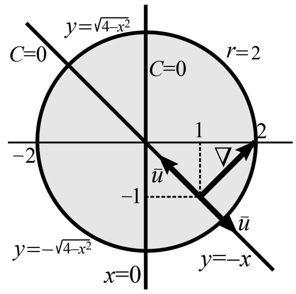
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (18 de diciembre de 2019)

1. Sea $f(x,y)=x^2+xy$. **a]** i) Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y el vector $\nabla f(1,-1)$. ii) Hallar $\operatorname{div}(\nabla f)$.
iii) Encontrar dos vectores unitarios $\bar{u}$ para los que sea la derivada direccional $D_{\bar{u}}f(1,-1)=0$. [1.1+1.1=2.2pt]
b] Si D es el círculo $x^2+y^2\le 4$, hallar $\iint_D f$ en polares y plantear y dar un paso del cálculo en cartesianas.

a] i) $f=0 \to x=0$ o $y=-x$. $\nabla f=(2x+y,x)$. $\nabla f(1,-1)=(1,1)$ $[\perp$ a $y=-x]$.

ii) $\operatorname{div}(\nabla f)=\Delta f=2+0=\boxed{2}$. iii) $D_{\bar{u}}=0$ si $\bar{u}\perp\nabla f$, o sea, $\boxed{\bar{u}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.



b] $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 r^3\big(\cos^2\theta+\underbrace{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}_{\text{impar}}\big)\,dr\,d\theta=\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\boxed{4\pi}$.

O bien $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}2x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\cdots$ (se seguiría haciendo $x=2\,\mathrm{sen}\,t$).

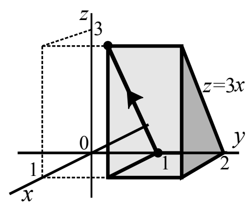
O bien $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f\,dx\,dy=\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)^{3/2}dy=\cdots$ (se seguiría haciendo $y=2\,\mathrm{sen}\,t$).

2. Sea $F(x,y,z)=\frac{z-x}{y^2}$. **a]** Hallar ∇F y la ecuación del plano tangente a la superficie $F=1$ en el punto $(0,-1,1)$.
b] Calcular $\iiint_V F$, con V sólido acotado por $x=0$, $x=1$, $y=1$, $y=2$, $z=0$, $z=3x$. [0.8+0.7+0.7=2.2pt]
c] ¿Cuánto debe valer la integral de línea de ∇F entre $(0,1,0)$ y $(1,1,3)$ sobre el segmento que une los puntos? Comprobarlo parametrizando el segmento y utilizando la definición.

a] $\boxed{\nabla F=\left(-\frac{1}{y^2},\frac{2(x-z)}{y^3},\frac{1}{y^2}\right)}$. $\nabla F(0,-1,1)=(-1,2,1)$.

Plano tangente: $0=(-1,2,1)\cdot(x,y+1,z-1)=-x+2y+2+z-1$, es decir, $\boxed{z=x-2y-1}$.

[O bien, $F=1$ es $z=x+y^2$, $\nabla=(1,2y)$, y su plano tangente en $(0,-1)$ es $z=1+x-2(y+1)^{\uparrow}$].



b] $\displaystyle\iiint_V F=\int_0^1\int_1^2\int_0^{3x}\frac{z-x}{y^2}\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_1^2\frac{3x^2}{2y^2}\,dy\,dx=\frac{1}{2}\left[x^3\right]_0^1\left[-\frac{1}{y}\right]_1^2=\boxed{\frac{1}{4}}$.

[Si no se dibuja V se debe argumentar que cuando $x\in[0,1]$ es $0\le 3x$].

c] Debe valer $\int_c \nabla F\cdot d\bar{s}=F(1,1,3)-F(0,1,0)=2-0=\boxed{2}$.

$\bar{b}-\bar{a}=(1,0,3)$, $\bar{c}(t)=(t,1,3t)$, $t\in[0,1]$. $\nabla F(\bar{c})=(-1,-4t,1)$. $\bar{c}\,'(t)=(1,0,3)$. $\int_c\nabla F\cdot d\bar{s}=\int_0^1 2\,dt=\boxed{2}$.

3. Estudiar si $\begin{matrix}\text{i) }\lambda=-3\\ \text{ii) }\lambda=2\end{matrix}$ son autovalores de $\begin{cases}y''-2y'+\lambda y=0\\ y(0)=y(\pi)=0\end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea. [1.4 ptos]

$\mu^2-2\mu+\lambda=0$. $\lambda=-3$, $\mu=-1{,}3$, $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}\xrightarrow{cc}\begin{matrix}c_1+c_2=0,\ c_2=-c_1\searrow & c_2=0\\ c_1e^{-\pi}+c_2e^{3\pi}=c_1(e^{-\pi}-e^{3\pi})=0, & c_1=0\end{matrix}$. **No autovalor**.

[La ecuación en forma autoadjunta es $\left[y'e^{-2x}\right]'+\lambda e^{-2x}y=0$. Al ser $q=\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$ sabemos que no había $\lambda<0$].

$\lambda=2$, $\mu=1\pm i$, $y=(c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x)\,e^x\xrightarrow{cc}\begin{matrix}c_1=0\\ -c_1e^{\pi}=0\end{matrix}$, $\forall c_2$. Es **autovalor** con autofunción $\boxed{\left\{e^x\,\mathrm{sen}\,x\right\}}$.

4. Sea $u_y-u_x=2(x+y)u$. Hallar sus características y, con la regla de la cadena, escribirla en las variables (ξ,η) .
Calcular su solución general y la única que satisface el dato adicional $u(x,x)=1$. [1.8 ptos]

$\frac{dy}{dx}=-1$, $\underbrace{\boxed{y+x=C}}_{\text{características}}$. $\begin{cases}\xi=y+x\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $u_\eta=2(x+y)u=2\xi u$, $u=p(\xi)\,e^{2\xi\eta}=\boxed{p(y+x)\,e^{2y^2+2xy}}$.

O bien: $\begin{cases}\xi=y+x\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}\to\ -u_\eta=2\xi u$, $u=q(\xi)\,e^{-2\xi\eta}=\boxed{q(y+x)\,e^{-2xy-2x^2}}$ (parecida).

Imponiendo el dato: $u(x,x)=p(2x)\,e^{4x^2}=1\to\ p(v)=e^{-v^2}$, $u(x,y)=e^{2y^2+2xy-y^2-2xy-x^2}=\boxed{e^{y^2-x^2}}$ [fácil de comprobar]

O bien: $u(x,x)=q(2x)\,e^{-4x^2}=1\to\ p(v)=e^{v^2}$, $u(x,y)=e^{y^2+2xy+x^2-2xy-2x^2}\nearrow$

Elegir entre 5 y 6 :

5. a] Calcular el desarollo de $f(x)=\pi x$ en las autofunciones del problema $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. [1+1.4=2.4pt]

b] Para $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=\pi x\,,\ u_x(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \end{cases}$, hallar los 2 primeros términos no nulos de su serie solución.
[Deducir el problema de contorno que da lugar a las X_n y calcular las T_n. Con el dato inicial, y viendo **a]**, hallar los primeros términos de una serie].

a] El formulario dice que $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \to \lambda_n=4n^2\,,\ n=0,1,\dots\,,\ X_n=\{\cos 2nx\}$ [siendo $X_0=\{1\}$].

$$\pi x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx \ \longrightarrow\ a_0=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\pi x\,dx=2x^2\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{2}\,.\ \text{ Y para } n>0:$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\pi x\cos 2nx\,dx=\frac{2x}{n}\operatorname{sen}2nx\Big]_0^{\pi/2}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}2nx\,dx=\frac{1}{n^2}\cos 2nx\Big]_0^{\pi/2}=\frac{(-1)^n-1}{n^2}\ \left[=0 \text{ si } n=2,4,\dots\right].$$

b] $u=X(x)\,T(t)\,,\ \frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda\,,\ X'(0)T(t)=X'\left(\frac{\pi}{2}\right)T(t)=0 \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \to \lambda_n=4n^2\,,\ X_n=\{\cos 2nx\}$ $\ n=0,1,\dots$

Y además $T'=-\lambda T=-4n^2T \ \longrightarrow\ T_n=\left\{e^{-4n^2t}\right\}$ $\left[T_0=\{1\}\right]$. [Las ecuaciones para X y T están en el formulario].

Probamos: $u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{-4n^2t}\cos 2nx$, y sólo falta cumplirse $u(x,0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx=\pi x$.

La solución es, según **a]**, la serie $\boxed{u(x,t)=\frac{\pi^2}{4}-2e^{-4t}\cos 2x-\cdots}=\frac{\pi^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2}\,e^{-4(2n-1)^2t}\cos(4n-2)x$.

6. a] Hallar la solución general de $R''+\frac{1}{r}R'=4$ (haciendo $R'=v$ o mirándola como ecuación de Euler). [1+1.4=2.4pt]

b] Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=4\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=3\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y precisar la única R_n no nula usando otros datos de contorno].

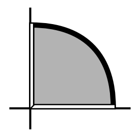
a] Con $R'=v \ \to\ v'=-\frac{v}{r}+4\,,\ e^{\int a}=e^{-\ln r}=\frac{1}{r}\,.\ v=\frac{C}{r}+\frac{1}{r}\int 4r=\frac{C}{r}+2r \ \to\ \boxed{R=K+C\ln r+r^2}$.

O bien, $r^2R''+rR'=4r^2$, $\mu(\mu-1)+\mu=0$, $\mu=0$ doble, $R=c_1+c_2\ln r+R_p$. Podemos hallar R_p con la **fvc**:

$\begin{vmatrix} 1 & \ln r \\ 0 & 1/r \end{vmatrix}=\frac{1}{r}\,,\ R_p=\ln r\int\frac{1\cdot 4}{1/r}-\int\frac{\ln r\cdot 4}{1/r}=\text{[partes]}=2r^2\ln r-2r^2\ln r+r^2=r^2\,.\ \boxed{R=c_1+c_2\ln r+r^2}$.

O mejor, $R_p=Ar^2$ ($R_p=Ae^{2s}$ en la de coeficientes constantes) $\to\ 2A+2A=4\,,\ A=1$ $\nearrow$

b] El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la EDP:



$$u=R\Theta \ \to\ \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta'(0)=\Theta'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases},\ \lambda_n=4n^2\,,\ \Theta_n=\left\{\cos 2n\theta\right\}\,,\ n=0,1,2,\dots$$ (mismo problema de contorno de **5.**)

Llevamos a la EDP, como en todo problema no homogéneo, una serie con las autofunciones del homogéno:

$$u(r,\theta)=R_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos 2n\theta \ \to\ R_0''+\frac{1}{r}R_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\left[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{4n^2}{r^2}R_n\right]\cos 2n\theta=4 \ \text{(ya desarrollada).}$$

Del dato otro de contorno $u(1,\theta)=R_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos 2n\theta=3$ sale que $R_0(1)=3$ y las otras $R_n(1)=0$.

Y además las soluciones han de estar acotadas en $r=0$. Sólo será no nula la R_0, solución de:

$$\begin{cases} R_0''+\frac{1}{r}R_0'=4 \\ R_0 \text{ acotada, } R_0(1)=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{a], } ac.} R_0=K+r^2 \xrightarrow{R_0(1)=3} K=2\,.$$

Así pues, la solución única (muy fácil de comprobar) es: $\boxed{u(r,\theta)=2+r^2}$.