Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (27 de enero de 2021)

1. Sean $\overline{g}(x,y,z)=\left(\mathrm{e}^{2y+z}, 2x\mathrm{e}^{2y+z}, x\mathrm{e}^{2y+z}\right)$. **a]** Calcular $\operatorname{div}\overline{g}$ y $\operatorname{rot}\overline{g}$. [1.8 ptos]

Elegir **b]** o **b***:
b] Hallar el valor de $\int_{\overline{c}} \overline{g}\cdot d\overline{s}$ sobre el segmento que une $(0,1,-2)$ y $(2,0,0)$ en ese sentido.
b*] Dibujar el sólido V limitado por $x=0$, $x=2$, $y=1$, $z=0$, $z=-2y$ y calcular $\iiint_V \operatorname{div}\overline{g}$.

a] $\operatorname{div}\overline{g}=0+4x\mathrm{e}^{2y+z}+x\mathrm{e}^{2y+z}=\boxed{5x\mathrm{e}^{2y+z}}$. $\operatorname{rot}\overline{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \mathrm{e}^{2y+z} & 2x\mathrm{e}^{2y+z} & x\mathrm{e}^{2y+z}\end{vmatrix}=\left(2x\mathrm{e}^{\cdot\cdot}-2x\mathrm{e}^{\cdot\cdot}, \mathrm{e}^{\cdot\cdot}-\mathrm{e}^{\cdot\cdot}, 2\mathrm{e}^{\cdot\cdot}-2\mathrm{e}^{\cdot\cdot}\right)=\boxed{\overline{0}}$.

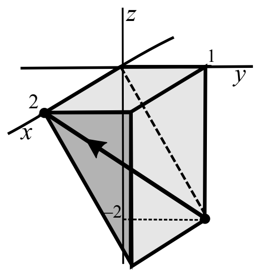
b] Como $\overline{g}$ es conservativo (es $\overline{g}\in C^1$ y su rotacional es cero), se puede calcular a partir del potencial:

$$\begin{aligned} &U_x=\mathrm{e}^{2y+z} \;\to\; U=x\mathrm{e}^{2y+z}+p(y,z)\\ &U_y=2x\mathrm{e}^{2y+z} \;\to\; U=x\mathrm{e}^{2y+z}+q(x,z) \;\to\; U=x\,\mathrm{e}^{2y+z} \;\to\; \int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=U(2,0,0)-U(0,1,-2)=2\mathrm{e}^0-0=\boxed{2}.\\ &U_z=x\mathrm{e}^{2y+z} \;\to\; U=x\mathrm{e}^{2y+z}+r(x,y)\end{aligned}$$

O podemos parametrizar el segmento y usar la definición:

$\overline{c}(t)=(0,1,-2)+t(2,-1,2)=(2t,1-t,2t-2)$, $t\in[0,1]$. $\overline{c}\,'(t)=(2,-1,2)$.

$\overline{g}\left(\overline{c}(t)\right)=(1,4t,2t)$. $\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_0^1(2-4t+4t)\,dt=\int_0^1 2\,dt=\boxed{2}$.



b*] $\iiint_V \operatorname{div}\overline{g}=\int_0^2\int_0^1\int_{-2y}^0 5x\,\mathrm{e}^{2y+z}\,dz\,dy\,dx=5\int_0^2 x\,dx\int_0^1\left[\mathrm{e}^{2y}-1\right]dy$

$=10\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}-1\right]=\boxed{5\left(\mathrm{e}^2-3\right)}$.

2. Sea $f(x,y)=\frac{2y^2}{x^2+y^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0$ y $f=1$. [2.3 ptos]

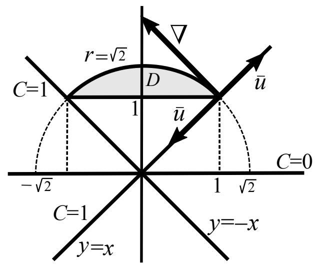
Elegir **b]** o **b***:
b] Dar un $\overline{u}$ unitario para el que sea la derivada direccional $D_{\overline{u}}f(1,1)=0$.
b*] Calcular $\Delta f(1,1)$ (bastante más corto trabajando en polares).

c] Hallar $\iint_D f$ en polares, siendo D parte del círculo $x^2+y^2\le 2$ con $y\ge 1$ (poner r en función de θ en $y=1$).

a] $f=0\to y=0$. $f=1\to y^2=x^2$, $y=\pm x$.

b] Como sobre $y=x$ es $f=1$ constante, será $D_{\overline{u}}f=0$ si $\boxed{\overline{u}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

O largo: $\nabla f=\left(-\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$. $\nabla f(1,1)=(-1,1)$. $\overline{u}\perp\nabla f$ ↗



b*] En polares es $f=\frac{2r^2\mathrm{sen}^2\theta}{r^2}=2\,\mathrm{sen}^2\theta$. $\Delta f=\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=\frac{4\cos 2\theta}{r^2}\xrightarrow{\theta=\pi/4}\boxed{0}$.

$\big[$En cartesianas bastante más largo: $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\cdots=\frac{4(x^2-y^2)^{\uparrow}}{(x^2+y^2)^2}\big]$.

c] $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta=1\to\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{1/\mathrm{sen}\,\theta}^{\sqrt{2}}2\overset{J}{r}\,\mathrm{sen}^2\theta\,dr\,d\theta=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\big[\underbrace{2\,\mathrm{sen}^2\theta-1}_{-\cos 2\theta}\big]\,d\theta=-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2\theta\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\boxed{1}$.

3. **a]** Calcular la solución de $T'=-4tT+\mathrm{e}^{-2t^2}$ que cumple $T(0)=0$. [0.8+1.5=2.3pt]

b] Resolver por separación de variables el problema no homogéneo $\begin{cases}u_t-tu_{xx}=\mathrm{e}^{-2t^2}\mathrm{sen}\,2x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t>0\\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0\end{cases}$.

[Separar variables en el homogéneo y escribir el problema de contorno que da sus autofunciones X_n. Llevar una serie a la EDP y al dato inicial y encontrar la $T_n\neq 0$].

a] $\mathrm{e}^{\int 4t}=\mathrm{e}^{-2t^2}$. $T=C\,\mathrm{e}^{-2t^2}+\mathrm{e}^{-2t^2}\int\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{e}^{-2t^2}dt=C\,\mathrm{e}^{-2t^2}+t\,\mathrm{e}^{-2t^2}\xrightarrow{di}C=0$, $\boxed{T(t)=t\,\mathrm{e}^{-2t^2}}$.

b] $u=XT$, $\frac{T'}{tT}=\frac{X''}{X}=-\lambda$, $X(0)T(t)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)T(t)=0\to\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}\to\lambda_n=4n^2,\ X_n=\{\mathrm{sen}\,2nx\}$, $n=1,2,\ldots$

[Y además $T'=-\lambda tT$ que no se usa ahora].

Llevamos una $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\mathrm{sen}\,2nx$ al dato inicial: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\mathrm{sen}\,2nx=0\Rightarrow T_n(0)\ \forall n$.

Y ahora a la EDP: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''+4n^2tT_n\right]\mathrm{sen}\,2nx=\mathrm{e}^{-2t^2}\mathrm{sen}\,2x\to T_1''+4tT_1=\mathrm{e}^{-2t^2}$ y $T_n''+4n^2tT_n=0$ si $n>1$.

La única T_n no nula es T_1 que, según **a]**, nos da esta solución: $\boxed{u(x,t)=t\,\mathrm{e}^{-2t^2}\mathrm{sen}\,2x}$.

Elegir entre 4 y 4* :

4. **a]** Hallar la solución de $y''+\frac{1}{4}y=e^{x/2}$ que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=2$. [1.8 ptos]

b] Estudiar si $\begin{matrix} \text{i) } \lambda=0 \\ \text{ii) } \lambda=\frac{1}{4} \end{matrix}$ son o no autovalores de $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-\pi)=y(\pi)=0 \end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea.

a] $\mu^2+\frac{1}{4}=0$, $\mu=\pm\frac{i}{2}$, $y=c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}+y_p$. $y_p=Ae^{x/2}$, $y_p''=A\frac{1}{4}e^{x/2} \to A\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1$, $A=2$.

Solución general $y=c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}+2e^{x/2} \xrightarrow{d.i.} \begin{matrix} c_1+2=2,\ c_1=0 \\ \frac{1}{2}c_2+1=2,\ c_2=2 \end{matrix}$. $\boxed{y=2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}+2e^{x/2}}$.

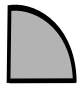
b] $\lambda=0$, $y=c_1+c_2x \xrightarrow{c.c.} \begin{matrix} c_1-c_2\pi=0,\ c_1=c_2\pi\downarrow & c_1=0 \\ c_1+c_2\pi=0 & 4c_2\pi=0,\ c_2=0\uparrow \end{matrix}$. **No es autovalor**.

$\lambda=\frac{1}{4}$, $y=c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2} \xrightarrow{c.c.} \begin{matrix} -c_2=0 \\ c_2=0 \end{matrix}$, $\forall c_1$. Es **autovalor** con autofunción $\boxed{\left\{\cos\frac{x}{2}\right\}}$.

4*. Hallar un término de la serie solución de $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=\cos\theta,\ u(r,0)=u\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$. [1.8 ptos]

[Hallar las Θ_n y las R_n, imponer a una serie el último dato, escribir las integrales que dan los coeficientes y calcular sólo la de $n=1$].

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la EDP:



$u=R\Theta \to \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=4n^2$, $\Theta_n=\{\mathrm{sen}\,2n\theta\}$, $n=1,2,\ldots$ (mismo problema de contorno de **3.**)

Y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0 \xrightarrow{\lambda=\lambda_n} \mu=\pm 2n$, $R=c_1r^{2n}+c_2r^{-2n} \xrightarrow{R\text{ acotada}} R_n=\{r^{2n}\}$, $n=1,2,\ldots$

Probamos, pues, la serie $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{2n}\,\mathrm{sen}\,2n\theta \to u(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,2n\theta=\cos\theta$.

Por tanto $b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{sen}\,2nx\,dx$. Y para $n=1$, $b_1=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x\,dx=-\frac{8}{3\pi}\cos^3 x\Big]_0^{\pi/2}=\frac{8}{3\pi}$.

La solución empieza entonces por $\boxed{u(r,\theta)=\frac{8}{3\pi}r^2\sin 2\theta+\cdots}$.

Elegir entre 5 y 5* :

5. Sea $yu_y-xu_x=xy^2$. Hallar sus características y, con la regla de la cadena, escribirla en las variables (ξ,η). Calcular su solución general y la única que satisface el dato inicial $u(x,2)=0$. [1.8 ptos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, $y=Ce^{-\ln x}=\frac{C}{x}$, $\underset{\text{características}}{\boxed{xy=C}}$. $\begin{cases} \xi=xy \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=xu_\xi+u_\eta \\ u_x=yu_\xi \end{cases}$, $u_\eta=xy=\xi$, $u=p(\xi)+\xi\eta=\boxed{p(xy)+xy^2}$.

Peor: $\begin{cases} \xi=xy \\ \eta=x \end{cases} \to \begin{cases} u_y=xu_\xi \\ u_x=yu_\xi+u_\eta \end{cases} \to u_\eta=-y^2=-\frac{\xi^2}{\eta^2}$, $u=p(\xi)+\frac{\xi^2}{\eta}=p(xy)+xy^2$ (la misma).

Imponiendo el dato: $u(x,2)=p(2x)+4x=0 \to p(v)=-2v$, $u(x,y)=xy^2-2xy=\boxed{xy(y-2)}$ [fácil de comprobar]

5*. Sea $u_{yy}-4u_{xy}+4u_{xx}=2x+4y$. Escribirla en forma canónica y hallar su solución general. [1.8 ptos]

$B^2-4AC=0$ parabólica $\begin{cases} \xi=x+2y \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=2u_\xi+u_\eta \\ u_x=u_\xi \end{cases}$, $\begin{cases} u_{yy}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{xy}=2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta} \\ u_{xx}=u_{\xi\xi} \end{cases} \to u_{\eta\eta}=2x+4y$, $\boxed{u_{\eta\eta}=2\xi}$ forma canónica

Basta integrar: $u_\eta=2\xi\eta+p(\xi)$, $u=\xi\eta^2+\eta p(\xi)+q(\xi)$. $\boxed{u(x,y)=(x+2y)y^2+yp(x+2y)+q(x+2y)}$ solución general