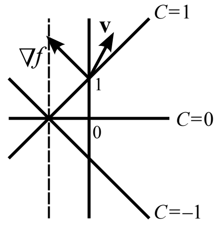
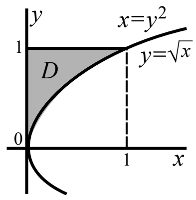
Soluciones del control 1A de Métodos Matemáticos (13 de noviembre)

1. Sea $f(x,y)=\frac{y}{x+1}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0,1,-1$. Hallar $\nabla f(0,1)$, $\Delta f(x,y)$ y la derivada de f en el punto $(0,1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.
b] Calcular la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D la región acotada por $x=0$, $y=1$ y $x=y^2$. [0.7 puntos]





a] $\frac{y}{x+1}=0,1,-1 \to$ rectas $y=0$, $y=x+1$, $y=-x-1$.

$\nabla f=\left(\frac{-y}{(x+1)^2},\frac{1}{x+1}\right)$, $\boxed{\nabla f(0,1)=(-1,1)}$. $\boxed{\Delta f=\frac{2y}{(x+1)^3}}$.

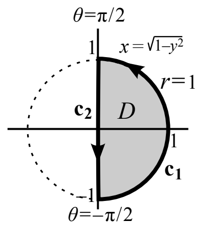
$D_{\mathbf{v}}f(0,1)=(-1,1)\cdot(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=\boxed{\frac{1}{5}}$ [pues f es C^1 en un entorno]

[Bastante más largo: $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1+4h/5}{3h/5+1}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{5}h}{h(\frac{3}{5}h+1)}=\frac{1}{5}$].

b] $\iint_D f=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\frac{y}{x+1}\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1-x}{x+1}\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right]dx=\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1-\frac{1}{2}=\boxed{\ln 2-\frac{1}{2}}$. [f continua en D pues sólo no lo es en $x=-1$].

Más corto que: $\int_0^1\int_0^{y^2}\frac{y}{x+1}\,dx\,dy=\int_0^1 y\ln(1+y^2)\,dy\underset{\text{partes}}{=}\frac{y^2}{2}\ln(1+y^2)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{y^3+y-y}{1+y^2}\,dy=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$.

2. Comprobar (haciendo la integral doble en polares) el teorema de Green $\iint_D[g_x-f_y]\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ para: $\mathbf{f}(x,y)=(1,x^2y)$ y D el semicírculo dado por $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$. [0.5 puntos]



$g_x-f_y=2xy$. Para hallar $\iint_D$ el problema pide usar coordenadas polares:

$$\iint_D 2xy\,dx\,dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 2r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta=\Big[\tfrac{r^4}{4}\Big]_0^1\big[\mathrm{sen}^2\theta\big]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\boxed{0}\,.$$

[Aunque en este caso serían bastante cortos los cálculos en cartesianas:

$$\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}2xy\,dx\,dy=\int_{-1}^1[y-y^3]\,dy=\Big[\tfrac{y^2}{2}-\tfrac{y^4}{4}\Big]_{-1}^1=0 \quad (\text{o } \bullet \text{ impar})\ ].$$

Para la semicircunferencia de la primera parte de ∂D también parecen más útiles las polares:

$\mathbf{c}_1=(\cos t,\mathrm{sen}\,t)$, $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. $\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1,c^2s)\cdot(-s,c)\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[\underset{\text{impar}}{-s}+c^3s]\,dt=\Big[\cos t-\frac{1}{4}\cos^4 t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}=0$.

[En cartesianas: $\mathbf{c}_1=(\sqrt{1-t^2},t)$, $t\in[-1,1]$. $\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^1(1,t-t^3)\cdot(\frac{-t}{\sqrt{\cdot\cdot}},1)\,dt=\int_{-1}^1[\underset{\text{impar}}{t-t^3-\frac{t}{\sqrt{\cdot\cdot}}}]\,dt=0$].

Para el segmento: $\mathbf{c}_2=(0,t)$, $t\in[1,-1]$. $\int_{\mathbf{c}_2}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_1^{-1}(1,0)\cdot(0,1)\,dt=\int_1^{-1}0\,dt=0$.

Por tanto, $\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=0+0=0$, como debía ser según el teorema de Greeen.

3. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=(z^2,2y,cxz)$, c constante. **a]** Hallar $\mathrm{div}\,\mathbf{f}$ y $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$. **b]** Precisar para qué valor de c deriva $\mathbf{f}$ de un potencial U y calcularlo. **c]** Para este c , ¿cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}$ entre $(0,0,0)$ y $(1,0,1)$ a lo largo del segmento que une los puntos? [0.3 puntos]

a] $\mathrm{div}\,\mathbf{f}=\boxed{2+cx}$. $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ z^2&2y&cxz\end{vmatrix}=\boxed{(0,2z-cz,0)}$.

b] Si $\boxed{c=2}$ es $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}=\mathbf{0}$. Como $\mathbf{f}\in C^1(\mathbf{R}^3)$, existe el potencial: $\begin{array}{l}U_x=z^2\to U=xz^2+p(y,z)\\ U_y=2y\to U=y^2+q(x,z)\\ U_z=2xz\to U=xz^2+r(x,y)\end{array}$, $\boxed{U=xz^2+y^2}$.

c] Por tanto, $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,0,1)-U(0,0,0)=\boxed{1}$, sin necesidad de hacer ninguna integral de línea.

[Una parametrización sería: $\mathbf{c}(t)=(t,0,t)$, $t\in[0,1]\to\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t^2,0,2t^2)\cdot(1,0,1)\,dt=\int_0^1 3t^2\,dt=1$].

Soluciones del control 1B de Métodos Matemáticos (13 de noviembre)

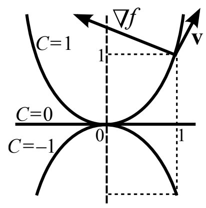
1. Sea $f(x,y)=\frac{y}{x^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0,1,-1$. Hallar $\nabla f(1,1)$, $\Delta f(x,y)$ y la derivada de f en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.
b] Calcular la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D el triángulo de vértices $(1,0)$, $(2,0)$ y $(1,1)$. [0.7 puntos]

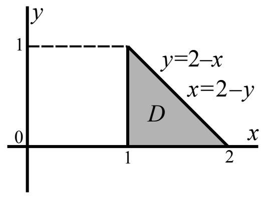
a] $\frac{y}{x^2}=0,1,-1 \to y=0,\ y=x^2,\ y=-x^2$ (parábolas).

$\nabla f=(\frac{-2y}{x^3},\frac{1}{x^2})$, $\boxed{\nabla f(1,1)=(-2,1)}$. $\boxed{\Delta f=\frac{6y}{x^4}}$.

$D_{\mathbf{v}}f(1,1)=(-2,1)\cdot(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=\boxed{-\frac{2}{5}}$ [pues f es C^1 en un entorno].

[Mucho más largo: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1+4h/5}{(1+3h/5)^2}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-\frac{2}{5}h-\frac{9}{25}h^2}{h(1+\frac{3}{5}h)^2}=-\frac{2}{5}$].





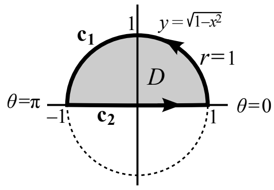
b] $\iint_D f=\int_1^2\int_0^{2-x}\frac{y}{x^2}\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{4-4x+x^2}{x^2}\,dx=\Big[-\frac{2}{x}-2\ln|x|\Big]_1^2+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{2}-2\ln 2}$. [f continua en D pues sólo no lo es en $x=0$].

Algo más corto que: $\int_0^1\int_1^{2-y}\frac{y}{x^2}\,dx\,dy=\int_0^1 y\big[1-\frac{1}{2-y}\big]\,dy=\int_0^1\big[y+1-\frac{2}{2-y}\big]\,dy=\frac{1}{2}+1+2\ln 2$.

2. Comprobar (haciendo la integral doble en polares) el teorema de Green $\iint_D[g_x-f_y]\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ para: $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,0)$ y D el semicírculo dado por $x^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$. [0.5 puntos]

$g_x-f_y=-2y$. Para hallar $\iint_D$ el problema pide usar coordenadas polares:

$$\iint_D -2y\,dx\,dy=\int_0^\pi\int_0^1 -2r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta=2\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1\big[\cos\theta\big]_0^\pi=\boxed{-\frac{4}{3}}\ .$$



[Aunque en este caso no serían largos los cálculos en cartesianas:

$$\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}-2y\,dy\,dx=\int_{-1}^1[x^2-1]\,dx\underset{\text{par}}{=}\frac{2x^3}{3}\Big]_0^1-2=-\frac{4}{3}\ ].$$

Para la semicircunferencia de la primera parte de ∂D también parecen más útiles las polares:

$\mathbf{c}_1=(\cos t,\operatorname{sen}t)$, $t\in[0,\pi]$. $\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^\pi(s^2,0)\cdot(-s,c)\,dt=\int_0^\pi[-s+c^2s]\,dt=\Big[\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\Big]_0^\pi=-\frac{4}{3}$.

[En cartesianas: $\mathbf{c}_1=(t,\sqrt{1-t^2})$, $t\in[1,-1]$. $\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_1^{-1}(1-t^2,0)\cdot(1,\frac{-t}{\sqrt{\cdot\cdot}})\,dt=\int_{-1}^1[t^2-1]\,dt=-\frac{4}{3}$].

Para el segmento: $\mathbf{c}_2=(t,0)$, $t\in[-1,1]$. $\int_{\mathbf{c}_2}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^1(0,0)\cdot(1,0)\,dt=\int_{-1}^1 0\,dt=0$.

Por tanto, $\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{4}{3}+0=-\frac{4}{3}$, como debía ser según el teorema de Greeen.

3. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=(1,z^3,cyz^2)$, c constante. **a]** Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. **b]** Precisar para qué valor de c deriva $\mathbf{f}$ de un potencial U y calcularlo. **c]** Para este c , ¿cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}$ entre $(0,0,0)$ y $(0,1,1)$ a lo largo del segmento que une los puntos? [0.3 puntos]

a] $\operatorname{div}\mathbf{f}=\boxed{2cyz}$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 1&z^3&cyz^2\end{vmatrix}=\boxed{(cz^2-3z^2,0,0)}$.

b] Si $\boxed{c=3}$ es $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\mathbf{0}$. Como $\mathbf{f}\in C^1(\mathbf{R}^3)$, existe el potencial: $\begin{array}{l}U_x=1\to U=x+p(y,z)\\ U_y=z^3\to U=yz^3+q(x,z)\\ U_z=3yz^2\to U=yz^3+r(x,y)\end{array}$, $\boxed{U=x+yz^3}$.

c] Por tanto, $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(0,1,1)-U(0,0,0)=\boxed{1}$, sin necesidad de hacer ninguna integral de línea.

[Una parametrización sería: $\mathbf{c}(t)=(0,t,t)$, $t\in[0,1]\to\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(1,t^3,3t^3)\cdot(0,1,1)\,dt=\int_0^1 4t^3\,dt=1$].

Soluciones del control 2A de Métodos Matemáticos (18 de diciembre)

1. Hallar las soluciones generales de: **a]** $y''+4y'+5y=x$ (utilizar coeficientes indeterminados). **b]** $x^2y''-3xy'=4$ (viéndola como Euler o haciendo $y'=v$). [0.5 puntos]

a] Ecuación de coeficientes constantes. $\mu^2+4\mu+5=0$, $\mu=-2\pm\mathrm{i} \to y=\mathrm{e}^{-2x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)+y_p$.

$\mu=0$ no autovalor $\to y_p=Ax+B$, $y_p'=A$, $y_p''=0 \to 4A+5Ax+5B=x$, $\boxed{y=\mathrm{e}^{-2x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x)+\frac{x}{5}-\frac{4}{25}}$.

[La fórmula de variación de las constantes nos llevaría a hacer integrales bastante largas].

b] Como Euler. $\mu(\mu-1)-3\mu=0$, $\mu=0,4 \to y=c_1+c_2x^4+y_p$. Con la fórmula de variación de las constantes:

$\begin{vmatrix}1 & x^4\\ 0 & 4x^3\end{vmatrix}=4x^3$. $y_p=x^4\int\frac{1\cdot 4/x^2}{4x^3}dx-1\int\frac{x^4\cdot 4/x^2}{4x^3}dx=x^4\int\frac{dx}{x^5}-\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{4}-\ln|x|$, $\boxed{y=c_1+c_2x^4-\ln|x|}$.

O bien: $y'=v$, $v'=\frac{3}{x}v+\frac{4}{x^2}$, $\mathrm{e}^{3\ln x}=x^3$, $v=Cx^3+x^3\int\frac{4}{x^5}dx=Cx^3-\frac{1}{x}$, $y=C^*x^4+K-\ln|x|$, como arriba.

[Una tercera posibilidad sería hacer $x=\mathrm{e}^s \to y''-4y'=4 \xrightarrow{y_p=As} y=c_1+c_2\mathrm{e}^{4s}-s \nearrow$].

2. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0\\ y'(0)=y(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$. **a]** Hallar sus autovalores λ_n y sus autofunciones $\{y_n\}$ (deben coincidir con el formulario). **b]** Hallar el desarrollo de $f(x)=\pi$ en serie $\sum_{n=1}^{\infty}c_n y_n(x)$. ¿Cuánto suma la serie si $x=1$? [0.5 puntos]

a] Como $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0$, sólo hay $\lambda\geq 0$. $\lambda=0$: $y=c_1+c_2x \to \left.\begin{array}{l} y'(0)=c_2=0\\ y(\frac{\pi}{2})=c_1+c_2\frac{\pi}{2}=0\end{array}\right\} \to \lambda=0$ no es autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx$, $y'=-wc_1\operatorname{sen} wx+wc_2\cos wx$. $y'(0)=0\to c_2=0\to y(\frac{\pi}{2})=c_1\cos\frac{w\pi}{2}=0$

$\to w_n=2n-1$, $\boxed{\lambda_n=(2n-1)^2,\ y_n=\{\cos(2n-1)x\}}$, $n=1,2,\dots$ (como en formulario).

b] $\langle y_n,y_n\rangle=\frac{L}{2}=\frac{\pi}{4}$ (formulario). Como $r=1$, es $c_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\pi\cos(2n-1)x\,dx=\frac{4}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x\Big]_0^{\pi/2}$. Por tanto:

$$\boxed{\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x}=4\big[\cos x-\tfrac{1}{3}\cos 3x+\tfrac{1}{5}\cos 5x-\cdots\big] .$$

Como la f que desarrollamos es continua en $x=1\in(0,\frac{\pi}{2})$, la suma de la serie será el valor en el punto $\pi=f(1)$.

[Con ordenador, sumando 100 términos de la serie para $x=1$ se obtiene 3.132..., sumando 1000, 3.14227..., ...].

3. Sea $u_y-2u_x=\frac{2}{y}u$. Hallar su solución general y la que satisface el dato inicial $u(x,1)=x$. [0.5 puntos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$. $\int 2\,dy=-\int dx+C$. Características: $\boxed{x+2y=C}$.

Más corto será hacer $\begin{cases}\xi=x+2y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases} \to u_\eta=\frac{2}{y}u=\frac{2}{\eta}u$. $u=p(\xi)\mathrm{e}^{2\ln\eta}=p(\xi)\eta^2=\boxed{p(x+2y)y^2}$.

[Más largo: $\begin{cases}\xi=x+2y\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=2u_\xi\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases} \to -2u_\eta=\frac{2}{y}u$, $u_\eta=\frac{2}{\eta-\xi}u$. $u=p^*(\xi)\mathrm{e}^{2\ln(\eta-\xi)}=p^*(\xi)(\eta-\xi)^2=4p^*(x+2y)y^2$].

Imponiendo el dato inicial: $u(x,1)=p(x+2)=x \to p(v)=v-2$, $\boxed{u(x,y)=(x+2y-2)y^2}$.

Comprobamos: $u(x,1)=x$, y además: $u_y-2u_x=2xy+6y^2-4y-2y^2=2y(x+2y-2)=\frac{2}{y}u$.

[Como los datos se dan sobre una recta no característica, la solución debía ser única].

Soluciones del control 2B de Métodos Matemáticos (18 de diciembre)

1. Hallar las soluciones generales de: **a]** $y''+2y'+5y=x$ (utilizar coeficientes indeterminados). **b]** $x^2y''-4xy'=5$ (viéndola como Euler o haciendo $y'=v$). [0.5 puntos]

a] Ecuación de coeficientes constantes. $\mu^2+2\mu+5=0$, $\mu=-1\pm2\mathrm{i} \to y=\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\,\mathrm{sen}\,2x)+y_p$.

$\mu=0$ no autovalor $\to y_p=Ax+B$, $y_p'=A$, $y_p''=0 \to 2A+5Ax+5B=x$, $\boxed{y=\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\,\mathrm{sen}\,2x)+\frac{x}{5}-\frac{2}{25}}$.

[La fórmula de variación de las constantes nos llevaría a hacer integrales bastante largas].

b] Como Euler. $\mu(\mu-1)-4\mu=0$, $\mu=0,5 \to y=c_1+c_2x^5+y_p$. Con la fórmula de variación de las constantes:

$$\begin{vmatrix}1 & x^5\\ 0 & 5x^4\end{vmatrix}=5x^4.\quad y_p=x^5\int\frac{1\cdot5/x^2}{5x^4}dx-1\int\frac{x^5\cdot5/x^2}{5x^3}dx=x^5\int\frac{dx}{x^6}-\int\frac{dx}{x}=-\tfrac{1}{5}-\ln|x|,\ \boxed{y=c_1+c_2x^5-\ln|x|}.$$

O bien: $y'=v$, $v'=\frac{4}{x}v+\frac{5}{x^2}$, $\mathrm{e}^{4\ln x}=x^4$, $v=Cx^4+x^4\int\frac{5}{x^6}dx=Cx^4-\frac{1}{x}$, $y=C^*x^5+K-\ln|x|$, como arriba.

[Una tercera posibilidad sería hacer $x=\mathrm{e}^s \to y''-5y'=5 \xrightarrow{y_p=As} y=c_1+c_2\mathrm{e}^{5s}-s \nearrow$].

2. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0\\ y(0)=y'(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$. **a]** Hallar sus autovalores λ_n y sus autofunciones $\{y_n\}$ (deben coincidir con el formulario). **b]** Hallar el desarrollo de $f(x)=\pi$ en serie $\sum_{n=1}^{\infty}c_n y_n(x)$. ¿Cuánto suma la serie si $x=1$? [0.5 puntos]

a] Como $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv0$, sólo hay $\lambda\geq0$. $\lambda=0$: $y=c_1+c_2x \to \left.\begin{matrix} y(0)=c_1=0\\ y'(\frac{\pi}{2})=c_2=0\end{matrix}\right\} \to \lambda=0$ no es autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$, $y'=-wc_1\,\mathrm{sen}\,wx+wc_2\cos wx$. $y(0)=0\to c_1=0\to y'(\frac{\pi}{2})=wc_2\cos\frac{w\pi}{2}=0$

$\to w_n=2n-1$, $\boxed{\lambda_n=(2n-1)^2,\ y_n=\{\mathrm{sen}(2n-1)x\}}$, $n=1,2,\ldots$ (como en formulario).

b] $\langle y_n,y_n\rangle=\frac{L}{2}=\frac{\pi}{4}$ (formulario). Como $r=1$, es $c_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\pi\,\mathrm{sen}(2n-1)x\,dx=-\frac{4}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big]_0^{\pi/2}$. Por tanto:

$$\boxed{\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\,\mathrm{sen}(2n-1)x}=4\big[\,\mathrm{sen}\,x+\tfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,3x+\tfrac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,5x+\cdots\big].$$

Como la f que desarrollamos es continua en $x=1\in(0,\frac{\pi}{2})$, la suma de la serie será el valor en el punto $\pi=f(1)$.

[Con ordenador, sumando 100 términos de la serie para $x=1$ se obtiene 3.1358..., sumando 1000, 3.1420..., ...].

3. Sea $u_y+2u_x=\frac{2}{y}u$. Hallar su solución general y la que satisface el dato inicial $u(x,1)=x$. [0.5 puntos]

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$. $\int 2\,dy=\int dx+C$. Características: $\boxed{x-2y=C}$.

Más corto será hacer $\begin{cases}\xi=x-2y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=-2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases} \to u_\eta=\frac{2}{y}u=\frac{2}{\eta}u$. $u=p(\xi)\mathrm{e}^{2\ln\eta}=p(\xi)\eta^2=\boxed{p(x-2y)y^2}$.

[Más largo: $\begin{cases}\xi=x-2y\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=-2u_\xi\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases} \to 2u_\eta=\frac{2}{y}u$, $u_\eta=\frac{2}{\eta-\xi}u$. $u=p^*(\xi)\mathrm{e}^{2\ln(\eta-\xi)}=p^*(\xi)(\eta-\xi)^2=4p^*(x+2y)y^2$].

Imponiendo el dato inicial: $u(x,1)=p(x-2)=x \to p(v)=v+2$, $\boxed{u(x,y)=(x-2y+2)y^2}$.

Comprobamos: $u(x,1)=x$, y además: $u_y+2u_x=2xy-6y^2+4y+2y^2=2y(x-2y+2)=\frac{2}{y}u$.

[Como los datos se dan sobre una recta no característica, la solución debía ser única].