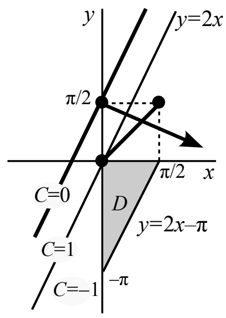
Soluciones del examen de Métodos Matemáticos (9 de julio de 2021)

1. Sea $f(x,y)=\cos(y-2x)$. **a]** Hallar $\nabla f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y dibujarlo junto con la curva de nivel que pasa por $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
Escribir la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
b] Si D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,-\pi)$ y $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, calcular $\iint_D f\,dx\,dy$.
c] Calcular $\int_C f\,ds$ siendo C el segmento que une $(0,0)$ y $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. [1+1+1=3 pts]



a] $\nabla f(x,y)=\big(2\,\mathrm{sen}(y-2x),-\mathrm{sen}(y-2x)\big)$. $\nabla f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{(2,-1)}$.

$f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f=0 \to y-2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ [rectas paralelas]. $y=2x+\frac{\pi}{2}$ la del punto.

Plano tangente: $z=0+2(x-0)-\left(y-\frac{\pi}{2}\right)$, $\boxed{z=2x-y+\frac{\pi}{2}}$.

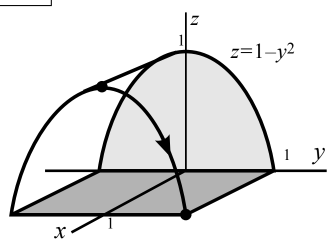
b] Pide cartesianas: $\int_0^{\pi/2}\int_{2x-\pi}^{0} f\,dy\,dx=\int_0^{\pi/2}-\mathrm{sen}\,2x\,dx=\frac{1}{2}\big[\cos\pi-\cos 0\big]=\boxed{-1}$.

O bien: $\int_{-\pi}^{0}\int_0^{(y+\pi)/2} f\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{sen}\,y\,dy=-\frac{1}{2}\big[\cos y\big]_{-\pi}^{0}=\boxed{-1}$.

c] C se puede dar con $\overline{c}(x)=(x,x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. $\|\overline{c}'\|=\|(1,1)\|=\sqrt{2}$. $\int_C f\,ds=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos(-x)}_{=\cos x}dx=\boxed{\sqrt{2}}$.

2. Sea $\overline{g}(x,y,z)=\left(3x^2-y^2,-2xy,-xz\right)$. **a]** Calcular $\mathrm{div}\,\overline{g}$ y $\mathrm{rot}\,\overline{g}$. [0.5+1=1.5 pts]
Elegir entre **b]** y **b*]**:
b] Dibujar el sólido V acotado por $x=0$, $x=1$, $z=0$ y $z=1-y^2$, y calcular $\iiint_V \mathrm{div}\,\overline{g}$.
b*] Calcular la integral de línea $\int_{\overline{c}} \overline{g}\cdot d\overline{s}$, para $\overline{c}(t)=\left(1,t,1-t^2\right)$, $t\in[0,1]$.

$\mathrm{div}\,\overline{g}=6x-2x-x=\boxed{3x}$. $\mathrm{rot}\,\overline{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 3x^2-y^2&-2xy&-xz\end{vmatrix}=\big(0-0\,,0+z\,,-2y+2y\big)=\boxed{(0,z,0)}$. No es conservativo.



b] $\iiint_V \mathrm{div}\,\overline{g}=\int_0^1\int_{-1}^1\int_0^{1-y^2}3x\,dz\,dy\,dx=\int_0^1 2x\,dx\int_0^1\big[3-3y^2\big]\,dy=3-1=\boxed{2}$.

b*] Se debe usar la definición: $\overline{g}\big(\overline{c}(t)\big)=\left(3-t^2,-2t,t^2-1\right)$, $\overline{c}'(t)=(0,1,-2t)$,

$\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_0^1\left(0-2t-2t^3+2t\right)dt=-\int_0^1 2t^3\,dt=\boxed{-\frac{1}{2}}$.

3. Calcular la solución general de $r^2R''+rR'-R=5$, haciendo uso de la fórmula de variación de las constantes.
[La R_p que debe salir se podría haber visto a ojo]. [0.7 pts]

Euler. $\mu(\mu-1)+\mu-1=\mu^2-1=0$, $\mu=\pm1 \to R=c_1r+c_2r^{-1}+R_p$. Se ve que debe salir $R_p=-5$.

$|W|=\begin{vmatrix}r&r^{-1}\\1&-r^{-2}\end{vmatrix}=-2r^{-1}$. $R_p=-r^{-1}\int\frac{r\,(5/r^2)}{2r^{-1}}dr+r\int\frac{r^{-1}(5/r^2)}{2r^{-1}}dr=-\frac{5}{2}+\frac{5r}{2}\int\frac{dr}{r^2}=-5$. $\boxed{R=c_1r+c_2r^{-1}-5}$.

4. Precisar si i) $\lambda=-2$ ii) $\lambda=\frac{1}{4}$ son o no autovalores de $\begin{cases}y''-y'+\lambda y=0\\ y'(-2)=y(0)=0\end{cases}$, dando la autofunción cuando lo sea. [1.3 pts]

$\mu=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$. i) $\lambda=-2 \to y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$, $y'=2c_1e^{2x}-c_2e^{-x} \to \begin{cases}y'(-2)=2c_1e^{-4}-c_2e=0 & c_1\left[2e^{-4}+1\right]=0\\ y(0)=c_1+c_2=0 \to c_2=-c_1 & c_1=c_2=0\end{cases}$.

No es autovalor. $\big[$Se podía decir escribiendo $\left(e^{-x}y'\right)'+\lambda e^{-x}=0$ y observando que $\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0\big]$.

ii) $\lambda=\frac{1}{4}$, $\mu=\frac{1}{2}$ doble, $\begin{matrix}y=(c_1+c_2x)\,e^{x/2}\\ y'=\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}x+c_2\right)e^{x/2}\end{matrix} \to \begin{cases}y'(-2)=c_1/2e=0\\ y(0)=c_1=0\end{cases}$, $c_1=0$ y $\forall c_2$.

Es, por tanto, **autovalor** con autofunción asociada $\boxed{\left\{x\,e^{x/2}\right\}}$.

5. Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$, con **a]** $f(x)=\cos 2x$, **b]** $f(x)=2x$. [2 pts]

Hallar la solución en el caso **a]** y el primer término no nulo de la serie solución en el caso **b]**.

[Separar variables en la EDP, obtener el problema de contorno que da las X_n y calcular las T_n . Utilizando el dato inicial, precisar los c_n pedidos de una serie (identificando en **a]** e iniciando un desarrollo de Fourier en **b]**)].

$u=XT,\ \frac{T'}{T}+2t=\frac{X''}{X}=-\lambda\,,\ X'(0)T(t)=X'(\pi)T(t)=0 \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases} \to\ \lambda_n=n^2,\ X_n=\{\cos nx\}\,,\ n=0,1,\dots$

Además $T'=-(n^2+2t)T\ \to\ T_n=\{e^{-n^2t-t^2}\}$. En particular son $X_0=\{1\}$ y $T_0=\{e^{-t^2}\}$. Probamos, pues:

$$u(x,t)=\frac{c_0}{2}\,e^{-t^2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2t-t^2}\cos nx\,,\ \text{a la que sólo le falta cumplir}\ \ u(x,0)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx=f(x)\,.$$

Para **a]** es claro que $c_2=1$ y el resto 0 . La solución (fácil de comprobar) es entonces: $\boxed{u(x,t)=e^{-4t-t^2}\cos 2x}$.

Para **b]** debemos desarrollar, aunque sólo se pide el primer término. Basta pues calcular una integral:

$$c_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx=2\pi\,,\ \dots\ \text{La solución ahora es}\ \boxed{u(x,t)=\pi\, e^{-t^2}+\cdots}$$

[Los demás términos se hallarían haciendo la integral (por partes) $c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos nx\,dx$].

Elegir entre 6 y 6* :

6. Hallar la solución general de $2u_y+u_x=-u+e^{y-2x}$, y la única que cumple el dato inicial $u(0,y)=0$. [1.5 pts]

$\frac{dy}{dx}=2\,,\ \boxed{y-2x=C}$. $\begin{cases} \xi=y-2x \\ \eta=x \end{cases} \to \begin{cases} u_y=u_\xi \\ u_x=-2u_\xi+u_\eta \end{cases}$, $u_\eta=-u+e^{y-2x}=-u+e^{\xi}$ (u_p constante se puede ver a ojo)

características $\qquad \to\ u=p(\xi)\,e^{-\eta}+e^{\xi}=\boxed{p(y-2x)\,e^{-x}+e^{y-2x}}$.

O bien: $\begin{cases} \xi=y-2x \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=u_\xi+u_\eta \\ u_x=-2u_\xi \end{cases}$, $2u_\eta=-u+e^{\xi}$, $u=q(\xi)\,e^{-\eta/2}+e^{\xi}=\boxed{q(y-2x)\,e^{-y/2}+e^{y-2x}}$ (parecida).

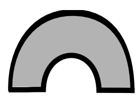
Con el dato: $u(0,y)=p(y)+e^{y}=0\,,\ p(v)=-e^{v},\ u(x,y)=e^{y-2x}-e^{y-2x-x}=\boxed{e^{y-2x}-e^{y-3x}}$ [fácil de comprobar].

O bien: $u(0,y)=q(y)e^{-y/2}+e^{y}=0\ \to\ q(v)=-e^{3v/2}\,,\ u(x,y)=e^{y-2x}-e^{3y/2-3x-y/2}\uparrow$

6*. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\frac{5}{r^2}\,\text{sen}\,\theta\,,\ 1<r<2\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=u(2,\theta)=u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{cases}$. [1.5 pts]

[Llevar serie con las autofunciones del homogéneo a la EDP y a los otros datos y hallar la R_n no nula, con ayuda del problema **3.**].

El formulario nos dice que: $u=R\Theta\ \to\ \begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0 \end{cases}$, $\lambda_n=n^2$, $\Theta_n=\{\text{sen}\,n\theta\}$, $n=1,2,\dots$



Se lleva $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\,\text{sen}\,n\theta$ a la EDP: $\sum_{n=1}^{\infty}\big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{n^2}{r^2}R_n\big]\,\text{sen}\,n\theta=\frac{5}{r^2}\,\text{sen}\,\theta$ (desarrollada).

De los dos primeros datos de contorno sale: $\sum_{n=1}^{\infty} R_n'(1)\,\text{sen}\,n\theta=\sum_{n=1}^{\infty} R_n(2)\,\text{sen}\,n\theta=0\ \Rightarrow\ R_n'(1)=R_n(2)=0\ \forall n$.

Si $n>1$ las $R_n\equiv 0$ (es claramente la única solución de $r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n=0$ con ambos datos 0).

Sólo queda R_1 , solución de $r^2R_1''+rR_1'-R_1=5\ \xrightarrow{\mathbf{3.}}\ R_1=c_1r+c_2r^{-1}-5\ \xrightarrow{cc}\ \begin{matrix} R_1'(1)=c_1-c_2=0 \\ R_1(2)=2c_1+\frac{1}{2}c_2-5=0 \end{matrix}\ \to c_1=c_2=2$.

La solución es, por tanto: $\boxed{u(r,\theta)=\big(2r+2r^{-1}-5\big)\,\text{sen}\,\theta}$ [También fácil de comprobar].