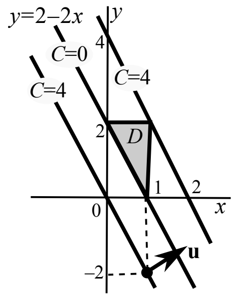
Soluciones de los controles de Métodos Matemáticos (8 de noviembre de 2016)

1a. Sea $f(x,y)=(2x+y-2)^2$. **a)** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 4 . **b)** Hallar Δf . **c)** Precisar para qué vector $\overline{u}$ unitario es mínima $D_{\overline{u}}\,f(1,-2)$. [0.6 puntos]
d) Calcular la integral doble $\iint_D f$, siendo D el triángulo de vértices $(1,0)$, $(0,2)$ y $(1,2)$.
[Los cálculos son cortos si no de desarrollan los paréntesis].



a) $C=0 \to y=2-2x$, $C=4 \to y=-4x$ e $y=4-2x$ (rectas paralelas).

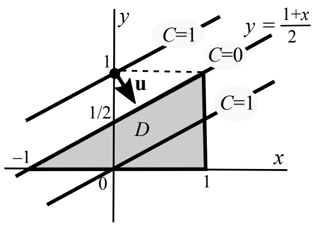
b) $\nabla f=\big(4(2x+y-2),2(2x+y-2)\big)$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{10}$.

c) $\nabla f(1,-2)=-4(2,1)$. $D_{\bar{u}}$ es mínima en sentido opuesto [o mirando las curvas de nivel]. $\boxed{\overline{u}=\big(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\big)}$.

d) $\iint_D f=\int_0^1\int_{2-2x}^2 f\,dy\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1\big[(2x+y-2)^3\big]_{2-2x}^2dx=\frac{8}{3}\int_0^1 x^3dx=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{2}{3}}$.

O bien: $\int_0^2\int_{1-y/2}^1 f\,dx\,dy=\frac{1}{6}\int_0^2\big[(2x+y-2)^3\big]_{1-y/2}^1dy=\frac{1}{6}\int_0^2 y^3dy=\frac{1}{6}\cdot\frac{16}{4}=\boxed{\frac{2}{3}}$.

1b. Sea $f(x,y)=(2y-x-1)^2$. **a)** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1 . **b)** Hallar Δf . **c)** Precisar para qué vector $\overline{u}$ unitario es mínima $D_{\overline{u}}\,f(0,1)$. [0.6 puntos]
d) Calcular la integral doble $\iint_D f$, siendo D el triángulo de vértices $(-1,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.
[Los cálculos son cortos si no de desarrollan los paréntesis].



a) $C=0 \to y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$, $C=1 \to y=\frac{x}{2}$ e $y=\frac{x}{2}+1$ (rectas paralelas).

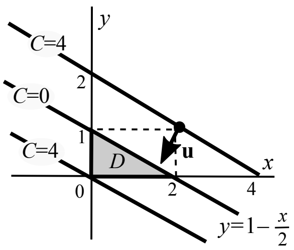
b) $\nabla f=\big(-2(2y-x-1),4(2y-x-1)\big)$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{10}$.

c) $\nabla f(0,1)=2(-1,2)$. $D_{\bar{u}}$ es mínima en sentido opuesto [o mirando las curvas de nivel]. $\boxed{\overline{u}=\big(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\big)}$.

d) $\iint_D f=\int_{-1}^1\int_0^{(1+x)/2} f\,dy\,dx=\frac{1}{6}\int_{-1}^1\big[(2y-x-1)^3\big]_0^{(1+x)/2}dx=\frac{1}{6}\int_{-1}^1(x+1)^3dx=\boxed{\frac{2}{3}}$.

O bien: $\int_0^1\int_{2y-1}^1 f\,dx\,dy=-\frac{1}{3}\int_0^1\big[(2y-x-1)^3\big]_{2y-1}^1dy=-\frac{8}{3}\int_0^1(y-1)^3dy=\boxed{\frac{2}{3}}$.

1c. Sea $f(x,y)=(2y+x-2)^2$. **a)** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 4 . **b)** Hallar Δf . **c)** Precisar para qué vector $\overline{u}$ unitario es mínima $D_{\overline{u}}\,f(2,1)$. [0.6 puntos]
d) Calcular la integral doble $\iint_D f$, siendo D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,1)$.
[Los cálculos son cortos si no de desarrollan los paréntesis].



a) $C=0 \to y=1-\frac{x}{2}$, $C=4 \to y=-\frac{x}{2}$ e $y=2-\frac{x}{2}$ (rectas paralelas).

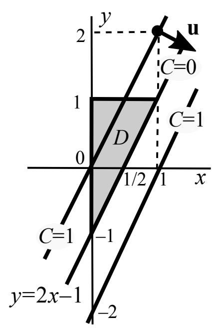
b) $\nabla f=\big(2(2y+x-2),4(2y+x-2)\big)$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{10}$.

c) $\nabla f(2,1)=4(1,2)$. $D_{\bar{u}}$ es mínima en sentido opuesto [o mirando las curvas de nivel]. $\boxed{\overline{u}=\big(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\big)}$.

d) $\iint_D f=\int_0^2\int_0^{1-x/2} f\,dy\,dx=\frac{1}{6}\int_0^2\big[(2y+x-2)^3\big]_0^{1-x/2}dx=-\frac{1}{3}\int_0^2(x-2)^3dx=\boxed{\frac{2}{3}}$.

O bien: $\int_0^1\int_0^{2-2y} f\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^1\big[(2y+x-2)^3\big]_0^{2-2y}dy=\frac{8}{3}\int_0^1(y-1)^3dy=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{2}{3}}$.

1d. Sea $f(x,y)=(y-2x+1)^2$. **a)** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 1 . **b)** Hallar Δf . **c)** Precisar para qué vector $\overline{u}$ unitario es mínima $D_{\overline{u}}\,f(1,2)$. [0.6 puntos]
d) Calcular la integral doble $\iint_D f$, siendo D el triángulo de vértices $(0,-1)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.
[Los cálculos son cortos si no de desarrollan los paréntesis].



a) $C=0 \to y=2x-1$, $C=1 \to y=2x$ e $y=2x-2$ (rectas paralelas).

b) $\nabla f=\big(-4(y-2x+1),2(y-2x+1)\big)$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{10}$.

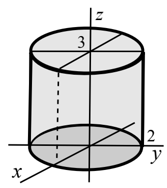
c) $\nabla f(1,2)=2(-2,1)$. $D_{\bar{u}}$ es mínima en sentido opuesto [o mirando las curvas de nivel]. $\boxed{\overline{u}=\big(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\big)}$.

d) $\iint_D f=\int_0^1\int_{2x-1}^1 f\,dy\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1\big[(y-2x+1)^3\big]_{2x-1}^1dx=\frac{8}{3}\int_0^1(1-x)^3dx=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{2}{3}}$.

O bien: $\int_{-1}^1\int_0^{(1+y)/2} f\,dx\,dy=-\frac{1}{6}\int_{-1}^1\big[(y-2x+1)^3\big]_0^{(1+y)/2}dy=\frac{1}{6}\int_{-1}^1(y+1)^3dy=\boxed{\frac{2}{3}}$.

2a. Sea $g(x,y,z)=z^2-x-2y$. **a)** Escribir la ecuación del plano tangente a $g=0$ en el punto $(4,0,2)$.
b) Calcular $\iiint_V g$, si V es el sólido dado por $x^2+y^2\le 4$, $0\le z\le 3$. [0.5 puntos]

a) $\nabla g=(-1,-2,2z)\overset{(4,0,2)}{\longrightarrow}(-1,-2,4)$. Plano tangente: $(-1,-2,4)\cdot(x-4,y,z-2)=0$. $\boxed{z=\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+1}$.



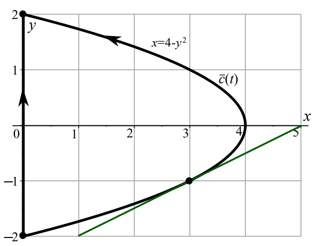
b) Mejor en cilíndricas y empezando con θ para quitarla pronto:

$$\iiint_V g=\int_0^2\int_0^3\int_0^{2\pi} r\left(z^2-r\cos\theta-2r\,\mathrm{sen}\,\theta\right)d\theta\,dz\,dr \underset{\substack{\uparrow\\ \text{cte·longitud, sen}\,0=\text{sen}\,2\pi\text{ , cos}\,0=\cos 2\pi}}{=} 2\pi\int_0^2\int_0^3 rz^2dz\,dr=2\pi\left[\tfrac{z^3}{3}\right]_0^3\left[\tfrac{r^2}{2}\right]_0^1=\boxed{36\pi}\,.$$

Peor $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^3(z^2-x-2y)\,dz\,dy\,dx=\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(9-3x-\overset{\text{impar}}{6y})\,dy\,dx=\int_{-2}^2(18-\overset{\text{impar}}{2x})\sqrt{4-x^2}\,dx=\cdots$

3a. Sean $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=\left(2xy\,,x^2+1\right)$ y $\bar{\mathrm{c}}(t)=\left(4-t^2,t\right)$, $t\in[-2,2]$. **a)** Hallar $\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}$ y precisar si $\bar{\mathrm{f}}$ es conservativo.
b) Determinar el punto en el que la recta tangente en $(3,-1)$ a la curva descrita por $\bar{\mathrm{c}}(t)$ corta el eje x .
c) Hallar el valor de $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}$ de dos formas diferentes. [0.6 puntos]

a) $\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}=f_x+g_y=\boxed{2y}$. Como $f_y=2x=g_x$ y $\bar{\mathrm{f}}$ es C^1, deriva de un potencial.



b) $\bar{\mathrm{c}}(-1)=(3,-1)$, $\bar{\mathrm{c}}'(-1)=(2,1)$, recta tangente $\bar{x}=(3+2t,t-1)$. Corta en $\boxed{(5,0)}$.

c) Hallando el potencial: $\begin{array}{l}U_x=2xy\ \rightarrow\ U=x^2y+p(y)\\ U_y=x^2+1\ \rightarrow\ U=x^2y+y+q(x)\end{array}$, $\boxed{U=x^2y+y}$

$$\Rightarrow\ \int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=U(0,2)-U(0,-2)=2+2=\boxed{4}\,.$$

O calculando directamente la integral sobre la curva dada (lo más largo):

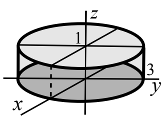
$$\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{-2}^2\left(2t(4-t^2),(4-t^2)^2+1\right)\cdot(-2t,1)\,dt\ =\ 2\int_0^2\left(17-24t^2+5t^4\right)dt\ =\ 2[34-64+32]\ =\ \boxed{4}\,.$$

O tomando el camino más simple: $\bar{c}_*(y)=(0,y)$, $y\in[-2,2]\rightarrow\int_{\bar{c}_*}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{-2}^2(0,1)\cdot(0,1)\,dy=\int_{-2}^2dy=\boxed{4}$.

2b. Sea $g(x,y,z)=2x-y-z^2$. **a)** Escribir la ecuación del plano tangente a $g=0$ en el punto $(2,3,1)$.
b) Calcular $\iiint_V g$, si V es el sólido dado por $x^2+y^2\le 9$, $0\le z\le 1$. [0.5 puntos]

a) $\nabla g=(2,-1,-2z)\overset{(2,3,1)}{\longrightarrow}(2,-1,-2)$. Plano tangente: $(2,-1,-2)\cdot(x-2,y-3,z-1)=0$. $\boxed{z=x-\frac{y}{2}+\frac{1}{2}}$.

b) Mejor en cilíndricas y empezando con θ para quitarla pronto:

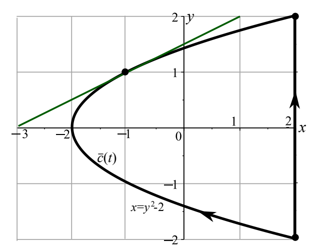


$$\iiint_V g=\int_0^3\int_0^1\int_0^{2\pi} r\left(2r\cos\theta-r\,\mathrm{sen}\,\theta-z^2\right)d\theta\,dz\,dr \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sen}\,0=\text{sen}\,2\pi\text{ , cos}\,0=\cos 2\pi\text{, cte·longitud}}}{=} -2\pi\int_0^3\int_0^1 rz^2dz\,dr=-2\pi\left[\tfrac{z^3}{3}\right]_0^1\left[\tfrac{r^2}{2}\right]_0^3=\boxed{-3\pi}\,.$$

Peor $\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^1(2x-y-z^2)\,dz\,dy\,dx=\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(2x-\overset{\text{impar}}{y}-\tfrac{1}{3})\,dy\,dx=\int_{-3}^3(\overset{\text{impar}}{4x}-\tfrac{2}{3})\sqrt{9-x^2}\,dx=\cdots$

3b. Sean $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=\left(2xy\,,x^2-1\right)$ y $\bar{\mathrm{c}}(t)=\left(t^2-2,t\right)$, $t\in[-2,2]$. **a)** Hallar $\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}$ y precisar si $\bar{\mathrm{f}}$ es conservativo.
b) Determinar el punto en el que la recta tangente en $(-1,1)$ a la curva descrita por $\bar{\mathrm{c}}(t)$ corta el eje y .
c) Hallar el valor de $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}$ de dos formas diferentes. [0.6 puntos]

a) $\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}=f_x+g_y=\boxed{2y}$. Como $f_y=2x=g_x$ y $\bar{\mathrm{f}}$ es C^1, deriva de un potencial.



b) $\bar{\mathrm{c}}(1)=(-1,1)$, $\bar{\mathrm{c}}'(1)=(2,1)$, recta tangente $\bar{x}=(2t-1,t+1)$. Corta en $\boxed{\left(0,\frac{3}{2}\right)}$.

c) Hallando el potencial: $\begin{array}{l}U_x=2xy\ \rightarrow\ U=x^2y+p(y)\\ U_y=x^2-1\ \rightarrow\ U=x^2y-y+q(x)\end{array}$, $\boxed{U=x^2y-y}$

$$\Rightarrow\ \int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=U(2,2)-U(2,-2)=6+6=\boxed{12}\,.$$

O calculando directamente la integral sobre la curva dada (lo más largo):

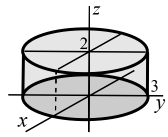
$$\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{-2}^2\left(2t(t^2-2),(t^2-2)^2-1\right)\cdot(2t,1)\,dt\ =\ 2\int_0^2\left(3-12t^2+5t^4\right)dt\ =\ 2[6-32+32]\ =\ \boxed{12}\,.$$

O tomando el camino más simple: $\bar{c}_*(y)=(2,y)$, $y\in[-2,2]\rightarrow\int_{\bar{c}_*}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_{-2}^2(4y,3)\cdot(0,1)\,dy=\boxed{12}$.

2c. Sea $g(x,y,z)=x-3y+z^2$. **a)** Escribir la ecuación del plano tangente a $g=0$ en el punto $(2,1,-1)$.
b) Calcular $\iiint_V g$, si V es el sólido dado por $x^2+y^2\le 9$, $0\le z\le 2$. [0.5 puntos]

a) $\nabla g=(1,-3,2z)\xrightarrow{(2,1,-1)}(1,-3,-2)$. Plano tangente: $(1,-3,-2)\cdot(x-2,y-1,z+1)=0$. $\boxed{z=\frac{x}{2}-\frac{3y}{2}-\frac{1}{2}}$.

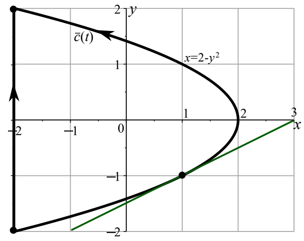
b) Mejor en cilíndricas y empezando con θ para quitarla pronto:



$$\iiint_V g=\int_0^3\int_0^2\int_0^{2\pi} r\left(r\cos\theta-3r\,\text{sen}\,\theta+z^2\right)d\theta\,dz\,dr \underset{\uparrow}{=} 2\pi\int_0^3\int_0^2 rz^2dz\,dr=2\pi\left[\tfrac{z^3}{3}\right]_0^2\left[\tfrac{r^2}{2}\right]_0^3=\boxed{24\pi}\,.$$
sen 0 = sen 2π , cos 0 = cos 2π, cte·longitud

Peor $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^2(x-3y+z^2)\,dz\,dy\,dx=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(2x-\overset{\text{impar}}{6y}+\tfrac{8}{3})\,dy\,dx=\int_{-3}^{3}(\overset{\text{impar}}{4x}+\tfrac{16}{3})\sqrt{9-x^2}\,dx=\cdots$

3c. Sean $\bar{f}(x,y)=\left(2xy,x^2-3\right)$ y $\bar{c}(t)=\left(2-t^2,t\right)$, $t\in[-2,2]$. **a)** Hallar div $\bar{f}$ y precisar si $\bar{f}$ es conservativo.
b) Determinar el punto en el que la recta tangente en $(1,-1)$ a la curva descrita por $\bar{c}(t)$ corta el eje x .
c) Hallar el valor de $\int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}$ de dos formas diferentes. [0.6 puntos]



a) div $\bar{f}=f_x+g_y=\boxed{2y}$. Como $f_y=2x=g_x$ y $\bar{f}$ es C^1, deriva de un potencial.

b) $\bar{c}(-1)=(1,-1)$, $\bar{c}'(-1)=(2,1)$, recta tangente $\bar{x}=(1+2t,t-1)$. Corta en $\boxed{(3,0)}$.

c) Hallando el potencial: $\begin{array}{l}U_x=2xy\ \to\ U=x^2y+p(y)\\ U_y=x^2-3\to\ U=x^2y-3y+q(x)\end{array}$, $\boxed{U=x^2y-3y}$

$$\Rightarrow \int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=U(-2,2)-U(-2,-2)=2+2=\boxed{4}\,.$$

O calculando directamente la integral sobre la curva dada (lo más largo):

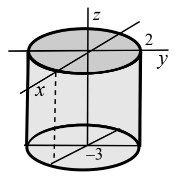
$$\int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{-2}^{2}\left(2t(2-t^2),(2-t^2)^2-3\right)\cdot(-2t,1)\,dt=2\int_0^2\left(1-12t^2+5t^4\right)dt=2[2-32+32]=\boxed{4}\,.$$

O tomando el camino más simple: $\bar{c}_*(y)=(-2,y)$, $y\in[-2,2]\to\int_{\bar{c}_*}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{-2}^{2}(-4y,1)\cdot(0,1)\,dy=\boxed{4}$.

2d. Sea $g(x,y,z)=x+2y+z^2$. **a)** Escribir la ecuación del plano tangente a $g=0$ en el punto $(3,-2,1)$.
b) Calcular $\iiint_V g$, si V es el sólido dado por $x^2+y^2\le 4$, $-3\le z\le 0$. [0.5 puntos]

a) $\nabla g=(1,2,2z)\xrightarrow{(3,-2,1)}(1,2,2)$. Plano tangente: $(1,2,2)\cdot(x-3,y+2,z-1)=0$. $\boxed{z=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}-y}$.

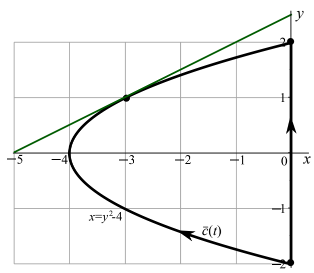
b) Mejor en cilíndricas y empezando con θ para quitarla pronto:



$$\iiint_V g=\int_0^2\int_{-3}^0\int_0^{2\pi} r\left(r\cos\theta+2r\,\text{sen}\,\theta+z^2\right)d\theta\,dz\,dr \underset{\uparrow}{=} 2\pi\int_0^2\int_{-3}^0 rz^2dz\,dr=2\pi\left[\tfrac{z^3}{3}\right]_{-3}^0\left[\tfrac{r^2}{2}\right]_0^2=\boxed{36\pi}\,.$$
sen 0 = sen 2π , cos 0 = cos 2π, cte·longitud

Peor $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-3}^0(x+2y+z^2)\,dz\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(3x+\overset{\text{impar}}{6y}+9)\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}(\overset{\text{impar}}{2x}+18)\sqrt{4-x^2}\,dx=\cdots$

3d. Sean $\bar{f}(x,y)=\left(2xy,x^2-2\right)$ y $\bar{c}(t)=\left(t^2-4,t\right)$, $t\in[-2,2]$. **a)** Hallar div $\bar{f}$ y precisar si $\bar{f}$ es conservativo.
b) Determinar el punto en el que la recta tangente en $(-3,1)$ a la curva descrita por $\bar{c}(t)$ corta el eje y .
c) Hallar el valor de $\int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}$ de dos formas diferentes. [0.6 puntos]



a) div $\bar{f}=f_x+g_y=\boxed{2y}$. Como $f_y=2x=g_x$ y $\bar{f}$ es C^1, deriva de un potencial.

b) $\bar{c}(1)=(-3,1)$, $\bar{c}'(1)=(2,1)$, recta tangente $\bar{x}=(2t-3,t+1)$. Corta en $\boxed{(0,\frac{5}{2})}$.

c) Hallando el potencial: $\begin{array}{l}U_x=2xy\ \to\ U=x^2y+p(y)\\ U_y=x^2-2\to\ U=x^2y-2y+q(x)\end{array}$, $\boxed{U=x^2y-2y}$

$$\Rightarrow \int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=U(0,2)-U(0,-2)=-4-4=\boxed{-8}\,.$$

O calculando directamente la integral sobre la curva dada (lo más largo):

$$\int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{-2}^{2}\left(2t(t^2-4),(t^2-4)^2-2\right)\cdot(2t,1)\,dt=2\int_0^2\left(14-24t^2+5t^4\right)dt=2[28-64+32]=\boxed{-8}\,.$$

O tomando el camino más simple: $\bar{c}_*(y)=(0,y)$, $y\in[-2,2]\to\int_{\bar{c}_*}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{-2}^{2}(0,-2)\cdot(0,1)\,dy=\boxed{-8}$.

Soluciones del control 2 de Métodos Matemáticos (20 de diciembre de 2016)

1. Sea [E] $3yu_y - xu_x = 2xy$. Hallar sus características y, utilizando la regla de la cadena, la ecuación para u_η . Calcular la solución general de [E] y la única que satisface el dato inicial $u(-2,y)=6y$. [0.4 puntos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{x}y$ lineal. $y=Ce^{-\int 3/x}=Ce^{-3\ln x}=\frac{C}{x^3}$. $\boxed{x^3y=C}$ características.

$\begin{cases}\xi=x^3y\\ \eta=x\end{cases}$ $\begin{cases}u_y=x^3u_\xi\\ u_x=3x^2yu_\xi+u_\eta\end{cases}$, $-xu_\eta=2xy$, $u_\eta=-2y=-\frac{2\xi}{\eta^3}$ $\rightarrow$ $u=\frac{\xi}{\eta^2}+p(\xi)$. $\boxed{u(x,y)=xy+p\big(x^3y\big)}$ solución general

$\Big[$Más largo: $\begin{cases}\xi=x^3y\\ \eta=y\end{cases}$, $u_\eta=\frac{2x}{3}=\frac{2}{3}\xi^{1/3}\eta^{-1/3}$ $\rightarrow$ $u=\xi^{1/3}\eta^{2/3}+p(\xi)=xy+p\big(x^3y\big)$, como antes$\Big]$.

$u(-2,y)=-2y+p(-8y)=6y$, $p(-8y)=8y$, $p(v)=-v$, $\boxed{u(x,y)=xy-x^3y}$ [Solución única por ser $x=-2$ no tangente a las características].

Comprobando: $u(-2,y)=6y$. $u_y=x-x^3$, $u_x=y-3x^2y$, $3yx-3x^3y-xy+3x^2y=2xy$.

2. Hallar la solución general de la ecuación $x^2y''-2y=2$. [0.2 puntos]

Euler. $\mu(\mu-1)+0\mu-2=\mu^2-\mu-2=(\mu-2)(\mu+1)=0$ e $y_p=-1$ a ojo $\rightarrow$ $\boxed{y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}-1}$.

Sin vista: $|W|=\begin{vmatrix}x^2 & x^{-1}\\ 2x & -x^{-2}\end{vmatrix}=-3$. $y_p=x^{-1}\int\frac{x^2 2x^{-2}}{-3}dx-x^2\int\frac{x^{-1}2x^{-2}}{-3}dx=-\frac{2}{3x}\int dx+\frac{x^2}{3}\int\frac{2\,dx}{x^3}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$.

3. a] Escribir (utilizando el formulario) el desarrollo de $f(x)=\frac{\pi}{4}$ en serie de autofunciones de $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(1)=0\end{cases}$.

b] Sea $\begin{cases}u_t-\frac{1}{\pi}u_{xx}=\pi\,\text{sen}\,\pi x,\ x\in(0,1),\,t>0\\ u(x,0)=\frac{\pi}{4},\ u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$. Hallar los 2 primeros términos no nulos de su serie solución. [Llevar serie con las autofunciones del homogéneo a la EDP y al dato inicial]. [0.6 puntos]

a] Autofunciones $\{\text{sen}\,n\pi x\}$, $n=1,2,\dots$ $c_n=\frac{2}{1}\frac{\pi}{4}\int_0^1\text{sen}\,n\pi x\,dx=\frac{1}{2n}\cos n\pi x\Big]_0^1=\frac{1-(-1)^n}{2n}$ (se anula si n par).

Por tanto, el desarrollo es: $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(2n-1)\pi x}{2n-1}=\text{sen}\,\pi x+\frac{1}{3}\text{sen}\,3\pi x+\frac{1}{5}\text{sen}\,5\pi x+\cdots$

b] Separando variables en la homogénea (formulario) y usando los datos de contorno: $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(1)=0\end{cases}$.

Llevamos a la EDP: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,\text{sen}\,n\pi x$ $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+n^2\pi T_n\big]\,\text{sen}\,n\pi x=\pi\,\text{sen}\,\pi x$ (ya desarrollada).

Obtenemos entonces las EDOs: $T_1+\pi T_1=\pi$ y $T_n'+n^2\pi T_n=0$, si $n=2,3,\dots$ Y del dato inicial:

$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\,\text{sen}\,n\pi x=\frac{\pi}{4}\overset{a]}{=}\text{sen}\,\pi x+\frac{1}{3}\text{sen}\,3\pi x+\cdots$ $\rightarrow$ $T_1(0)=1$, $T_2(0)=0$, $T_3(0)=\frac{1}{3}$, ...

Los primeros no nulos son T_1 y T_3 . La solución para T_1 (y_p a ojo) es: $T_1=Ce^{-\pi t}+1\overset{d.i.}{\rightarrow}C=0$, $T_1=1$.

De $T_3'=-9\pi T_3$ sale $T_3=Ce^{-9\pi t}\overset{d.i.}{\rightarrow}C=\frac{1}{3}$ Por tanto $\boxed{u(x,t)=\text{sen}\,\pi x+\frac{1}{3}e^{-9\pi t}\text{sen}\,3\pi x+\cdots}$

4. a] Hallar la solución de $y''+2y'+y=4e^x$ que cumple los datos iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=2$. [0.5 puntos]

b] Sea $\begin{cases}y''+2y'+\lambda y=0\\ y(0)=y'(1)=0\end{cases}$. Precisar si $\lambda=1$ y $\lambda=2$ son o no autovalores dando la autofunción en el caso que lo sea. [Imponer los datos a la solución general en cada caso].

a] $\mu^2+2\mu+1=(\mu+1)^2=0$, $y_p=Ae^{-2x}$ (-2 no autovalor) $\rightarrow$ $A+2A+A=4$ $\rightarrow$ $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+e^x$ solución general

Imponiendo datos $\big[y'=(c_2-c_1-c_2x)e^{-x}+e^x\big]$: $\begin{cases}c_1+1=0\\ c_2-c_1+1=2\end{cases}$, $c_1=-1$, $c_2=0$. $\boxed{y=e^x-e^{-x}}$.

b] $\lambda=1$ $\rightarrow$ $\begin{matrix}y=(c_1+c_2x)e^{-x}\\ y'=(c_2-c_1-c_2x)e^{-x}\end{matrix}$ $\begin{cases}y(0)=c_1=0\\ y'(1)=-c_1e^{-1}=0\end{cases}$, $c_1=0$, $\forall c_2$. **Autovalor** con autofunción $\boxed{\{xe^{-x}\}}$.

$\lambda=2$, $\mu=-1\pm i$ $\rightarrow$ $\begin{matrix}y=(c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x)e^{-x}\\ y'=(-c_1s+c_2c-c_1c-c_2s)e^{-x}\end{matrix}$ $\begin{cases}y(0)=c_1=0\downarrow\\ y'(1)=c_2\underbrace{(\cos 1-\text{sen}\,1)}_{\neq 0}e^{-1}=0,\ c_2=0\end{cases}$. **No autovalor**.

(1 es un ángulo mayor que $\frac{\pi}{4}$ y menor que $\frac{\pi}{2}$)