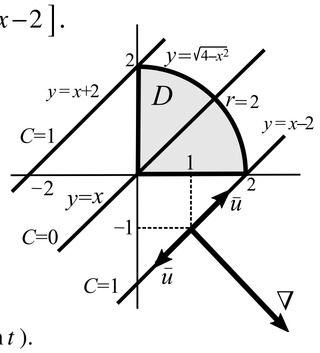
Examen de Métodos Matemáticos (22 de junio de 2022)

Hacer los problemas 1, 2, 3 y 4. Elegir DOS entre 5, 6 y 7.

1. Sea $f(x,y)=(y-x)^2$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f=0$, $f=4$ y el vector $\nabla f(1,-1)$. Escribir dos vectores unitarios $\bar{u}$ para los que sea la derivada direccional $D_{\bar{u}}f(1,-1)=0$. Hallar Δf. [1.4+1.4=2.8pt]
b] Si D es el sector de círculo $x^2+y^2\le 4$ con $x,y\ge 0$, calcular $\iint_D f$ (mucho mejor en polares).

a] $f=0 \to y=x$, $f=4 \to y=x\pm 2$. $\nabla f=2(x-y,y-x)$. $\nabla f(1,-1)=(4,-4)$ $[\perp \text{ a } y=x-2]$.

$D_{\bar{u}}=0$ si $\bar{u}\perp\nabla f$, o sea, para $\boxed{\bar{u}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ (sobre la curva de nivel no varía). $\Delta f=2+2=\boxed{4}$.



b] $$\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^2 r\left(r\,\text{sen}\,\theta-r\cos\theta\right)^2 dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^2 r^3\left(1-2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\right)dr\,d\theta$$

$$=\left[\tfrac{r^4}{4}\right]_0^2\int_0^{\pi/2}\left(1-2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\right)d\theta=4\left(\tfrac{\pi}{2}-\left[\text{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2}\right)=\boxed{2\pi-4}.$$

En cartesianas se complica mucho, por ejemplo:

$$\int_0^2\!\!\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy\,dx=\int_0^2\left(\tfrac{2x^2+4}{3}\sqrt{4-x^2}+x^3-4x\right)dx=\cdots$$ (se seguiría haciendo $x=2\,\text{sen}\,t$).

2. Sean $\bar{g}(x,y,z)=(y,xy,-xz)$ y $\bar{c}(t)=(1,2t,t^2)$. **a]** Calcular $\operatorname{div}\bar{g}$ y $\operatorname{rot}\bar{g}$. ¿Es $\bar{g}$ conservativo?
b] Calcular la integral de línea $\int_{\bar{c}}\bar{g}\cdot d\bar{s}$ entre $(1,0,0)$ y $(1,2,1)$ a lo largo de la curva dada por $\bar{c}$. [0.6+1=1.6pt]

a] $\operatorname{div}\bar{g}=0+x-x=\boxed{0}$. $\operatorname{rot}\bar{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ y&xy&-xz\end{vmatrix}=\boxed{(0,z,y-1)}\neq\bar{0}$. **No es conservativo**.

b] Debemos usar la definición. $\bar{g}(\bar{c}(t))=(2t,2t,-t^2)$, $\bar{c}'(t)=(0,2,2t)$ y la curva se recorre si $t\in[0,1]$.

$$\int_{\bar{c}}\bar{g}\cdot d\bar{s}=\int_0^1\left(0+4t-2t^3\right)dt=\left[2t^2-\tfrac{1}{2}t^4\right]_0^1=\boxed{\tfrac{3}{2}}.$$

3. Precisar si $\lambda=-2$ es o no autovalor de $\begin{cases}y''-y'+\lambda y=0\\ y'(0)=y(1)=0\end{cases}$, dando la autofunción en caso de serlo. [0.8 ptos]

Si $\lambda=-2$, $\mu^2-\mu-2=(\mu-2)(\mu+1)=0 \to y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$, $y'=2c_1e^{2x}-c_2e^{-x} \to$

$$\begin{cases}y'(0)=2c_1-c_2=0,\ c_2=2c_1 \searrow & c_2=0.\\ y(1)=c_1e^2+c_2e^{-1}=0 \quad c_1\big[\underbrace{2e^2+e^{-1}}_{\neq 0}\big]=0 \Rightarrow c_1=0 \nearrow\end{cases}$$ **No es autovalor**.

O bien, en forma autoadjunta es $\left(e^{-x}y'\right)'+\lambda e^{-x}y=0$. $\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0 \Rightarrow \lambda\ge 0$. $\lambda=-2$ no podía serlo.

4. Hallar las soluciones generales $[\,y(x),\,T(t),\,R(r)\,]$ de estas tres EDOs (que aparecen en los problemas **5.**, **6.**, **7.**):
a] $\frac{dy}{dx}=\frac{2-y}{x}$, **b]** $T''+T=t$, **c]** $r^2R''+rR'-(2n-1)^2R=0$, $n=1,2,\dots$ [0.6+0.6+0.4=1.6pt]

a] Lineal: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}+\frac{2}{x}$, $e^{-\int(dx/x)}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$. $y=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}\int 2\,dx$, $\boxed{y=\frac{C}{x}+2}$ (la y_p se veía a ojo).

O también es separable: $\int\frac{dy}{y-2}=-\int\frac{dx}{x}+C$, $\ln(y-2)=C-\ln x$. $y-2=Ce^{-\ln x}$ que lleva a lo mismo.

b] De coeficientes constantes. $\mu^2+1=0$, $\mu=\pm i$. $T_p=t$ a ojo (o probando $T_p=At+B \to At=t$, $A=1$).

La solución general es, pues, $\boxed{T=c_1\cos t+c_2\,\text{sen}\,t+t}$.

c] Ecuación de Euler. $\mu(\mu-1)+\mu-(2n-1)^2=0$, $\mu=\pm(2n-1)$. $\boxed{R=c_1r^{2n-1}+c_2r^{1-2n}}$.

Elegir DOS problemas entre 5 , 6 y 7 (y hacer antes 4.):

5. Sea $(2-y)u_y+xu_x=2x$. Con las características halladas en el problema **4.** y la regla de la cadena escribir la ecuación para u_η , dar su solución general y hallar la que cumple el dato $u(x,1)=x$. [1.6 ptos]

De **4a**: $\underbrace{\boxed{x(y-2)=C}}_{\text{características}}$. $\begin{cases}\xi=x(y-2)\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=xu_\xi\\ u_x=(y-2)u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $xu_\eta=2x$, $u_\eta=2$, $u=2\eta+p(\xi)=\boxed{2x+p\big(x(y-2)\big)}$.

Peor: $\begin{cases}\xi=x(y-2)\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=xu_\xi+u_\eta\\ u_x=(y-2)u_\xi\end{cases}$, $u_\eta=\frac{2\xi}{(2-\eta)^2}$, $u=\frac{2\xi}{\eta-2}+p(\xi)$ $\nearrow$

Imponiendo el dato: $u(x,1)=2x+p(-x)=x$, $p(-x)=-x$, $p(v)=v$, $u=2x+xy-2x$. $\boxed{u=xy}$ [Fácil de comprobar].

6. Resolver separando variables $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=t\operatorname{sen}x\,,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0\end{cases}$. [Llevar serie con autofunciones del homogéneo a EDP y datos iniciales y hallar la T_n no nula]. [1.6 ptos]

$u=XT \xrightarrow{\text{formulario}} X''+\lambda X=0$, y de los datos de contorno $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X'(\pi/2)=0\end{cases} \to X_n=\big\{\operatorname{sen}(2n-1)x\big\}$, $n=1,2,\ldots$

Llevamos a la EDP: $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}(2n-1)x \to \sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[T_n''+(2n-1)^2T_n\big]\operatorname{sen}(2n-1)x=t\operatorname{sen}x$ (ya desarrollada).

De los datos inciales sale: $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}(2n-1)x=0$, $u_t(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\operatorname{sen}(2n-1)x=0 \Rightarrow$

$T_n(0)=T_n'(0)=0$, para todo n . Sólo será no nula la solución de:

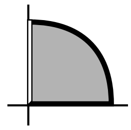
Debemos resolver $\begin{cases}T_1''+T_1=t \text{ (resuelta en \textbf{4b.})}\\ T_1(0)=T_1'(0)=0\end{cases}$. Imponemos datos a $T_1=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen}t+t$: $\begin{matrix}c_1=0\\ c_2+1=0\end{matrix}$.

La solución (fácil de comprobar) es por tanto: $\boxed{u(x,t)=\big(t-\operatorname{sen}t\big)\operatorname{sen}x}$.

7. Resolver $\begin{cases}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ u(2,\theta)=8\operatorname{sen}3\theta\,,\ u(r,0)=u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$ y comprobar la solución. [1.6 ptos]

El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la EDP:

$u=R\Theta \to \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$, $\lambda_n=(2n-1)^2_{\downarrow}$, $\Theta_n=\big\{\operatorname{sen}(2n-1)\theta\big\}$, $n=1,2,\ldots$ (mismo problema de contorno de **6.**)



Y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0$, $r^2R''+rR'-(2n-1)^2R=0 \overset{\mathbf{4c.}}{\to} R=c_1r^{2n-1}+c_2r^{1-2n}$.

Luego $R_n=\big\{r^{2n-1}\big\}$, pues además las soluciones han de estar acotadas en $r=0$.

A $u(r,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\theta$ sólo le falta cumplir el dato $u(2,\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\,2^{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\theta=8\operatorname{sen}3\theta$.

Es claro que $8c_1=8$ y que las demás $c_n=0$. Así pues, la solución única es: $\boxed{u(r,\theta)=r^3\operatorname{sen}3\theta}$.

Comprobamos: $u_r=3r^2s$, $u_{rr}=6rs$, $u_\theta=3r^3c$, $u_{\theta\theta}=-9r^3s$. $(6r+3r-9r)\operatorname{sen}3\theta=0$.

Y los datos igual de fácil: $u(2,\theta)=8\operatorname{sen}3\theta$, $u(r,0)=r^3\operatorname{sen}0=0$, $u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=3r^3\cos\frac{3\pi}{2}=0$.