Soluciones del control 1A de Métodos Matemáticos (5 de noviembre)

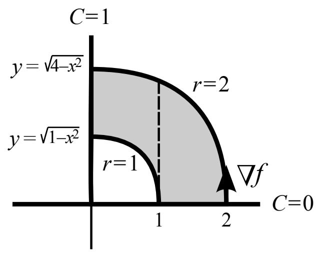
1. Sea $f(x,y)=y\,(x^2+y^2)^{-1/2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0,1$. Hallar y dibujar $\nabla f(2,0)$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(2,0)$.
b] Calcular [mejor en polares] la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D la región del primer cuadrante limitada por las circuferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$. [0.5 puntos]

a] $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\to y=0$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1\to y^2=x^2+y^2$, $x=0$ (si $y>0$; $f=\operatorname{sen}\theta$).

$\nabla f(x,y)=\big(-xy\,(x^2+y^2)^{-3/2},(x^2+y^2)^{-1/2}-y^2(x^2+y^2)^{-3/2}\big)=\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(-y,x)$.

$\boxed{\nabla f(2,0)=(0,\frac{1}{2})}$ (perpendicular a la curva de nivel como debía).

Plano tangente: $z=0+0(x-1)+\frac{1}{2}(y-0)$, $\boxed{z=\frac{y}{2}}$.



b] En polares: $\iint_D f\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r}\,dr\,d\theta=\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_1^2\,[-\cos\theta]_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{3}{2}}$.

[En cartesianas se puede hacer, pero con cálculos más largos. Como $\int y\,(x^2+y^2)^{-1/2}dy=(x^2+y^2)^{1/2}$, es:

$$\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy\,dx=\int_0^1[2-1]\,dx+\int_1^2[2-x]\,dx=1+2-\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^2=\frac{3}{2}\ \Big].$$

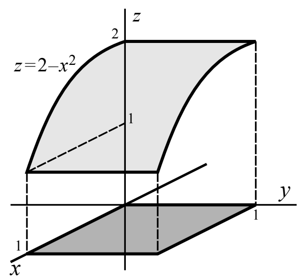
2. Sea $g(x,y,z)=x\,\mathrm{e}^z$. **a]** Hallar ∇g , Δg y la derivada de g en el punto $(2,1,0)$ según el vector $\mathbf{v}=(1,2,3)$.
b] Calcular $\iiint_V g$, siendo V el sólido limitado por $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ y la superficie $z=2-x^2$. [0.5 puntos]

a] $\boxed{\nabla g=(\mathrm{e}^z,0,x\,\mathrm{e}^z)}$. $\boxed{\Delta g=x\,\mathrm{e}^z}$. $D_{\mathbf{v}}g(2,1,0)=\underset{=(1,0,2)}{\nabla g(2,1,0)}\cdot(1,2,3)=\boxed{7}$.

b] En $[0,1]\times[0,1]$ está $z=2-x^2$ por encima de $z=0$ (no se necesita el dibujo).

$$\iiint_V g=\int_0^1\int_0^1\int_0^{2-x^2} x\,\mathrm{e}^z dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^1 x[\mathrm{e}^{2-x^2}-1]\,dy\,dx=\int_0^1[x\,\mathrm{e}^{2-x^2}-x]\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{2-x^2}+x^2\Big]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-1)}\ .$$



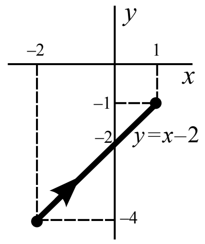
3. Sea $\mathbf{f}(x,y)=(2xy,x^2)$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$. Probar que $\mathbf{f}$ deriva de un potencial y calcularlo. **b]** Hallar el valor de la integral de línea del campo $\mathbf{f}$ desde $(-2,-4)$ hasta $(1,-1)$ a lo largo del segmento que une los puntos: i) directamente, encontrando una parametrización, ii) utilizando el potencial hallado en **a]**. [0.5 puntos]

a] $\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y=\boxed{2y}$. Como $g_x=2x=f_y$ y el campo $\mathbf{f}$ es $C^1(\mathbf{R}^2)$, deriva de un potencial:

$$\begin{matrix} U_x=2xy\to U=x^2y+p(y)\\ U_y=x^2\ \to U=x^2y+q(x)\end{matrix}\ \to\ \boxed{U(x,y)=x^2y}\ .$$

b] i) La recta tiene pendiente 1 y corta $x=0$ en $y=-2$. Es, por tanto, $y=x-2$.
Una parametrización sería, pues: $\mathbf{c}(t)=(t,t-2)$, $t\in[-2,1]$, $\mathbf{c}'(t)=(1,1)\ \to$

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-2}^1(2t(t-2),t^2)\cdot(1,1)\,dt=\int_{-2}^1[3t^2-4t]\,dt=[t^3-2t^2]_{-2}^1=\boxed{15}\ .$$



ii) Con el potencial, sin necesidad de hacer integrales de línea:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,-1)-U(-2,-4)=-1+16=\boxed{15}\ .$$

Soluciones del control 1B de Métodos Matemáticos (5 de noviembre)

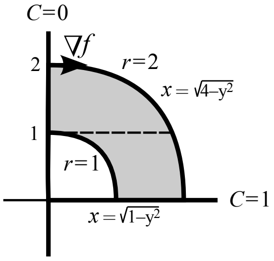
1. Sea $f(x,y)=x(x^2+y^2)^{-1/2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0,1$. Hallar y dibujar $\nabla f(0,2)$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(0,2)$.
b] Calcular [mejor en polares] la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D la región del primer cuadrante limitada por las circuferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$. [0.5 puntos]

a] $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \to x=0$, $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=1 \to x^2=x^2+y^2$, $y=0$ (si $x>0$; $f=\cos\theta$).

$\nabla f(x,y)=\Big((x^2+y^2)^{-1/2}-x^2(x^2+y^2)^{-3/2},-xy(x^2+y^2)^{-3/2}\Big)=\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}(y,-x)$.

$\boxed{\nabla f(0,2)=(\frac{1}{2},0)}$ (perpendicular a la curva de nivel como debía).

Plano tangente: $z=0+\frac{1}{2}(x-0)+0(y-1)$, $\boxed{z=\frac{x}{2}}$.



b] En polares: $\iint_D f\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\frac{r\cos\theta}{r}\,dr\,d\theta=\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_1^2[\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{3}{2}}$.

[En cartesianas se puede hacer, pero con cálculos más largos. Como $\int x(x^2+y^2)^{-1/2}dy=(x^2+y^2)^{1/2}$, es:

$$\int_0^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f\,dx\,dy+\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f\,dx\,dy=\int_0^1[2-1]\,dy+\int_1^2[2-y]\,dy=1+2-\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_1^2=\frac{3}{2}\ \Big].$$

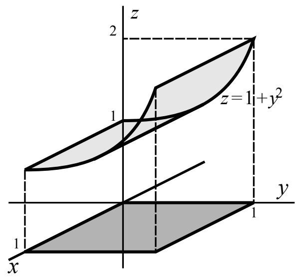
2. Sea $g(x,y,z)=y\mathrm{e}^z$. **a]** Hallar ∇g , Δg y la derivada de g en el punto $(2,1,0)$ según el vector $\mathbf{v}=(3,2,1)$.
b] Calcular $\iiint_V g$, siendo V el sólido limitado por $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ y la superficie $z=1+y^2$. [0.5 puntos]

a] $\boxed{\nabla g=(0,\mathrm{e}^z,y\mathrm{e}^z)}$. $\boxed{\Delta g=y\mathrm{e}^z}$. $D_{\mathbf{v}}g(2,1,0)=\underbrace{\nabla g(2,1,0)}_{=(0,1,1)}\cdot(3,2,1)=\boxed{3}$.

b] En $[0,1]\times[0,1]$ está $z=1+y^2$ por encima de $z=0$ (no se necesita el dibujo).

$$\iiint_V g=\int_0^1\int_0^1\int_0^{1+y^2} y\mathrm{e}^z\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^1 y[\mathrm{e}^{1+y^2}-1]\,dy\,dx=\int_0^1[y\mathrm{e}^{1+y^2}-y]\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{1+y^2}-y^2\Big]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-1)}\ .$$



3. Sea $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,2xy)$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$. Probar que $\mathbf{f}$ deriva de un potencial y calcularlo. **b]** Hallar el valor de la integral de línea del campo $\mathbf{f}$ desde $(-1,1)$ hasta $(2,4)$ a lo largo del segmento que une los puntos: i) directamente, encontrando una parametrización, ii) utilizando el potencial hallado en **a]**. [0.5 puntos]

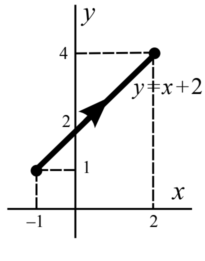
a] $\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y=\boxed{2x}$. Como $g_x=2y=f_y$ y el campo $\mathbf{f}$ es $C^1(\mathbf{R}^2)$, deriva de un potencial:

$$\begin{matrix} U_x=y^2 \to U=xy^2+p(y) \\ U_y=2xy \to U=xy^2+q(x) \end{matrix} \to \boxed{U(x,y)=xy^2}\ .$$

b] i) La recta tiene pendiente 1 y corta $x=0$ en $y=2$. Es, por tanto, $y=x+2$.

Una parametrización sería, pues: $\mathbf{c}(t)=(t,t+2)$, $t\in[-1,2]$, $\mathbf{c}'(t)=(1,1)$ $\to$

$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^2((t+2)^2,2t(t+2))\cdot(1,1)\,dt=\int_{-1}^2[3t^2+8t+4]\,dt=[t^3+4t^2]_{-1}^2+12=\boxed{33}$.



ii) Con el potencial, sin necesidad de hacer integrales de línea:

$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(2,4)-U(-1,1)=32+1=\boxed{33}$.

Soluciones del control 2 de Métodos Matemáticos (17 de diciembre)

1. Sea [C] $y''+y'-2y=1-2x$. **a]** Hallar la solución general de [C] y la que satisface $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.
b] Escribir [C] en forma autoadjunta y precisar cuántas soluciones cumplen $y(0)-y'(0)=y(1)=0$. [0.5 puntos]

a] De coeficientes constantes. $\mu^2+\mu-2=0$, $\mu=1,-2 \to y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+y_p$.

$\mu=0$ no autovalor $\to y_p=Ax+B$, $y_p'=A$, $y_p''=0 \to A-2Ax-2B=1-2x$; $A=1, B=0$, $\boxed{y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+x}$.

[La fórmula de variación de las constantes nos llevaría a hacer integrales bastante largas].

Imponiendo los datos: $y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}+1$, $\left.\begin{array}{l} y(0)=c_1+c_2=1 \\ y'(0)=c_1-2c_2+1=-1 \end{array}\right\} \to c_1=0, c_2=1$, $\boxed{y=e^{-2x}+x}$.

b] En forma autoadjunta: $(e^xy')'-2e^xy=e^x(1-2x)$. Veamos cuántas soluciones tiene el problema homogéneo:

$$y=c_1e^x+c_2e^{-2x},\ y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x} \to \left.\begin{array}{l} y(0)-y'(0)=3c_2=0 \\ y(1)=c_1+c_2e^{-2}=0 \end{array}\right\} \to c_1=c_2=0.$$

Como el homogéneo tiene sólo la solución $y\equiv 0$, nuestro problema no homogéneo **tiene una sola solución**.

[Imponiendo los datos en la solución de la no homogénea se tendría: $y=\frac{1}{3}e^{-2x}-\frac{1+3e^2}{3e^3}e^x+x$].

2. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(\frac{1}{2})=0 \end{cases}$. **a]** Hallar autovalores λ_n, autofunciones $\{y_n\}$ y $\langle y_n,y_n\rangle$ (debe coincidir con el formulario).
b] Calcular el desarrollo de $f(x)=x$ en serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$. [0.5 puntos]

a] $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0 \Rightarrow$ sólo $\lambda\geq 0$. $\Big[$O directamente: $\lambda<0$: $y=c_1e^{px}+c_2e^{-px} \to \left.\begin{array}{l} c_1+c_2=0 \searrow \\ pc_1[e^{p/2}+e^{-p/2}]=0 \end{array}\right\} \to c_1=c_2=0\Big]$.

$\lambda=0$: $y=c_1+c_2x \to \left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=0 \\ y'(\frac{1}{2})=c_2=0 \end{array}\right\} \to \lambda=0$ no es autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx$, $y'=-wc_1\operatorname{sen} wx+wc_2\cos wx$. $y(0)=0 \to c_1=0 \to y'(\frac{1}{2})=wc_2\cos\frac{w}{2}=0$

$\to w_n=(2n-1)\pi$, $\boxed{\lambda_n=(2n-1)^2\pi^2,\ y_n=\{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\}}$, $n=1,2,\dots$ (como en formulario).

$\langle y_n,y_n\rangle \underset{r\equiv 1}{=} \int_0^{1/2}\operatorname{sen}^2 w_nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}[1-\cos 2w_nx]\,dx=\frac{1}{4}-\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi}{2(2n-1)\pi}=\boxed{\frac{1}{4}}$ (como en formulario).

b] $c_n=4\int_0^{1/2}x\operatorname{sen}(2n-1)\pi x\,dx=-\frac{4x}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\pi x\Big]_0^{1/2}+\frac{4}{(2n-1)\pi}\int_0^{1/2}\cos(2n-1)\pi x=\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2}$.

Por tanto: $\boxed{x=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}=\frac{4}{\pi^2}\Big[\operatorname{sen}\pi x-\frac{1}{9}\operatorname{sen}3\pi x+\frac{1}{25}\operatorname{sen}5\pi x+\cdots\Big]$.

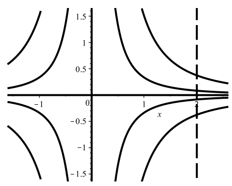
3. Sea $2yu_y-xu_x=2u+4y^2$. Hallar su solución general y la que satisface el dato inicial $u(2,y)=0$. [0.5 puntos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}$ lineal (mejor que separable). $y=Ce^{\int(-2/x)dx}=Ce^{\ln x^{-2}}=\frac{C}{x^2}$. Características: $\boxed{x^2y=C}$.

$\begin{cases} \xi=x^2y \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=x^2u_\xi+u_\eta \\ u_x=2xyu_\xi \end{cases} \to u_\eta=\frac{u}{y}+2y=\frac{u}{\eta}+2\eta$, $u=p(\xi)\eta+\eta\int 2\,d\eta=p(\xi)\eta+2\eta^2$. $\boxed{u(x,y)=p(x^2y)y+2y^2}$.

$\Big[$Más largo: $\begin{cases} \xi=x^2y \\ \eta=x \end{cases} \to u_\eta=-\frac{2}{x}u-\frac{4y^2}{x}=-\frac{2}{\eta}u-\frac{4\xi^2}{\eta^5}$. $u=\frac{p^*(\xi)}{\eta^2}+\frac{2\xi^2}{\eta^4}=\frac{p^*(x^2y)}{x^2}+2y^2\Big]$.

Imponiendo el dato inicial:



$$u(2,y)=p(4y)y+2y^2=0,\ p(4y)=-2y \to p(v)=-\frac{v}{2},\ \boxed{u(x,y)=2y^2-\frac{1}{2}x^2y^2}.$$

Comprobamos: $u(2,y)=0$, y además: $2yu_y-xu_x=2y(4y-x^2y)+x(xy^2)=8y^2-x^2y^2=2u+4y^2$.

[Como $x=2$ no era tangente a las características, la solución debía ser única].

3*. Sea $u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u_y-u_x=0$. Escribirla en forma canónica y hallar su solución general y la que satisface los datos iniciales $u(x,0)=0$, $u_y(x,0)=1$. [0.5 puntos]

$B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases} \xi=x+y \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_x=u_\xi \\ u_y=u_\xi+u_\eta \end{cases}$, $\begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi} \\ u_{xy}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta} \\ u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \end{cases}$, $\boxed{u_{\eta\eta}+u_\eta=0}$ forma canónica $\mu^2+\mu=0 \to$

$u=p(\xi)+q(\xi)e^{-\mu}=\boxed{p(x+y)+q(x+y)e^{-y}}$ solución general $u_y(x,y)=[p'(x+y)+q'(x+y)-q(x+y)]e^{-y}$.

Imponiendo datos: $\begin{cases} p(x)+q(x)=0 \to p'(x)+q'(x)=0 \searrow & p(x)=1. \\ p'(x)+q'(x)-q(x)=1, & q(x)=-1 \nearrow \end{cases}$ Por tanto: $\boxed{u(x,y)=1-e^{-y}}$ [fácil de comprobar].

[La ecuación $u_{yy}-2u_{xy}+2u_{xx}+u_y-u_x=0$ es elíptica, el cambio sale el mismo y la forma canónica (no resoluble) es: $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0$].