Soluciones del control 1 de Métodos Matemáticos (4 de noviembre de 2014)

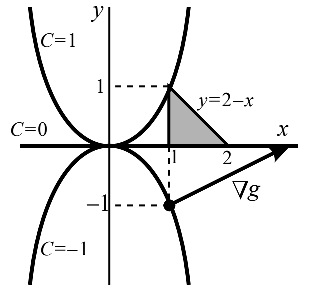
1. Sea $f(x,y)=\frac{y}{x^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=C$ con $C=0,1,-1$. Hallar y dibujar $\nabla f(1,-1)$. Escribir la ecuación del plano tangente en el punto $(1,-1)$. Hallar $\operatorname{div}(\nabla f)$.
b] Hallar la integral doble $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D el triángulo de vértices $(1,0)$, $(2,0)$ y $(1,1)$. [0.55 puntos]

a] $f(x,y)=0 \to \boxed{y=0}$, $f(x,y)=\pm1 \to$ parábolas $\boxed{y=\pm x^2}$.

$\nabla f=(f_x,f_y)=(-\frac{2y}{x^3},\frac{1}{x^2})$. $\nabla f(1,-1)=\boxed{(2,1)}$.

Plano tangente: $z=-1+2(x-1)+1(y+1)$, $\boxed{z=2x+y-2}$.

$\operatorname{div}(\nabla f)=\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{\frac{6y}{x^4}}$.



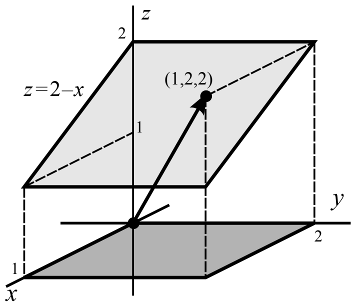
b] $\int_1^2\int_0^{2-x}\frac{y}{x^2}\,dy\,dx=\int_1^2\big[\frac{1}{2}-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\big]dx=\frac{1}{2}+\Big[-2\ln x-\frac{2}{x}\Big]_1^2=\boxed{\frac{3}{2}-2\ln 2}$.

Algo más largo: $\int_0^1\int_1^{2-y}\frac{y}{x^2}\,dx\,dy=\int_0^1\big[y-\frac{y}{2-y}\big]dy=\int_0^1\big[y+1-\frac{2}{2-y}\big]dy=\frac{1}{2}+1+2[\ln(2-y)]_0^1=\boxed{\frac{3}{2}-2\ln 2}$.

2. Sea $g(x,y,z)=y\,e^{2x-z}$. **a]** Hallar $\nabla g(1,-1,2)$ y escribir uno de los infinitos vectores unitarios $\mathbf{u}$ para los que la derivada de g en $(1,-1,2)$ en la dirección del vector $\mathbf{u}$ es 0 . **Elegir entre b] y b*]:**
b] Calcular $\iiint_V g$, siendo V el sólido limitado por los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$ y $z=2-x$.
b*] Hallar el valor de la integral de línea de i) g , ii) ∇g desde $(0,0,0)$ hasta $(1,2,2)$ a lo largo del segmento que une los puntos. [0.45 puntos]

a] $\nabla g=(2y\,e^{2x-z},e^{2x-z},-y\,e^{2x-z})$. $\nabla g(1,-1,2)=\boxed{(-2,1,1)}$. $D_{(a,b,c)}g(1,-1,2)=\nabla g(1,-1,2)\cdot(a,b,c)=b+c-2a$.

La $D_{\mathbf{v}}$ es nula, por ejemplo, según el vector $(1,1,1)$. Haciéndolo unitario: $\boxed{\mathbf{u}=\Big(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)}$ (perpendicular al gradiente).



b] En $[0,1]\times[0,2]$ está $z=2-x$ por encima de $z=0$ (no se precisa el dibujo).

$$\iiint_V g=\int_0^2\int_0^1\int_0^{2-x}y\,e^{2x-z}\,dz\,dx\,dy=\int_0^2 y\,dy\int_0^1[e^{2x}-e^{3x-2}]\,dx$$

$$=2\Big[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{3x-1}\Big]_0^1=\boxed{e^2-1-\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}e^{-2}}\,.$$

b*] i) $\mathbf{c}(t)=(t,2t,2t)$ (salta a la vista). $\mathbf{c}'(t)=(1,2,2)$. $\|\mathbf{c}'(t)\|=\sqrt{1+4+4}=3$.

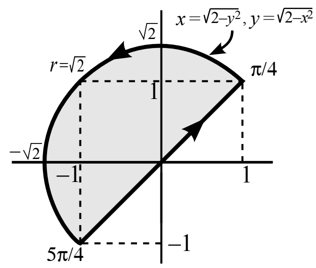
$$\int_{\mathbf{c}}g\cdot ds=\int_0^1 g(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt=\int_0^1 6t\,dt=\boxed{3}\,.$$

ii) Más fácil: $\int_{\mathbf{c}}\nabla g\cdot d\mathbf{s}=g(1,2,2)-g(0,0,0)=\boxed{2}$. [Directamente: $\int_0^1(4t,1,-2t)\cdot(1,2,2)\,dt=\int_0^1 2\,dt=2$].

3. Sea $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,xy)$. **a]** Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})$. Precisar si $\mathbf{f}$ deriva o no de un potencial.
b] Comprobar el teorema de Green $\iint_D[g_x-f_y]\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$, con D región dada por $x^2+y^2\leq 2$ e $y\geq x$.
[D es un semicírculo girado y la integral doble conviene hacerla en polares]. [0.5 puntos]

a] $\operatorname{div}\mathbf{f}=0+x=\boxed{x}$. $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})=\boxed{(1,0)}$. Como $g_x-f_y=-y\not\equiv 0$, **no deriva de un potencial**.

b] $\iint_D -y\,dx\,dy=-\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\operatorname{sen}\theta=\big[\frac{1}{3}r^3\big]_0^{\sqrt{2}}[\cos\theta]_{\pi/4}^{5\pi/4}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big[-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big]=\boxed{-\frac{4}{3}}$.



En cartesianas (de las dos formas) es más complicado. Por ejemplo:

$$\iint_D f=-\int_{-\sqrt{2}}^{-1}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}y\,dy\,dx-\int_{-1}^{1}\int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}}y\,dy\,dx=-\int_{-\sqrt{2}}^{-1}0\,dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2-2+x^2}{2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}[x^2-1]\,dx=\frac{2}{3}[x^3]_0^1-2=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}\,.$$

Parametrizaciones sencillas: $\mathbf{c_1}(t)=(t,t)$, $t\in[-1,1]$ (en sentido correcto).

$\mathbf{c_2}(t)=(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\operatorname{sen}t)$, $t\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$ (también en buen sentido).

$$\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^{1}(t^2,t^2)\cdot(1,1)\,dt+\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(2\operatorname{sen}^2t,2\operatorname{sen}t\cos t)\cdot(-\sqrt{2}\operatorname{sen}t,\sqrt{2}\cos t)$$

$$=\int_{-1}^{1}2t^2\,dt+2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}[\underset{\underset{2sc^2-s}{\|}}{sc^2-s^3}]\,dt=\frac{4}{3}+2\sqrt{2}\Big[\cos t-\frac{2}{3}\cos^3t\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4}=\frac{4}{3}+2\Big[1+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big]=\boxed{-\frac{4}{3}}\,.$$

Soluciones del control 2 de Métodos Matemáticos (13 de enero de 2015)

1. Hallar la solución general [$y(x)$ y $u(x,y)$ respectivamente] de: i) $x^2y''=2y$, ii) $x^2u_x=2u$. [0.2 puntos]

i) $x^2y''-2y=0$ es de Euler. $\mu(\mu-1)-2=\mu^2-\mu-2=(\mu-2)(\mu+1)=0 \to \boxed{y=c_1x^2+c_2x^{-1}}$, c_1,c_2 constantes.

ii) Lineal con una constante para cada y: $u(x,y)=p(y)\mathrm{e}^{\int(2/x^2)\,dx}=\boxed{p(y)\,\mathrm{e}^{-2/x}}$, con p función arbitraria.

2. a] Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$. Hallar (usando el formulario) el desarrollo de $f(x)=1-x$ en serie de autofunciones del problema, escribiendo en concreto los 3 primeros términos no nulos de la serie.

b] Sea $y''-y=3\mathrm{e}^{-2x}$. i) Hallar su solución general y la que satisface los datos iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
ii) ¿Cuántas soluciones de la ecuación cumplen los datos de contorno $y'(0)=y'(1)=0$? [corto] [0.5 puntos]

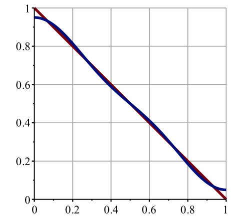
a] El formulario nos da autovalores $\lambda_n=n^2\pi^2$, $n=0,1,\dots$, autofunciones $y_n=\{\cos n\pi x\}$ [$y_0=\{1\}$] e $\langle y_n,y_n\rangle$.

$\Rightarrow 1-x=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ con $a_n=\frac{2}{1}\int_0^1(1-x)\cos n\pi x\,dx$ (poniendo $\frac{a_0}{2}$ vale también para 0). Por tanto:

$a_0=2\int_0^1(1-x)\,dx=2-[x^2]_0^1=1$. $a_n=\frac{2(1-x)}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x\Big]_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\operatorname{sen} n\pi x\,dx=\frac{2}{n^2\pi^2}[1-\cos n\pi]$ para $n>1$ $=0$ si n par

Por tanto: $\boxed{1-x=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x+\frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi x+\cdots}$

[A la derecha, un dibujo hecho con maple de $1-x$ y de la suma de esos 3 términos].



b] i) $\mu=\pm1$ e $y_p=A\mathrm{e}^{-2x}$, $4A-A=3 \to$ solución general $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}$.

Imponiendo los datos: $\begin{matrix} c_1+c_2+1=1 \\ c_1-c_2-2=0 \end{matrix} \to c_1=1$, $c_2=-1$. $\boxed{y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}$.

ii) El problema homogéneo tiene sólo la solución $y\equiv0$ ($\lambda=-1$ no es autovalor) $\Rightarrow$ el no homogéneo tiene **solución única**.

3. Sea [E] $u_{tt}-u_{xx}=6t$. **a]** Escribir [E] en forma canónica. **b]** Hallar la solución de [E] que cumple los datos iniciales $u(x,0)=u_t(x,0)=0$ [mejor que basarse en **a]** es usar D'Alembert]. [0.4 puntos]

a] Las características de la ecuación de ondas son $\begin{cases}\xi=x+t \\ \eta=x-t\end{cases}$, $\begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{tt}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases}$, $-4u_{\xi\eta}=6t$, $\boxed{u_{\xi\eta}=\frac{3}{4}(\eta-\xi)}$
[o copiando las características de la hiperbólicas] $t=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$ forma canónica

b] Con D'Alembert directamente: $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]}6\tau\,ds\,d\tau=\int_0^t 6\tau[t-\tau]\,d\tau=3t\tau^2-2\tau^3\Big]_0^t=\boxed{t^3}$.

Lo más corto. Como $v=t^3$ es solución clara de la EDP, con $w=u-v \to \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=w_t(x,0)=0\end{cases} \to w=0$, $u=t^3$.

Mucho peor usando **a]**: $u=\frac{3}{8}(\xi\eta^2-\xi^2\eta)+p(\xi)+q(\eta)=\frac{3}{4}(t^3-x^2t)+p(x+t)+q(x-t)\stackrel{d.i.}{\to}p(x)=-q(x)=\frac{x^3}{8}\uparrow$

[Lo que no tiene sentido es usar separación de variables, pues es en todo $\mathbf{R}$ y no hay condiciones de contorno].

4. a] Hallar la solución $T(t)$ de la ecuación $T'+9T=t$ que cumple el dato inicial $T(0)=0$. [0.5 puntos]

b] Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=t\cos 3x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}),\ t>0 \\ u(x,0)=u_x(0,t)=u(\frac{\pi}{2},t)=0\end{cases}$ [probando una serie con autofunciones del problema homogéneo].

a] $T=C\mathrm{e}^{-9t}+\mathrm{e}^{-9t}\underbrace{\int t\,\mathrm{e}^{9t}dt}_{\frac{t}{9}\mathrm{e}^{9t}-\frac{1}{9}\int\mathrm{e}^{9t}dt}=C\mathrm{e}^{-9t}+\frac{t}{9}-\frac{1}{81}$ (o probando $y_p=At+B \to A+9At+9B=t$, $A=\frac{1}{9}$, $B=-\frac{1}{81}$).

$T(0)=C-\frac{1}{81}=0 \to \boxed{T=\frac{1}{81}(\mathrm{e}^{-9t}+9t-1)}$.

b] Las autofunciones vienen dadas por: $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\frac{\pi}{2})=0\end{cases} \xrightarrow[\text{(formulario)}]{\text{(formulario)}} X_n=\{\cos(2n-1)x\}$. Probamos, pues:

$u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos(2n-1)x \to \sum\limits_{n=1}^{\infty}[T_n'+(2n-1)^2T_n]\cos(2n-1)x=t\cos 3x=0\cos x+t\cos 3x+0\cos 5x+\cdots$

Y del dato incial: $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos(2n-1)x=0 \Rightarrow T_n(0)=0\ \forall n$.

La única solución que no es $T_n\equiv0$ es para $n=2$: $T_2'+9T_2=t$, $T_2(0)=0 \xrightarrow{\mathbf{a]}} \boxed{u(x,t)=\frac{1}{81}(\mathrm{e}^{-9t}+9t-1)\cos 3x}$.

Soluciones del control 2* de Métodos Matemáticos (12 de enero de 2015)

1. Hallar la solución general de $x^2y''+xy'-4y=4$. [0.2 puntos]

Euler con $\mu(\mu-1)+\mu-4=\mu^2-2=(\mu-2)(\mu+2)=0$ e $y_p=-1$ a ojo $\to$ $\boxed{y=c_1x^2+c_2x^{-2}-1}$.

Sin vista: $|W|=\begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3}\end{vmatrix}=-4x^{-1}$. $y_p=x^{-2}\int\frac{x^2 4x^{-2}}{-4x^{-1}}dx-x^2\int\frac{x^{-2}4x^{-2}}{-4x^{-1}}dx=-x^{-2}\int x\,dx+x^2\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$.

2. Sea $\begin{cases} y''+y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0\end{cases}$. Escribir la ecuación en forma autoadjunta. [0.4 puntos]
Precisar si $\lambda=-2$ y $\lambda=0$ son o no autovalores del problema.
¿Cuántas soluciones de $y''+y'-2y=4x$ cumplen esos datos $y'(0)=y'(1)=0$? [corto]

Multiplicando por e^x: $\boxed{(e^xy')'+\lambda e^xy=0}$ forma autoadjunta.

Como $\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0$ todos los $\lambda\geq 0$ y $\lambda=-2$ no puede ser autovalor. O directamente:

$\mu^2+\mu-2=0,\ \mu=1,-2$, $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}$, $y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}$, $\begin{cases} y'(0)=c_1-2c_2=0 \\ y'(1)=c_1e-2c_2e^{-2}=0\end{cases}$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ e & -2e^{-2}\end{vmatrix}\neq 0\to c_1=c_2=0$.

$\mu^2+\mu=0,\ \mu=0,-1$, $y=c_1+c_2e^{-x}$, $y'=-c_2e^{-x}$, $\begin{cases} y'(0)=-c_2=0 \\ y'(1)=-c_2e^{-1}=0\end{cases}\to c_2=0$ y cualquier c_1. $\lambda=0$ es autovalor.
[$y_0=\{1\}$ autofunción]

Como si $\lambda=-2$ el problema homogéneo tiene sólo la solución $y\equiv 0$, el no homogéneo tiene **solución única**.

3. Sea [E] $u_y-2u_x=(x+2y)u$. Hallar sus características y utilizando la regla de la cadena, la ecuación para u_η.
Hallar la solución general de [E] y la única que satisface el dato inicial $u(x,1)=2$. [0.4 puntos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$. $\int 2\,dy=-\int dx+C$. Características: $\boxed{x+2y=C}$.

Haciendo $\begin{cases}\xi=x+2y \\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=2u_\xi+u_\eta \\ u_x=u_\xi\end{cases}\to u_\eta=(x+2y)u=\xi u$. $u=p(\xi)e^{\xi\eta}=\boxed{p(x+2y)e^{xy+2y^2}}$.

[O más largo: $\begin{cases}\xi=x+2y \\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=2u_\xi \\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}\to -2u_\eta=(x+2y)u$, $u_\eta=-\frac{\xi}{2}u$. $u=p^*(\xi)e^{-\xi\eta/2}=p^*(x+2y)e^{-x^2/2-xy}$].

Imponiendo el dato inicial: $u(x,1)=p(x+2)e^{x+2}=2\to p(v)=2e^{-v}$, $\boxed{u(x,y)=2e^{xy-x-2y+2y^2}=2e^{(y-1)(x+2y)}}$.

Comprobamos: $u(x,1)=1$, y además: $u_y-2u_x=(x-2+4y-2y+2)e^{\cdots}=(x+2y)e^{\cdots}$.

[Como los datos se dan sobre una recta no característica, la solución debía ser única].

4. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0\end{cases}$.
a] Resolverla por separación de variables [separar $u=XT$, hallar las X_n y las T_n, y determinar los coeficientes de una serie con los datos iniciales].
b] Hallar el valor de $u(2,2)$ mediante la fórmula de D'Alembert. [Tras extender la $g(x)=x$ de forma impar y 2π-periódica]. [0.6 puntos]

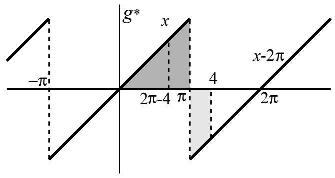
a] En el formulario están las ecuaciones que salen al separar y de los datos 0 se deduce $X(0)=X(\pi)=0$ y $T(0)=0$.

$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}\xrightarrow{\text{(formulario)}}\lambda_n=n^2$, $X_n=\{\operatorname{sen} nx\}$, $n=1,2,\dots$ y $\begin{cases} T''+\lambda T=0 \\ T(0)=0\end{cases}\to T_n=\{\operatorname{sen} nt\}$.

Probamos $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen} nt\operatorname{sen} nx\to u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\operatorname{sen} nx=x\to nc_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\operatorname{sen} nx\,dx=\frac{-2\cos n\pi}{n}+0$.

Por tanto, la solución es: $\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}\operatorname{sen} nt\operatorname{sen} nx}$

b] La solución es $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*$, con g^* extensión impar y 2π-periódica de x.



$u(2,2)=\frac{1}{2}\int_0^4 g^*=\frac{1}{2}\int_0^\pi s\,ds+\frac{1}{2}\int_\pi^4(s-2\pi)\,ds=\frac{\pi^2}{4}+\frac{16-\pi^2}{4}-4\pi+\pi^2=\boxed{(\pi-2)^2}$.

O como es impar respecto a π: $u(2,2)=\frac{1}{2}\int_0^{2(\pi-2)}s\,ds=(\pi-2)^2$.

[Con ordenador: sumando 10 términos de la serie con $x=t=2$ se obtiene $u(2,2)\approx 1.3047$ y es $(\pi-2)^2\approx 1.3032$].