,\mathrm{sen}\,x \to T_1(0)=2$ y el resto de $T_n(0)=0$.

Sólo nos falta resolver: $\begin{cases} T_1'+T_1=0 \\ T_1(0)=2 \end{cases}$ y $\begin{cases} T_2'+4T_2=4 \\ T_2(0)=0 \end{cases}$, pues el resto de $T_{n\geq 3}\equiv 0$ claramente.

$T_1=C\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow{T_1(0)=2} T_1(t)=2\mathrm{e}^{-t}$. $T_{2p}=1$ (a ojo), $T_2=C\mathrm{e}^{-4t}+1$ $\big[$ó $T_2=C\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{-4t}\int 4\mathrm{e}^{4t}\big] \xrightarrow{T_2(0)=0} T_2(t)=1-\mathrm{e}^{-4t}$.

La solución es entonces: $\boxed{u(x,t)=2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sen}\,x+\big(1-\mathrm{e}^{-4t}\big)\,\mathrm{sen}\,2x}$.

Elegir entre 5 y 6:

5. Sea $2xyu_y-u_x=2xy$. Hallar sus características y, con la regla de la cadena, escribirla en las variables (ξ,η) . Calcular su solución general y la única que satisface el dato inicial $u(1,y)=0$. [2 ptos]

$\frac{dy}{dx}=-2xy$ lineal. $y=C\mathrm{e}^{-\int 2x}=C\mathrm{e}^{-x^2}$. Características: $\boxed{y\,\mathrm{e}^{x^2}=C}$.

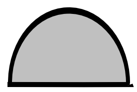
Haciendo $\begin{cases} \xi=y\,\mathrm{e}^{x^2} \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=\mathrm{e}^{x^2}u_\xi+u_\eta \\ u_x=2xy\mathrm{e}^{x^2}u_\xi \end{cases} \to 2xyu_\eta=2xy\,,\ u_\eta=1\,,\ u=\eta+p(\xi)=\boxed{y+p\big(y\,\mathrm{e}^{x^2}\big)}$.

$\Big[$Peor: $\begin{cases} \xi=y\,\mathrm{e}^{x^2} \\ \eta=x \end{cases} \to \begin{cases} u_y=\mathrm{e}^{x^2}u_\xi \\ u_x=2xy\mathrm{e}^{x^2}u_\xi+u_\eta \end{cases} \to -u_\eta=2xy\,,\ u_\eta=-2\xi\eta\mathrm{e}^{-\eta^2},\ u=\xi\mathrm{e}^{-\eta^2}+p(\xi)=y+p\big(y\,\mathrm{e}^{x^2}\big)$ como antes$\Big]$.

Imponiendo el dato inicial: $u(1,y)=y+p(\mathrm{e}y)=0 \to p(v)=-v/\mathrm{e}\,,$ $\boxed{u(x,y)=y-y\,\mathrm{e}^{x^2-1}}$.

6. Sea $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$. Resolverla por separación de variables y escribir los dos primeros término de la serie solución. [2 ptos]

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la ecuación:



$u=R\Theta \to \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0 \end{cases},\ \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\{\mathrm{sen}\,n\theta\}\,,\ n=1,2,\dots$

$r^2R''+rR'-\lambda R=0 \xrightarrow{\lambda=\lambda_n} \mu=\pm n\,,\ R=c_1r^n+c_2r^{-n} \xrightarrow{R\text{ acotada}} R_n=\big\{r^n\big\}\,,\ n=1,2,\dots$.

Probamos, pues, $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_nr^n\,\mathrm{sen}\,n\theta$, y para calcular los c_n imponemos el dato que falta:

$u_r(1,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n\mathrm{sen}\,n\theta=\frac{\theta}{2} \to nc_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,n\theta\,d\theta=-\frac{\theta}{n\pi}\cos n\theta\Big]_0^\pi+\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\cos n\theta\,d\theta=-\frac{\cos n\pi}{n}+0=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

La solución es, por tanto: $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}r^n\,\mathrm{sen}\,n\theta=\boxed{r\,\mathrm{sen}\,\theta-\frac{1}{4}r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta+\cdots}$.