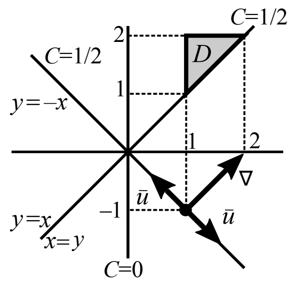
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (20 de diciembre de 2021)

1. Sea $f(x,y)=\frac{x^2}{2y^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y $f=\frac{1}{2}$ y el $\nabla f(1,-1)$. Dar un vector unitario $\bar{u}$ para el que la derivada direccional $D_{\bar{u}}f(1,-1)=0$. Hallar su plano tangente en $(1,-1)$.
b] Calcular $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D el triángulo de vértices $(1,1)$, $(1,2)$ y $(2,2)$. [1.5+1.2=2.7 ptos]



a] $f=0\to x=0$. $f=\frac{1}{2}\to y^2=x^2,\ y=\pm x$ [rectas de pendiente ±1 pasando por el origen].

$\nabla f(x,y)=\left(\frac{x}{y^2},-\frac{x^2}{y^3}\right)$. $\nabla f(1,-1)=\boxed{(1,1)}$ [perpendicular a $y=-x$ y apunta hacia donde crece].

$D_{\bar{u}}=0$ si $\bar{u}\perp\nabla f$: $(\pm1,\mp1)\to\boxed{\bar{u}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ (siguiendo recta de nivel).

Plano tangente: $z=\frac{1}{2}+1(x-1)+1(y+1)$, es decir, $\boxed{z=\frac{1}{2}+x+y}$.

b] Claramente pide hacerlo en cartesianas. O bien con este orden de integración:

$$\int_1^2\!\int_x^2 \frac{x^2}{2y^2}\,dy\,dx=\int_1^2\frac{x^2}{2}\Big[-\frac{1}{y}\Big]_x^2dx=\int_1^2\Big[\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}\Big]dx=\frac{1}{4}\Big[x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_1^2=\frac{1}{4}\Big[4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}\Big]=\boxed{\frac{1}{6}}.$$

O bien con este: $$\int_1^2\!\int_1^y \frac{x^2}{2y^2}\,dx\,dy=\int_1^2\frac{1}{6y^2}\big[x^3\big]_1^y dy=\frac{1}{6}\int_1^2\Big[y-\frac{1}{y^2}\Big]dy=\frac{1}{6}\Big[\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}\Big]_1^2=\frac{1}{6}\Big[2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\Big]=\boxed{\frac{1}{6}}.$$

2. Precisar si i) $\lambda=-1$ ii) $\lambda=0$ son autovalores de $\begin{cases}x^2y''+xy'+\lambda y=0\\ y(1)=5y(2)-6y'(2)=0\end{cases}$, dando la autofunción si lo es. [1 pto]
($\ln 2=0.693\ldots$)

$\mu^2+\lambda=0$. i) $\lambda=-1$, $\mu=\pm1$, $\begin{matrix}y=c_1x+c_2x^{-1}\\ y'=c_1-c_2x^{-2}\end{matrix}\ \xrightarrow{cc}\ \left.\begin{matrix}c_1+c_2=0\\ 4c_1+4c_2=0\end{matrix}\right\}$ $c_2=-c_1$. **Autovalor** con autofunción $\boxed{\left\{x-\frac{1}{x}\right\}}$.

ii) $\lambda=0$, $\mu=0$ doble, $\begin{matrix}y=c_1+c_2\ln x\\ y'=c_2x^{-1}\end{matrix}\ \xrightarrow{cc}\ \begin{matrix}c_1=0\searrow\\ c_2(5\ln2-3)=0\to c_2=0\ \left(\ln2\neq\frac{3}{5}\right).\end{matrix}$ **No es autovalor**.

3. a] Hallar la solución $T(t)$ de $T''+4T=4$ que cumple $T(0)=T'(0)=0$. [0.8+0.7+1.2=2.7 ptos]
b] Calcular el desarollo de $f(x)=\pi$ en las autofunciones del problema $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$.
c] Para $\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=\pi,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0\end{cases}$, hallar el primer término no nulo de su serie solución.
[Llevar serie con autofunciones del homogéneo a la EDP y a los datos iniciales y calcular la primera $T_n(t)$ no nula].

a] $\mu=\pm2\mathrm{i}$, $T_p=1$ a ojo $\to T=c_1\cos2t+c_2\operatorname{sen}2t+1\xrightarrow{d.i.}c_1=-1,\ c_2=0$. $\boxed{T=1-\cos2t}$.

b] El formulario da $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}\to\lambda_n=(2n-1)^2,\ n=1,2,\ldots,\ X_n=\{\cos(2n-1)x\}$.

$$\pi=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(2n-1)x\to c_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\pi\cos(2n-1)x\,dx=\frac{4}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x\Big]_0^{\pi/2}=\frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1}\quad\Big[4,-\frac{4}{3},\frac{4}{5},\ldots\Big].$$

c] Las autofunciones del homogéno $\left(X'(0)T(t)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)T(t)=0\text{ y formulario}\right)$ las da $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$.

Probamos pues $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos(2n-1)x$, que llevamos a la EDP y a los datos iniciales.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n''+4(2n-1)^2T_n\big]\cos(2n-1)x=\pi\overset{\mathbf{b]}}{=}4\cos x-\frac{4}{3}\cos3x+\frac{4}{5}\cos5x-\cdots$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos(2n-1)x=0,\quad u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\cos(2n-1)x=0.\quad T_n(0)=T_n'(0)=0,\ \forall n.$$

Es ya no nula la T_1 dada por: $\begin{cases}T_1''+4T_1=4\\ T_1(0)=T_1'(0)=0\end{cases}$ que es lo resuelto en **a]**.

La solución es, por tanto, la serie que empieza por $\boxed{u(x,t)=(1-\cos2t)\cos x+\cdots}$.

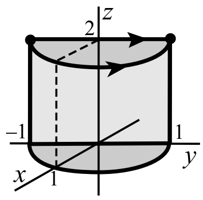
Elegir DOS problemas entre 5 y 6 :

4. Sea $\overline{g}(x,y,z)=\big(3x^2,z,y\big)$. **a]** Calcular $\operatorname{div}\overline{g}$ y $\operatorname{rot}\overline{g}$. [0.6+1.2=1.8 ptos]

Elegir b] o b*]:
b] Calcular $\iiint_V \operatorname{div}\overline{g}$, siendo V el medio cilindro dado por $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $0\le z\le 2$.
b*] Si $\overline{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,2)$, $t\in\big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]$, hallar el valor de la integral de línea $\int_{\overline{c}} \overline{g}\cdot d\overline{s}$.

a] $\operatorname{div}\overline{g}=6x+0+0=\boxed{6x}$. $\operatorname{rot}\overline{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 3x^2&z&y\end{vmatrix}=\big(1-1\,,0-0\,,0-0\big)=\boxed{\overline{0}}$ y además es C^1 . Es conservativo.

b] El volumen aconseja las cilíndricas ($x=r\cos\theta$ y el jacobiano es r):



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1\int_0^2 6r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta=\Big[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\Big]\Big[\int_0^1 12r^2dr\Big]=\big[\operatorname{sen}\theta\big]_{-\pi/2}^{\pi/2}\big[4r^3\big]_0^1=\boxed{8}\,.$$

Aunque en este caso sale también fácil en cartesianas:

$$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^2 6x\,dz\,dy\,dx=24\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=8\big[-\big(1-x^2\big)^{3/2}\big]_0^1=\boxed{8}\,.$$

O bien $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^2 6x\,dz\,dx\,dy=\int_{-1}^1\big[6x^2\big]_0^{\sqrt{1-y^2}}dy=\int_{-1}^1\big[6-6y^2\big]dy=12-2\big[y^3\big]_{-1}^1=\boxed{8}$.

b*] Se puede usar la definición. $\overline{g}\big(\overline{c}(t)\big)=\big(3\cos^2 t,2,\operatorname{sen} t\big)$, $\overline{c}\,'(t)=(-\operatorname{sen} t,\cos t,0)$,

$$\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(3c^2,2,s)\cdot(-s,c,0)\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(2c-\underbrace{3c^2s}_{\text{impar}}\big)\,dt=\big[2\operatorname{sen} t+\cos^3 t\big]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\boxed{4}\,.$$

O hallar el potencial y evaluarlo en el punto final e inicial:

$$\begin{array}{l} U_x=3x^2\;\rightarrow\;U=x^3+p(y,z)\\ U_y=z\;\rightarrow\;U=yz+q(x,z)\\ U_z=y\;\rightarrow\;U=yz+r(x,y)\end{array}\;\rightarrow\;U=x^3+yz\;\rightarrow\;\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=U(0,1,2)-U(0,-1,2)=2-(-2)=\boxed{4}\,.$$

O ir por el camino más sencillo: $\overline{c}\,'(y)=(0,y,2)$, $x\in[-1,1]$. $\int_{-1}^1(0,2,y)\cdot(0,1,0)\,dx=\int_{-1}^1 2\,dx=\boxed{4}$.

5. Sea $2u_y-3u_x=6(x-2y)u$. Hallar sus características y escribirla en las variables (ξ,η) utilizando la regla de la cadena. Calcular su solución general y la única que satisface el dato inicial $u(x,0)=\mathrm{e}^{-x^2}$. [1.8 ptos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}$, $\boxed{2x+3y=C}$ características. $\left\{\begin{array}{l}\xi=2x+3y\\ \eta=y\end{array}\right.\underset{x=(\xi-3\eta)/2}{\longrightarrow}\left\{\begin{array}{l}u_y=3u_\xi+u_\eta\\ u_x=2u_\xi\end{array}\right.$, $u_\eta=3(x-2y)u=\frac{3}{2}(\xi-7\eta)u$,

$$u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{3(2\xi\eta-7\eta^2)/4}=\boxed{p(3y+2x)\,\mathrm{e}^{3xy-\frac{3}{4}y^2}}\,.$$

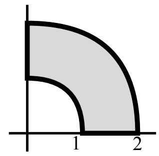
O bien: $\left\{\begin{array}{l}\xi=2x+3y\\ \eta=x\end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l}u_y=3u_\xi\\ u_x=2u_\xi+u_\eta\end{array}\right.$, $u_\eta=\frac{2}{3}(2\xi-7\eta)u$, $u=q(\xi)\,\mathrm{e}^{(4\xi\eta-7\eta^2)/3}=\boxed{q(3y+2x)\,\mathrm{e}^{4xy+\frac{1}{3}x^2}}$ (parecida).

Imponiendo el dato: $u(x,0)=p(2x)=\mathrm{e}^{-x^2}\rightarrow p(v)=\mathrm{e}^{-v^2/4}$, $u(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{9}{4}y^2-3xy-x^2+3xy-\frac{3}{4}y^2}=\boxed{\mathrm{e}^{-x^2-3y^2}}$.

O bien: $u(x,0)=q(2x)\,\mathrm{e}^{x^2/3}=\mathrm{e}^{-x^2}$, $p(v)=\mathrm{e}^{-v^2/3}$, $u(x,y)=\mathrm{e}^{-3y^2-4xy-\frac{4}{3}x^2+4xy+\frac{1}{3}x^2}\nearrow$ [fácil de comprobar]

6. Resolver $\left\{\begin{array}{l}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\;1<r<2\,,\;0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ u(1,\theta)=0\,,u(2,\theta)=3\cos\theta\,,\;u_\theta(r,0)=u\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0\end{array}\right.$ y comprobar la solución. [1.8 ptos]

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la ecuación:



$u=R\Theta\;\rightarrow\;\left\{\begin{array}{l}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta(\pi/2)=0\end{array}\right.$, $\lambda_n=(2n-1)^2$, $\Theta_n=\{\cos(2n-1)\theta\}$, $n=1,2,\ldots$

$r^2R''+rR'-\lambda R=0\;\xrightarrow{\lambda=\lambda_n}\;\mu=\pm(2n-1)$, $R=c_1r^{2n-1}+c_2r^{1-2n}\;\xrightarrow{R(1)=0}\;c_2=-c_1$, $n=1,2,\ldots$

Probamos $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\big(r^{2n-1}-r^{1-2n}\big)\cos(2n-1)\theta$, y para calcular los c_n imponemos el dato que falta:

$$u(2,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\big(2^{2n-1}-2^{-2n+1}\big)\cos(2n-1)\theta=3\cos\theta\;\rightarrow\;\big(2-\tfrac{1}{2}\big)c_1=3\,,\;c_1=2\;\text{ y el resto de }\;c_n=0\,.$$

La solución es: $\boxed{u(r,\theta)=2\big(r-\frac{1}{r}\big)\cos\theta}$ $\quad u_r=(2+2r^{-2})c$, $u_{rr}=-4r^{-3}c$, $u_\theta=2(r^{-1}-r)s$, $u_{\theta\theta}=2(r^{-1}-r)c$.
$-4r^{-3}c+2r^{-1}c+2r^{-3}c+2r^{-3}c-2r^{-1}s=0$ y también se cumplen las c.c.