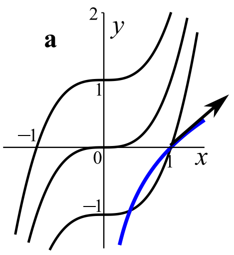
Soluciones de los controles 1 de Métodos Matemáticos (3 de noviembre de 2015)

1a. Sean $f(x,y)=(x^3-y)^2$ y $\bar{c}(t)=(t,\ln t)$. a) Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1. [0.4 puntos]
b) Hallar la derivada de f en el punto $(1,0)$ en la dirección del vector unitario tangente la curva dada por $\bar{c}$.

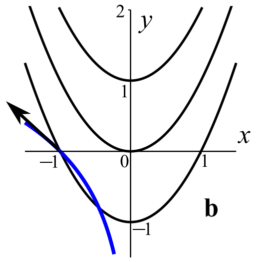
1b. Sean $f(x,y)=(y-x^2)^2$ y $\bar{c}(t)=(-e^t,t)$. a) Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1. [0.4 puntos]
b) Hallar la derivada de f en el punto $(-1,0)$ en la dirección del vector unitario tangente la curva dada por $\bar{c}$.

1c. Sean $f(x,y)=(2x+y)^4$ y $\bar{c}(t)=(t,e^{-t})$. a) Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1. [0.4 puntos]
b) Hallar la derivada de f en el punto $(0,1)$ en la dirección del vector unitario tangente la curva dada por $\bar{c}$.

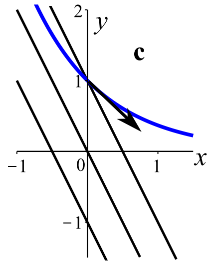
1d. Sean $f(x,y)=(y+x^2)^2$ y $\bar{c}(t)=(t,\ln t)$. a) Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1. [0.4 puntos]
b) Hallar la derivada de f en el punto $(1,0)$ en la dirección del vector unitario tangente la curva dada por $\bar{c}$.



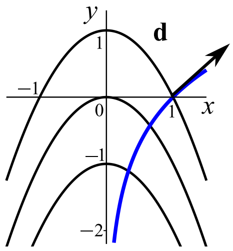
$f=0,1 \to y=x^3,\ x^3\pm1$.
$\nabla=(6x^2(x^3-y),2(y-x^3))$
$\bar{c}'=(1,\frac{1}{t})\xrightarrow{t=1}(1,1)$,
$\|\|=\sqrt{2}$. $D_{\mathbf{u}}f(1,0)=$
$(6,-2)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\boxed{2\sqrt{2}}$.



$f=0,1 \to y=x^2,\ x^2\pm1$.
$\nabla=(4x(x^2-y),2(y-x^2))$
$\bar{c}'=(-e^t,1)\xrightarrow{t=0}(-1,1)$,
$\|\|=\sqrt{2}$. $D_{\mathbf{u}}f(-1,0)=$
$(-4,-2)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\boxed{\sqrt{2}}$.



$f=0,1 \to y=-2x,\ -2x\pm1$.
$\nabla=(8(2x-y)^3,4(2x-y)^3)$
$\bar{c}'=(1,-e^{-t})\xrightarrow{t=0}(1,-1)$,
$\|\|=\sqrt{2}$. $D_{\mathbf{u}}f(0,1)=$
$(8,4)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\boxed{2\sqrt{2}}$.



$f=0,1 \to y=-x^2,-x^2\pm1$.
$\nabla=(4x(y+x^2),2(y+x^2))$
$\bar{c}'=(1,\frac{1}{t})\xrightarrow{t=1}(1,1)$,
$\|\|=\sqrt{2}$. $D_{\mathbf{u}}f(1,0)=$
$(4,2)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\boxed{3\sqrt{2}}$.

2a. Sea $g(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$. a) Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(-2,0)$. Hallar Δg (mejor en polares).
b) Calcular la integral doble $\iint_D g$, siendo D la parte del círculo $x^2+y^2\le 9$ y con $x\ge0$, $y\ge0$. [0.45 puntos]

2b. Sea $g(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$. a) Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(-3,0)$. Hallar Δg (mejor en polares).
b) Calcular la integral doble $\iint_D g$, siendo D la parte del círculo $x^2+y^2\le 4$ y con $x\ge0$, $y\le0$. [0.45 puntos]

2c. Sea $g(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$. a) Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(0,-3)$. Hallar Δg (mejor en polares).
b) Calcular la integral doble $\iint_D g$, siendo D la parte del círculo $x^2+y^2\le 9$ y con $x\ge0$, $y\ge0$. [0.45 puntos]

2d. Sea $g(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$. a) Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(0,-2)$. Hallar Δg (mejor en polares).
b) Calcular la integral doble $\iint_D g$, siendo D la parte del círculo $x^2+y^2\le 4$ y con $x\le0$, $y\ge0$. [0.45 puntos]

a y b: a) $\nabla g=((x^2+y^2)^{1/2}+x^2(x^2+y^2)^{-1/2},\ xy(x^2+y^2)^{-1/2})=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(2x^2+y^2,xy)=$ $(4,0)$ en $(-2,0)$. $(6,0)$ en $(-3,0)$.

Planos tangentes: $z=-4+4(x+2)$, $\boxed{z=4x+4}$ y $z=-9+6(x+3)$, $\boxed{z=6x+9}$.

$g(r,\theta)=r^2\cos\theta$. $g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}=2\cos\theta+2\cos\theta-\cos\theta=\boxed{3\cos\theta}=3x(x^2+y^2)^{-1/2}$.

Más largo: $g_{xx}+g_{yy}=3x(x^2+y^2)^{-1/2}-x^3(x^2+y^2)^{-3/2}+x(x^2+y^2)^{-1/2}-xy^2(x^2+y^2)^{-3/2}\uparrow$

b) $\int_0^{\pi/2}\!\int_0^3 r^3\cos\theta=[\frac{1}{4}r^4]_0^3[\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{81}{4}}$ e $\int_{-\pi/2}^0\!\int_0^2 r^3\cos\theta=[\frac{1}{4}r^4]_0^2[\operatorname{sen}\theta]_{-\pi/2}^0=\boxed{4}$.

c y d: a) $\nabla g=(xy(x^2+y^2)^{-1/2},\ (x^2+y^2)^{1/2}+y^2(x^2+y^2)^{-1/2})=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xy,x^2+2y^2)=$ $(0,6)$ en $(0,-3)$. $(0,4)$ en $(0,-2)$.

Planos tangentes: $z=-9+6(y+3)$, $\boxed{z=6y+9}$ y $z=-4+4(y+2)$, $\boxed{z=4y+4}$.

$g(r,\theta)=r^2\operatorname{sen}\theta$. $g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}=2\operatorname{sen}\theta+2\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta=\boxed{3\operatorname{sen}\theta}=3y(x^2+y^2)^{-1/2}$.

Más largo: $g_{xx}+g_{yy}=y(x^2+y^2)^{-1/2}-x^2y(x^2+y^2)^{-3/2}+3y(x^2+y^2)^{-1/2}-y^3(x^2+y^2)^{-3/2}\uparrow$

b) $\int_0^{\pi/2}\!\int_0^3 r^3\operatorname{sen}\theta=[\frac{1}{4}r^4]_0^3[-\cos\theta]_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{81}{4}}$ e $\int_{\pi/2}^{\pi}\!\int_0^2 r^3\operatorname{sen}\theta=[\frac{1}{4}r^4]_0^2[-\cos\theta]_{\pi/2}^{\pi}=\boxed{4}$.

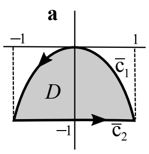
3. Comprobar el teorema de Green $\iint_D [g_x - f_y]\,dx\,dy = \oint_{\partial D} \bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}$, para: [0.4 puntos]

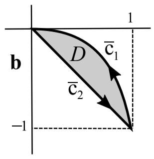
a. $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(y,2x)$ y D región limitada por $y=-x^2$ e $y=-1$.

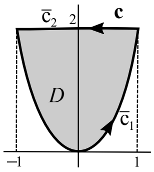
b. $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(2,x)$ y D región limitada por $y=-x^3$ e $y=-x$ en el cuarto cuadrante

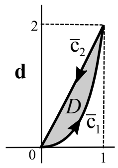
c. $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(2y,3x)$ y D región limitada por $y=2x^2$ e $y=2$.

d. $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(-y,1)$ y D región limitada por $y=2x^3$ e $y=2x$ en el primer cuadrante.









En los cuatro casos, $g_x - f_y = 1$ (y la $\iint_D$ mide el área de las regiones y debe ser positiva).

a. $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \boxed{\frac{4}{3}}$. $\bar{c}_1(x)=(x,-x^2)$, $x\in[1,-1]$, $\bar{c}_2(x)=(x,-1)$, $x\in[-1,1]$ $\to$

$\oint_{\partial D}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \int_1^{-1}(-x^2,2x)\cdot(1,-2x)\,dx + \int_{-1}^{1}(-1,2x)\cdot(1,0)\,dx = \int_{-1}^{1}5x^2\,dx + \int_{-1}^{1}(-1)\,dx = \frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$.

b. $\int_0^1\int_{-x}^{-x^3} dy\,dx = \int_0^1 (x-x^3)\,dx = \boxed{\frac{1}{4}}$. $\bar{c}_1(x)=(x,-x^3)$, $x\in[1,0]$, $\bar{c}_2(x)=(x,-x)$, $x\in[0,1]$ $\to$

$\oint_{\partial D}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \int_1^{0}(2,x)\cdot(1,-3x^2)\,dx + \int_0^1(2,x)\cdot(1,-1)\,dx = \int_1^0(2-3x^3)\,dx + \int_0^1(2-x)\,dx = \frac{1}{4}$.

c. $\int_{-1}^1\int_{2x^2}^{2} dy\,dx = \int_{-1}^1 (2-2x^2)\,dx = \boxed{\frac{8}{3}}$. $\bar{c}_1(x)=(x,2x^2)$, $x\in[-1,1]$, $\bar{c}_2(x)=(x,2)$, $x\in[1,-1]$ $\to$

$\oint_{\partial D}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \int_{-1}^{1}(4x^2,3x)\cdot(1,4x)\,dx + \int_1^{-1}(4,3x)\cdot(1,0)\,dx = \int_{-1}^1 16x^2\,dx + \int_1^{-1}4\,dx = \frac{32}{3}-8=\frac{8}{3}$.

d. $\int_0^1\int_{2x^3}^{2x} dy\,dx = \int_0^1 (2x-2x^3)\,dx = \boxed{\frac{1}{2}}$. $\bar{c}_1(x)=(x,2x^3)$, $x\in[0,1]$, $\bar{c}_2(x)=(x,2x)$, $x\in[1,0]$ $\to$

$\oint_{\partial D}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s} = \int_0^{1}(-2x^3,1)\cdot(1,6x^2)\,dx + \int_1^{0}(-2x,1)\cdot(1,2)\,dx = \int_0^1(6x^2-2x^3)\,dx + \int_1^0(2-2x)\,dx = \frac{1}{2}$.

4a. Sea $\bar{\mathrm{g}}(x,y,z)=(x^2,z,y)$. a) Hallar $\operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}$ y $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{g}}$. **Elegir entre b) y b*):** [0.45 puntos]

b) Si $\bar{c}(t)=(t,\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,\pi]$, hallar la longitud de la curva dada por $\bar{c}$ y la integral de línea $\int_{\bar{c}}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{s}$.

b*) Calcular $\iiint_V \operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}$, siendo V el sólido limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $x+y=2$, $z=0$ y $z=1$.

4b. Sea $\bar{\mathrm{g}}(x,y,z)=(z,y^2,x)$. a) Hallar $\operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}$ y $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{g}}$. **Elegir entre b) y b*):** [0.45 puntos]

b) Si $\bar{c}(t)=(\cos t,t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,\pi]$, hallar la longitud de la curva dada por $\bar{c}$ y la integral de línea $\int_{\bar{c}}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{s}$.

b*) Calcular $\iiint_V \operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}$, siendo V el sólido limitado por los planos $x=0$, $x=2$, $y=0$, $z=0$ y $z=1-y$.

4c. Sea $\bar{\mathrm{g}}(x,y,z)=(2y,2x,z^2)$. a) Hallar $\operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}$ y $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{g}}$. **Elegir entre b) y b*):** [0.45 puntos]

b) Si $\bar{c}(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t,t)$, $t\in[0,\pi]$, hallar la longitud de la curva dada por $\bar{c}$ y la integral de línea $\int_{\bar{c}}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{s}$.

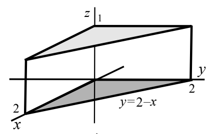
b*) Calcular $\iiint_V \operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}$, siendo V el sólido limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $y=2$, $z=0$ y $z=1-x$.

4d. Sea $\bar{\mathrm{g}}(x,y,z)=(3x^2,z,y)$. a) Hallar $\operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}$ y $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{g}}$. **Elegir entre b) y b*):** [0.45 puntos]

b) Si $\bar{c}(t)=(t,\operatorname{sen} t,\cos t)$, $t\in[0,\pi]$, hallar la longitud de la curva dada por $\bar{c}$ y la integral de línea $\int_{\bar{c}}\bar{\mathrm{g}}\cdot d\bar{s}$.

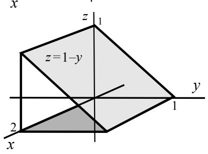
b*) Calcular $\iiint_V \operatorname{div}\bar{\mathrm{g}}$, siendo V el sólido limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $z=0$ y $z=2$.

Para todos es $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{g}}=\bar{0}$ (son conservativos) y es $\|\bar{c}'(t)\|=\sqrt{2} \Rightarrow L=\int_0^\pi\sqrt{2}\,dt=\boxed{\pi\sqrt{2}}$.



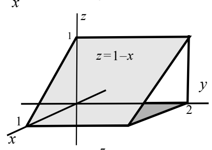
a. $U=\frac{1}{3}x^3+yz$, $\int_{\bar{c}}\bar{\mathrm{g}} = U(\pi,-1,0)-U(0,1,0)=\boxed{\frac{1}{3}\pi^3}=\int_0^\pi(t^2+\underbrace{\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t}_{\cos 2t})\,dt$.

$\iiint_V \operatorname{div}\bar{\mathrm{g}} = \int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^1 2x\,dz\,dy\,dx = \int_0^2 2x(2-x)\,dx = \boxed{\frac{8}{3}}$.



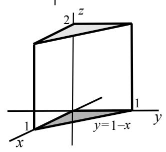
b. $U=\frac{1}{3}y^3+xz$, $\int_{\bar{c}}\bar{\mathrm{g}} = U(-1,\pi,0)-U(1,0,0)=\boxed{\frac{1}{3}\pi^3}=\int_0^\pi(t^2+\underbrace{\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t}_{\cos 2t})\,dt$.

$\iiint_V \operatorname{div}\bar{\mathrm{g}} = \int_0^2\int_0^1\int_0^{1-y} 2y\,dz\,dy\,dx = 4\int_0^1 y(1-y)\,dy = \boxed{\frac{2}{3}}$.



c. $U=\frac{1}{3}z^3+2xy$, $\int_{\bar{c}}\bar{\mathrm{g}} = U(0,-1,\pi)-U(0,1,\pi)=\boxed{\frac{1}{3}\pi^3}=\int_0^\pi(t^2+\underbrace{2\cos^2 t-2\operatorname{sen}^2 t}_{2\cos 2t})\,dt$.

$\iiint_V \operatorname{div}\bar{\mathrm{g}} = \int_0^1\int_0^2\int_0^{1-x} 2z\,dz\,dy\,dx = \boxed{\frac{2}{3}}$.



d. $U=x^3+yz$, $\int_{\bar{c}}\bar{\mathrm{g}} = U(\pi,0,-1)-U(0,0,1)=\boxed{\pi^3}=\int_0^\pi(3t^2+\underbrace{\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t}_{\cos 2t})\,dt$.

$\iiint_V \operatorname{div}\bar{\mathrm{g}} = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^2 6x\,dz\,dy\,dx = \boxed{2}$.

Soluciones del control 2 de Métodos Matemáticos (12 de enero de 2016)

1. Sea $y''+4y=8x^2$. Hallar su solución general y la que cumple los datos iniciales $y(0)=y'(0)=0$. [0.3 puntos]

$\mu^2+4=0,\ \mu=\pm 2\mathrm{i}$ e $y_p=Ax^2+Bx+C \ \to\ 2A+4Ax^2+4Bx+4C=8x^2 \ \to\ A=2,\ B=0,\ C=-1 \ \Rightarrow$

La solución general de la ecuación es $\boxed{y = c_1\cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + 2x^2-1}$.

Imponiendo los datos: $\begin{matrix} c_1-1=0 \\ 2c_2=0 \end{matrix} \ \to\ c_1=1,\ c_2=0$. La que cumple los datos es $\boxed{y=\cos 2x+2x^2-1}$.

2. a] Sea $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ 3y(1)+5y'(1)=y'(2)=0 \end{cases}$. Precisar si $\lambda=-1$ y $\lambda=0$ son o no autovalores dando la autofunción en el caso que lo sea. [Imponer los datos a la solución general en cada caso].

b] ¿Cuántas soluciones de $x^2y''+xy'=x$ cumplen esas mismas condiciones de contorno? [corto] [0.4 puntos]

a] Ecuación de Euler con $\mu(\mu-1)+\mu+\lambda=0,\ \mu=\pm\sqrt{-\lambda}$. Las soluciones, en cada caso, son:

$\lambda=-1:\ \mu=\pm 1,\ y=c_1x+c_2x^{-1},\ y'=c_1-c_2x^{-2} \xrightarrow{c.c.} \begin{cases} 8c_1-2c_2=0 \\ c_1-2^{-2}c_2=0 \end{cases} \to\ c_2=4c_1$. Autovalor, con $y_{-1}=\boxed{\{x+\frac{4}{x}\}}$.

$\lambda=0:\ \mu=0$ doble, $y=c_1+c_2\ln x,\ y'=c_2x^{-1} \xrightarrow{c.c.} \begin{cases} 3c_1+5c_2=0 \\ c_2/2=0 \end{cases} \to\ c_1=c_2=0$. No es autovalor.

b] El problema homogéneo tiene sólo la solución $y\equiv 0$ ($\lambda=0$ no era autovalor) $\Rightarrow$ el no homogéneo tiene **solución única**.

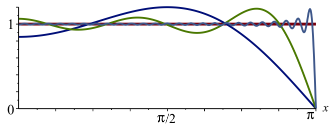
3. a] Escribir (utilizando el formulario) el desarrollo de $f(x)=1$ en serie de autofunciones de $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$.

b] Resolver $\begin{cases} u_t-4u_{xx}=0,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ para: i) $f(x)=1$, ii) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$. [0.6 puntos]

a] El formulario nos da $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4},\ X_n=\left\{\cos\frac{(2n-1)x}{2}\right\},\ n=1,2,\dots$, y la fórmula para calcular los c_n:

$$1=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\frac{(2n-1)x}{2} \ \to\ c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{4}{\pi(2n-1)}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^{\pi}=\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

Por tanto: $\boxed{1=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)x}{2}=\frac{4}{\pi}\cos\frac{x}{2}-\frac{4}{3\pi}\cos\frac{3x}{2}+\frac{4}{5\pi}\cos\frac{5x}{2}-\cdots}$



[A la derecha, un dibujo hecho con maple de 1 y las sumas de 2, 5 y 50 términos].

b] Separando variables en este problema homogéneo (está en formulario) y usando las condiciones de contorno:

$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$ que da los λ_n y X_n de **a]**, y además $T'=-4\lambda_nT=-(2n-1)^2T \ \to\ T_n=\left\{\mathrm{e}^{-(2n-1)^2t}\right\}$.

Probamos pues $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\mathrm{e}^{-(2n-1)^2t}\cos\frac{(2n-1)x}{2}$. Y por el dato incial: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{(2n-1)x}{2}=f(x)$.

Para i) se deduce que los c_n son los de arriba, y por tanto es: $\boxed{u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,\mathrm{e}^{-(2n-1)^2t}\cos\frac{(2n-1)x}{2}}$.

Para ii) es $c_n=1$ y los demás $c_n=0$, con lo que la solución es ahora: $\boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\cos\frac{x}{2}}$.

4. Sea [E] $u_y+2u_x=2yu$. Hallar sus características y, utilizando la regla de la cadena, la ecuación para u_η. Calcular la solución general de [E] y la única que satisface el dato inicial $u(x,1)=\mathrm{e}^x$. [0.4 puntos]

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$. $\int 2\,dy=\int dx+C$. Características: $\boxed{x-2y=C}$. [También válidas $y-\frac{x}{2}=C$, $2y-x=C$, ...].

Haciendo $\begin{cases} \xi=x-2y \\ \eta=y \end{cases} \to \begin{cases} u_y=-2u_\xi+u_\eta \\ u_x=u_\xi \end{cases} \to\ u_\eta=2yu=2\eta u$. $u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta^2}=\boxed{p(x-2y)\,\mathrm{e}^{y^2}}$.

$\Big[$O más largo: $\begin{cases} \xi=x-2y \\ \eta=x \end{cases} \to \begin{cases} u_y=-2u_\xi \\ u_x=u_\xi+u_\eta \end{cases} \to\ 2u_\eta=2yu,\ u_\eta=\frac{\eta-\xi}{2}u$. $u=p^*(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta^2/4-\xi\eta/2}=p^*(x-2y)\,\mathrm{e}^{xy-x^2/4}\Big]$.

Imponiendo el dato inicial: $u(x,1)=p(x-2)\,\mathrm{e}=\mathrm{e}^x \ \to\ p(v)=\mathrm{e}^{v+1}$, $\boxed{u(x,y)=\mathrm{e}^{x+y^2-2y+1}=\mathrm{e}^{x+(y-1)^2}}$.

Comprobamos: $u(x,1)=\mathrm{e}^x$, y además: $u_y+2u_x=(2y-2+2)\,\mathrm{e}^{\cdots}=2y\,\mathrm{e}^{\cdots}$.

[Como los datos se dan sobre una recta no característica, la solución debía ser única].