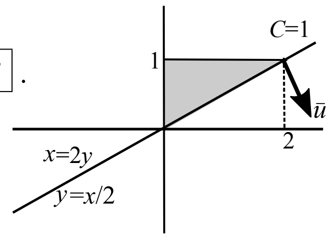
Examen de Métodos Matemáticos (4 de septiembre de 2020)

Hacer los problemas 1 y 3. Elegir entre 2a y 2b. Elegir entre 4a y 4b.

1. Sea $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-2y}$. **a]** Dibujar la curva de nivel $f=1$. Hallar $\nabla f(2,1)$ y Δf. Precisar el vector unitario $\overline{u}$ para el que es máxima la derivada direccional $D_{\overline{u}}f(2,1)$ y hallar el valor de esa derivada máxima.
b] Calcular $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(2,1)$. [1.7+1.5=3.2 ptos]

a] $f=1 \to x=2y$. $\left[\text{O bien } y=\frac{x}{2}\right]$. [Recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que pasa por el origen].



$\nabla f(x,y)=\left(\mathrm{e}^{x-2y},-2\mathrm{e}^{x-2y}\right)$. $\nabla f(2,1)=\boxed{(1,-2)}$. $\Delta f=\mathrm{e}^{x-2y}+4\mathrm{e}^{x-2y}=\boxed{5\mathrm{e}^{x-2y}}$.

$D_{\overline{u}}$ máxima en sentido del ∇f ($\perp$ recta de nivel): $(1,-2)\to \boxed{\overline{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$.

Valor máximo $\|\nabla f\|=\boxed{\sqrt{5}}$. Comprobamos: $D_{\overline{u}}f(2,1)=\nabla f(2,1)\cdot\overline{u}=\frac{5}{\sqrt{5}}$.

b] Claramente pide hacerlo directamente en cartesianas. Es sólo algo más corto:

$$\int_0^1\int_0^{2y}\mathrm{e}^{x-2y}dx\,dy=\int_0^1\left[1-\mathrm{e}^{-2y}\right]dy=1+\tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2y}\right]_0^1=\boxed{\tfrac{1}{2}\left[1+\mathrm{e}^{-2}\right]}.$$

Y un poquito más largo: $\displaystyle\int_0^2\int_{x/2}^1\mathrm{e}^{x-2y}\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left[1-\mathrm{e}^{x-2}\right]dx=1-\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x-2}\right]_0^2=\boxed{\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{e}^{-2}\right]}$.

Elegir entre 2a y 2b:

2a. Sea $\overline{g}(x,y,z)=(z,x,y)$. Calcular $\operatorname{div}\overline{g}$ y $\operatorname{rot}\overline{g}$. ¿Es $\overline{g}$ conservativo? [1.6 ptos]
Si $\overline{c}(t)=(2,\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[-\pi,\pi]$, hallar el valor de la integral de línea $\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}$.

$\operatorname{div}\overline{g}=0+0+0=\boxed{0}$. $\operatorname{rot}\overline{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ z&x&y\end{vmatrix}=(1-0,1-0,1-0)=\boxed{(1,1,1)\neq\overline{0}}$. No es conservativo.

b] Al no ser conservativo se debe usar la definición:

$$\overline{g}\big(\overline{c}(t)\big)=(\operatorname{sen} t,2,\cos t),\quad \overline{c}\,'(t)=(0,-\operatorname{sen} t,\cos t),$$

$$\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_{-\pi}^{\pi}(s,2,c)\cdot(0,-s,c)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\big(\underbrace{c^2}_{1/2+\cos 2t/2}-2s\big)\,dt=\pi+\left[\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}2t+2\cos t\right]_{-\pi}^{\pi}=\boxed{\pi}.$$

2b. Precisar si i) $\lambda=0$ ii) $\lambda=\frac{1}{4}$ son o no autovalores de $\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)-2y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea. [1.6 ptos]

i) $\lambda=0 \to y=c_1+c_2x$, $y'=c_2 \to \begin{cases}y(0)=c_1=0\searrow\\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)-2y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=c_2\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=0\to c_2=0\end{cases}$. **No es autovalor**.

ii) $\lambda=\frac{1}{4}$, $\mu=\pm\frac{\mathrm{i}}{2}$, $\begin{matrix}y=c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\\ y'=-\frac{c_1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\frac{c_2}{2}\cos\frac{x}{2}\end{matrix}\to\begin{cases}y(0)=c_1=0\searrow\\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)-2y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=c_2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)=c_2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=c_2\cdot 0=0\end{cases}\ \forall c_2$.

Es **autovalor** con autofunción asociada $\boxed{y_1=\left\{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right\}}$.

3. a] Calcular la solución de $T''+T=2e^{-t}$ que cumple $T(0)=1$, $T'(0)=0$. [1.5+1.7=3.2 ptos]

b] Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2e^{-t}\operatorname{sen}x\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}x,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y a los datos iniciales y calcular la única $T_n(t)$ no nula].

a] $\mu=\pm i$. $T_p=Ae^{-t} \to A+A=2\,,\ A=1 \to T=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen}t+e^{-t}$. $\begin{matrix} c_1+1=1\,,\ c_1=0 \\ c_2-1=0\,,\ c_2=1 \end{matrix}$. $\boxed{T=e^{-t}+\operatorname{sen}t}$.

b] $u(x,t)=X(x)\,T(t) \xrightarrow{\text{formulario}} X''+\lambda X=0$, y de los datos de contorno $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\{\operatorname{sen}nx\}\,,\ n=1,2,\dots$

Probamos en la EDP: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx \to \sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''+n^2T_n\right]\operatorname{sen}nx=2e^{-t}\operatorname{sen}x$ (ya desarrollada en senos).

De los datos inciales sale: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=\operatorname{sen}x$ (ya desarrollada), $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\operatorname{sen}nx=0$

$\to T_1(0)=1\,,\ T_1'(0)=0$ y para $n>1$ se deduce que $T_n(0)=T_n'(0)=0$.

Debemos resolver $\begin{cases} T_1'+T_1=2e^{-t} \\ T_1(0)=1,\ T_1'(0)=1 \end{cases}$ (ya hecho en **a]**), pues claramente el resto de $T_{n\geq 1}\equiv 0$.

La solución (fácil de comprobar) es entonces: $\boxed{u(x,t)=\left(e^{-t}+\operatorname{sen}t\right)\operatorname{sen}x}$.

Elegir entre 4a y 4b:

4a. Sea $u_y+u_x=-u$. Hallar su solución general y la única que satisface el dato inicial $u(x,0)=e^x$. [2 ptos]

$\frac{dy}{dx}=1\,,\ \underset{\text{características}}{\boxed{y-x=C}}$. $\begin{cases} \xi=y-x \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=u_\xi+u_\eta \\ u_x=-u_\xi \end{cases},\ u_\eta=-u\,,\ u=p(\xi)\,e^{-\eta}=\boxed{p(y-x)\,e^{-y}}$.

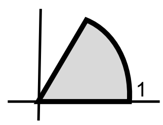
O bien: $\begin{cases} \xi=y-x \\ \eta=x \end{cases} \to \begin{cases} u_y=u_\xi \\ u_x=-u_\xi+u_\eta \end{cases} \to u_\eta=-u\,,\ u=q(\xi)\,e^{-\eta}=\boxed{q(y-x)\,e^{-x}}$ (parecida).

Imponiendo el dato: $u(x,x)=p(-x)=e^x \to p(v)=e^{-v},\ u(x,y)=e^{-y+x-y}=\boxed{e^{x-2y}}$ [Fácil de comprobar].

O bien: $u(x,0)=q(-x)\,e^{-x}=e^x \to q(v)=e^{-2v}\,,\ u(x,0)=e^{2x-x-2y}\uparrow$ [La f del problema **1.**].

4b. Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{3} \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}3\theta\,,\ u(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{3}\right)=0 \end{cases}$ por separación de variables. [2 ptos]

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la ecuación:



$u=R\Theta \to \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi/3)=0 \end{cases},\ \lambda_n=9n^2\,,\ \Theta_n=\{\operatorname{sen}3n\theta\}\,,\ n=1,2,\dots$

$r^2R''+rR'-\lambda R=0 \xrightarrow{\lambda=\lambda_n} \mu=\pm 3n\,,\ R=c_1r^{3n}+c_2r^{-3n} \xrightarrow{R\text{ acotada}} R_n=\left\{r^{3n}\right\},\ n=1,2,\dots$.

Probamos, pues, $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{3n}\operatorname{sen}3n\theta$, y para calcular los c_n imponemos el dato que falta:

$u(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}3n\theta=\operatorname{sen}3\theta \to c_1=1$ y el resto de $c_n=0$ (sin necesidad de calcular ninguna integral).

La solución es, por tanto: $\boxed{u(r,\theta)=r^3\operatorname{sen}3\theta}$ [También fácil de comprobar].