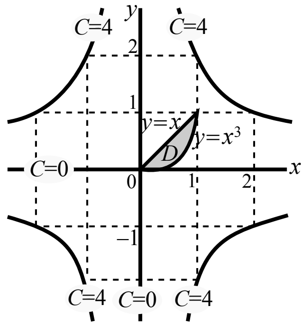
Soluciones del control 1 de Métodos Matemáticos (7 de noviembre de 2017)

1. Sea $f(x,y)=x^2y^2$. **a)** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 4 . **b)** Hallar $\nabla f(2,-1)$ y Δf . [0.55 puntos]
c) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,-1)$.
d) Calcular $\iint_D f$, siendo D la región del primer cuadrante limitada por la recta $y=x$ y la curva $y=x^3$.



a) $C=0 \to x=0$ o $y=0$, $C=4 \to y=\pm\frac{2}{x}$ $\big[$pasan por $(\pm2,\pm1)$ y $(\pm1,\pm2)\big]$.

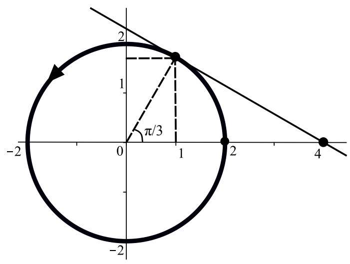
b) $f_x=2xy^2,\ f_y=2x^2y$. $\boxed{\nabla f(2,-1)=(4,-8)}$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{2x^2+2y^2}$.

c) $f(2,-1)=4$. Plano tangente: $z=4+4(x-2)-8(y+1)$, $\boxed{z=4x-8y-12}$.

d) $\iint_D f=\int_0^1\int_{x^3}^{x} f\,dy\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^2(x^3-x^9)\,dx=\frac{1}{3}\big[\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{12}x^{12}\big]_0^1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}=\boxed{\frac{1}{36}}$.

O bien: $\int_0^1\int_y^{y^{1/3}} f\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^1 y^2(y-y^3)\,dy=\frac{1}{3}\big[\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{6}y^6\big]_0^1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}=\boxed{\frac{1}{36}}$.

2. Sean $\bar{\mathrm{f}}(x,y)=(5x-y,2x)$ y $\bar{\mathrm{c}}(t)=(2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$. **a)** Dibujar la curva descrita por $\bar{\mathrm{c}}$ y precisar el punto en el que la recta tangente a esa curva en el punto $(1,\sqrt{3})$ corta el eje x .
b) Hallar: i) $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}\,ds$, ii) $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}$. ¿Deriva $\bar{\mathrm{f}}$ de un potencial? [0.55 puntos]



a) La curva es la circunferencia entera de radio 2 $\big(x^2+y^2=4\big)$.

El punto $(1,\sqrt{3})$ se alcanza cuando $x=\frac{\pi}{3}$ $\big(\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$.

$\bar{\mathrm{c}}'(t)=(-2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t)$, $\bar{\mathrm{c}}'\big(\frac{\pi}{3}\big)=\big(-\sqrt{3},1\big)$. La recta tangente es, pues

$\bar{x}=(1,\sqrt{3})+t(-\sqrt{3},1)=(1-\sqrt{3}\,t,\sqrt{3}+t)$. Corta, si $t=-\sqrt{3}$, en $\boxed{(4,0)}$.

b) i) $\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}=f_x+g_y=5$. $\int_{\bar{\mathrm{c}}}\mathrm{div}\,\bar{\mathrm{f}}\,ds=5\int_{\bar{\mathrm{c}}}ds=5\int_0^{2\pi}\underbrace{\|\bar{\mathrm{c}}'(t)\|}_{=2}\,dt=\boxed{20\pi}$.

[Claro, es 5 veces la longitud de la circunferencia].

ii) Calculando directamente la integral:

$$\int_{\bar{\mathrm{c}}}\bar{\mathrm{f}}\cdot d\bar{s}=\int_0^{2\pi}(10\cos t-2\,\mathrm{sen}\,t,4\cos t)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\,t,2\cos t)\,dt=\int_0^{2\pi}\big(4\,\mathrm{sen}^2t+8\cos^2t-10\,\mathrm{sen}\,t\cos t\big)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(6+2\cos 2t)\,dt-\big[10\,\mathrm{sen}^2t\big]_0^{2\pi}=12\pi+\big[\mathrm{sen}\,2t\big]_0^{2\pi}=\boxed{12\pi} .$$

También podríamos calcularla utilizando el teorema de Green en el círulo encerrado:.

$\iint_D[g_x-f_y]=3\iint_D dx\,dy=3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\,dr\,d\theta=6\pi\big[\frac{r^2}{2}\big]_0^2=12\pi$. [Claro, 3 veces el área del círculo].

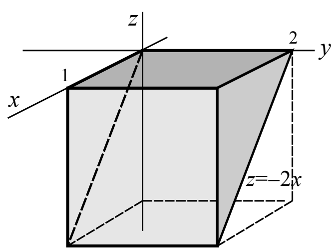
Como $g_x-f_y\neq0$ **no deriva de un potencial**. O porque la integral sobre un camino cerrado era no nula.

3. Sea $F(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^{2x+z}$. **a)** Hallar $\|\nabla F\big(1,\frac{1}{2},-2\big)\|$, el vector $\bar{u}$ unitario para el que es máxima $D_{\bar{u}}F\big(1,\frac{1}{2},-2\big)$ y el valor de esta derivada direccional. [0.5 puntos]
b) Calcular $\iiint_V F$, si V es el sólido limitado por los planos $y=0$, $y=2$, $x=1$, $z=0$, $2x+z=0$.

a) $\nabla F=(2y,1,y)\,\mathrm{e}^{2x+z}\xrightarrow{(1,1/2,-2)}\big(1,1,\frac{1}{2}\big)$. $\|\nabla F\big(1,\frac{1}{2},-2\big)\|=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\boxed{\frac{3}{2}}$, valor máximo de las $D_{\bar{u}}$.

$D_{\bar{u}}$ es máxima en la dirección del gradiente: $\bar{u}=\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}=\boxed{\big(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\big)}$.

$\Big[$Comprobamos que $D_{\bar{u}}F=\nabla F\cdot\bar{u}=\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{2}\Big]$-



b) $\iiint_V F=\int_0^1\int_0^2\int_{-2x}^0 y\,\mathrm{e}^{2x+z}\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^2 y\big[\mathrm{e}^{2x+z}\big]_{-2x}^0\,dy\,dx$

$=\int_0^1\int_0^2 y\big(\mathrm{e}^{2x}-1\big)\,dy\,dx=\int_0^1\big(2\,\mathrm{e}^{2x}-2\big)\,dx=\mathrm{e}^{2x}\big]_0^1-2=\boxed{\mathrm{e}^2-3}$.

Soluciones del control 2 de Métodos Matemáticos (19 de diciembre de 2017)

1. a] Sea $\begin{cases} y''-y'+\lambda y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$. Precisar si $\lambda=0$ y $\lambda=\frac{5}{4}$ son o no autovalores dando la autofunción en el caso que lo sea. [Imponer los datos a la solución general en cada caso]. [0.6 puntos]

b] i) Hallar la solución general de $y''-y'=1$ y la única que cumple los datos iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
ii) ¿Cuántas soluciones de esta misma ecuación cumplen las condiciones de contorno $y(0)=y(\pi)=0$.

a] Ecuación de coeficientes constantes con $\mu^2-\mu+\lambda=0 \to \mu=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$.

$\lambda=0,\ \mu=0,1 \to y=c_1+c_2\,\mathrm{e}^x \to \begin{cases} y(0)=c_1+c_2=0,\ c_2=-c_1 \downarrow \\ y(\pi)=c_1+c_2\,\mathrm{e}^\pi=0 \quad c_1(1-\mathrm{e}^\pi)=0 \end{cases} \to c_1=c_2=0$. $\lambda=0$ **no es autovalor**.

$\lambda=\frac{5}{4},\ \mu=\frac{1}{2}\pm \mathrm{i} \to y=(c_1\cos x+c_2 \operatorname{sen} x)\,\mathrm{e}^{x/2} \to \begin{cases} y(0)=c_1=0 \\ y(\pi)=-c_1\,\mathrm{e}^{\pi/2}=0 \end{cases} \to c_1=0$ y c_2 indeterminado.

Es **autovalor** con autofunción $\boxed{\{\mathrm{e}^{x/2}\operatorname{sen} x\}}$.

b] i) $y_p=Ax$ (0 es autovalor) $\to 0-A=1$, $y=c_1+c_2\,\mathrm{e}^x-x$ solución general $\xrightarrow{d.i.} \begin{cases} c_1+c_2=1,\ c_1=0 \\ c_2-1=0,\ c_2\overset{\uparrow}{=}1 \end{cases}$, $\boxed{y=\mathrm{e}^x-x}$.
$\big[$O bien, $y'=v \to v'=v+1$, $v=C\mathrm{e}^x-1 \uparrow\int \big]$.

ii) Como el homogéno sólo tenía la solución trivial, el no homogéno tiene **una única solución**.

2. Sea [E] $u_y+2u_x=u-x+2y$. Hallar sus características y, usando la regla de la cadena, la ecuación para u_η. Calcular la solución general de [E] y la única que satisface el dato inicial $u(x,x)=1-x$. [0.4 puntos]

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$, $2y=x+C$. $\boxed{x-2y=C}$ características $\big[$o $2y-x=C$, o $y-\frac{x}{2}=C$, todas válidas$\big]$.

$\begin{cases} \xi=x-2y \\ \eta=y \end{cases}$, $\begin{cases} u_y=-2u_\xi+u_\eta \\ u_x=u_\xi \end{cases}$, $u_\eta=u-\xi \to u=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta+\xi$. $\boxed{u(x,y)=p\big(x-2y\big)\,\mathrm{e}^y+x-2y}$ solución general

O bien: $\begin{cases} \xi=x-2y \\ \eta=x \end{cases}$, $\begin{cases} u_y=-2u_\xi \\ u_x=u_\xi+u_\eta \end{cases}$, $u_\eta=\frac{u-\xi}{2} \to u=q(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta/2}+\xi=q\big(x-2y\big)\,\mathrm{e}^{x/2}+x-2y$, casi como antes.

$u(x,x)=p(-x)\,\mathrm{e}^x-x=1-x$, $p(-x)=\mathrm{e}^{-x}$, $p(v)=\mathrm{e}^v$, $\boxed{u(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}+x-2y}$ (parecido con la q).

[Solución única puesto que $y=x$ no es una de las características].

$\big[$Comprobando: $u(x,x)=1+x-2x$. $u_y=-\mathrm{e}^{x-y}-2$, $u_x=\mathrm{e}^{x-y}+1$, $\mathrm{e}^{x-y}=\mathrm{e}^{x-y}+x-2y-x+2y\big]$.

3. a] Hallar (utilizando el formulario) el desarrollo de $f(x)=2x$ en serie de autofunciones de $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$.

b] Sea $\begin{cases} u_t-2u_{xx}+u=0,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=2x,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. Escribir los 3 primeros términos no nulos de su serie solución. [Separar variables, determinar los X_n y T_n, probar una serie y precisar sus coeficientes con el dato inicial]. [0.6 puntos]

a] Autofunciones $X_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,2,\dots$ $\big($la primera es $X_0=\{1\}\big)$. $2x=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos nx \to$

$c_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x\,dx=2\pi$, $c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x\cos nx\,dx=\frac{4x\operatorname{sen} nx}{\pi n}\Big]_0^\pi-\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi \operatorname{sen} nx\,dx=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}$ (se anula si n par).

Por tanto, el desarrollo pedido es: $2x=\pi-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=\pi-\frac{8}{\pi}\cos x-\frac{8}{9\pi}\cos 3x+\cdots$

b] $u=XT \to \frac{X''}{X}=\frac{T'+T}{2T}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \text{ (de los datos de contorno)} \end{cases} \to \lambda_n=n^2$, $X_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,\dots$

Y además: $T'=-(1+2\lambda)T$, $T_n=C\,\mathrm{e}^{-(1+2\lambda)t}=\big\{\mathrm{e}^{-(1+2n^2)t}\big\}$ $\big[T_0=\{\mathrm{e}^{-t}\}\big]$. Probamos entonces:

$u(x,t)=\frac{c_0}{2}\mathrm{e}^{-t}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{-(1+2n^2)t}\cos n\pi x$, cuyos coeficientes c_n se precisan imponiendo el dato incial:

$u(x,0)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos nx=2x$, que el desarrollo que hemos calculado en **a]**.

Así pues, $\boxed{u(x,t)=\pi\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{8}{\pi}\,\mathrm{e}^{-3t}\cos x-\frac{8}{9\pi}\,\mathrm{e}^{-19t}\cos 3x+\cdots}=\pi\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-[2(2n-1)^2+1]t}}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$.