Soluciones del control 1 de Métodos Matemáticos (23 de octubre de 2018)

1. Sea $f(x,y)=(2x+y)^2$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y 4. Calcular $\nabla f(0,-2)$ y Δf. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0,-2)$.
b] Calcular $\iint_D f$, siendo D el triángulo de vértices $(-2,2)$, $(0,2)$ y $(0,-2)$. [0.25+0.3=0.55 puntos]

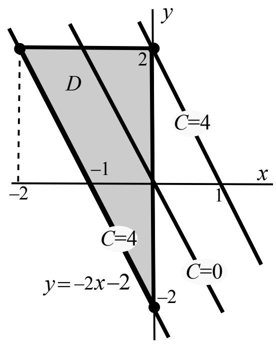
a] $C=0 \to y=-2x$, $C=4 \to y=\pm 2-2x$ $\big[$todas son rectas de pendiente $-2\big]$.

b] $f_x=8x+4y,\ f_y=4x+2y$. $\boxed{\nabla f(0,-2)=(-8,-4)}$. $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=\boxed{10}$.

c] $f(0,-2)=4$. Plano tangente: $z=4-8(x-0)-4(y+2)$, $\boxed{z=-8x-4y-4}$.

d] $\iint_D f=\int_{-2}^{0}\int_{-2-2x}^{2} f\,dy\,dx=\frac{8}{3}\int_{-2}^{0}\big[(x+1)^3+1\big]\,dx=\frac{2}{3}(x+1)^4\Big]_{-2}^{0}+\frac{16}{3}=\boxed{\frac{16}{3}}$.

O bien: $\int_{-2}^{2}\int_{-y/2-1}^{0} f\,dx\,dy=\frac{1}{6}\int_{-2}^{2}\big(y^3+8\big)\,dy=\big[\frac{1}{24}y^4\big]_{-2}^{2}+\frac{16}{3}=\boxed{\frac{16}{3}}$.



2. Sea $F(x,y,z)=y+2xz$. **a]** Hallar $\nabla F(1,2,-1)$ y un vector $\bar{u}$ unitario para el que sea $D_{\bar{u}}F(1,2,-1)=0$ y que además sea perpendicular al vector $(1,-1,0)$.
b] Calcular $\iiint_V F$, si V es el medio cilindro descrito por $x^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$, $0\le z\le 3$. [0.25+0.3=0.55 puntos]

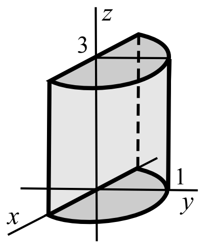
a] $\nabla F=(2z,1,2x)\xrightarrow{(1,2,-1)}(-2,1,2)$. $D_{\bar{v}}=0$ si $\bar{v}$ es perpendicular a ∇F. Es perpendicular también a $(1,-1,0)$:

$\bar{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-2&1&2\\1&-1&0\end{vmatrix}=(2,2,1)$. $\|\bar{v}\|=\sqrt{4+4+1}=3$, $\boxed{\bar{u}=\big(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\big)}$ (o $-\bar{u}$).

b] La integral se puede hacer en cartesianas o cilíndricas:

$$\iiint_V F=\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^3(y+2xz)\,dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(3y+9x)\,dy\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\big(\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}x^2+\underbrace{9x\sqrt{1-x^2}}_{\text{impar}}\big)\,dy\,dx=\int_0^1\big(3-3x^2\big)\,dx=3-1=\boxed{2}.$$

$$\iiint_V F=\int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^3 r^2(\operatorname{sen}\theta+2z\cos\theta)\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^1 3r^2(\operatorname{sen}\theta+3\cos\theta)\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}\theta+3\cos\theta)\,d\theta=\boxed{2}.$$



3. Sean $\bar{f}(x,y)=\big(y^2,2xy\big)$ y $\bar{c}(t)=\big(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\operatorname{sen}t\big)$, $t\in\big[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\big]$. **a]** Dibujar la curva descrita por $\bar{c}$ y precisar el punto en el que la recta tangente a esa curva en el punto $(1,1)$ corta el eje y.
b] Hallar $\operatorname{div}\bar{f}$. ¿Deriva $\bar{f}$ de un potencial? Calcular: i) $\int_{\bar{c}}\operatorname{div}\bar{f}\,ds$, ii) $\int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}$. [0.2+0.4=0.6 puntos]

a] La curva es la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ $\big(x^2+y^2=2\big)$ desde $(1,-1)$ hasta $(-1,1)$.

El punto $(1,1)$ se alcanza cuando $t=\frac{\pi}{4}$ $\big(\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$.

$\bar{c}'(t)=(-\sqrt{2}\operatorname{sen}t,\sqrt{2}\cos t)$, $\bar{c}'\big(\frac{\pi}{4}\big)=(-1,1)$. La recta tangente es, pues

$\bar{x}=(1,1)+t(-1,1)=\big(1-t,1+t\big)$. Corta, si $t=1$, en $\boxed{(0,2)}$.

b] $\operatorname{div}\bar{f}=f_x+g_y=2x$. Como $g_x-f_y=0$ y $\bar{f}\in C^1$, **deriva de un potencial**.

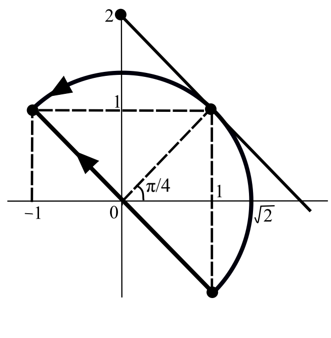
i) $\int_{\bar{c}}\operatorname{div}\bar{f}\,ds=\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}2\sqrt{2}\cos t\,\underbrace{\|\bar{c}'(t)\|}_{=\sqrt{2}}\,dt=4\operatorname{sen}t\Big]_{-\pi/4}^{3\pi/4}=\boxed{4\sqrt{2}}$.

ii) Directamente: $\int_{\bar{c}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}2\sqrt{2}\,(s^2,2sc)\cdot(-s,c)\,dt=2\sqrt{2}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\big(3c^2s-s\big)\,dt=2\sqrt{2}\big[c-c^3\big]_{-\pi/4}^{3\pi/4}=\boxed{-2}$.

Hallando el potencial: $\begin{matrix}U_x=y^2\to U=xy^2+p(y)\\U_y=2zy\to U=zy^2+q(x)\end{matrix}$, $\boxed{U=xy^2}\Rightarrow\int_{\bar{c}}\bar{g}\cdot d\bar{s}=U(-1,1)-U(1,-1)=-1-1=\boxed{-2}$.

Tomando el segmento que une esos puntos: $\bar{c}_*(x)=(x,-x)$, $x\in[1,-1]\ \to$

$$\int_{\bar{c}_*}\bar{g}\cdot d\bar{s}=-\int_{-1}^{1}\big(x^2,-2x^2\big)\cdot\big(1,-1\big)\,dx=-\int_{-1}^{1}3x^2\,dx=\boxed{-2}.$$



Soluciones del control 2 de Métodos Matemáticos (4 de diciembre de 2018)

1. a] Sea $\begin{cases} x^2y''-2xy'+\lambda y=0 \\ y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Precisar si $\lambda=0$ y $\lambda=2$ son o no autovalores dando la autofunción cuando lo sea. [Imponer los datos a la solución general en cada caso]. [0.5 puntos]

b] Hallar la solución general de $x^2y''-2xy'+2y=2$ y la única que cumple los datos iniciales $y(1)=y'(1)=0$.

a] Euler con $\mu(\mu-1)-2\mu+\lambda=\mu^2-3\mu+\lambda=0 \;\to\; \mu=\frac{3\pm\sqrt{9-4\lambda}}{2}$.

$\lambda=0,\ \mu=0,3 \;\to\; y=c_1+c_2x^3 \;\to\; \begin{cases} y'(1)=3c_2=0 \\ y(2)=c_1+8c_2=0 \end{cases} \to\; c_1=c_2=0$. $\lambda=0$ **no es autovalor**.

$\lambda=2,\ \mu=1,2,\ y=c_1x+c_2x^2 \;\to\; \begin{cases} y'(1)=c_1+2c_2=0 \\ y(2)=2c_1+4c_2=0 \end{cases} \to\; c_1=-2c_2$. **Autovalor** con autofunción $\boxed{\{x^2-2x\}}$.

b] $y_p=1$ (se ve a ojo) $\to y=c_1x+c_2x^2+1$ solución general $\xrightarrow{d.i.} \begin{cases} c_1+c_2=-1 & c_2=1 \\ c_1+2c_2=0, & c_1 \overset{\uparrow}{=} -2c_2 \end{cases}$, $\boxed{y=x^2-2x+1}$.

$\Big[$Sin vista, $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2$, $y_p = x^2\int\frac{x\cdot 2/x^2}{x^2} - x\int\frac{x^2\cdot 2/x^2}{x^2} = -1+2 = 1\Big]$.

2. Sea [E] $3u_y-u_x=6(y+3x)u$. Hallar sus características y, usando la regla de la cadena, la ecuación para u_η. Calcular la solución general de [E] y la única que satisface el dato inicial $u(x,0)=\mathrm{e}^{-9x^2}$. [0.4 puntos]

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{1}$, $y=-3x+C$. $\boxed{y+3x=C}$ características (son rectas).

$\begin{cases} \xi=y+3x \\ \eta=y \end{cases}$, $\begin{cases} u_y=u_\xi+u_\eta \\ u_x=3u_\xi \end{cases}$, $u_\eta=2(y+3x)u=2\xi u \;\to\; u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{2\xi\eta}$. $\boxed{u(x,y)=p\big(y+3x\big)\,\mathrm{e}^{2y^2+6xy}}$ solución general

O bien: $\begin{cases} \xi=y+3x \\ \eta=x \end{cases}$, $\begin{cases} u_y=u_\xi \\ u_x=3u_\xi+u_\eta \end{cases}$, $u_\eta=-6\xi u \;\to\; u=q(\xi)\,\mathrm{e}^{-6\xi\eta}=q\big(y+3x\big)\,\mathrm{e}^{-6xy-18x^2}$ (se parece).

$u(x,0)=p(3x)=\mathrm{e}^{-9x^2}$, $p(v)=\mathrm{e}^{-v^2}$, $u=\mathrm{e}^{-y^2-6xy-9x^2+2y^2+6xy}$, $\boxed{u(x,y)=\mathrm{e}^{y^2-9x^2}}$ $\big[$o bien $q(v)=\mathrm{e}^{v^2}\dots\big]$.

$\big[$Comprobando: $u(x,0)=\mathrm{e}^{-4x^2}$. $u_y=2y\mathrm{e}^{y^2-4x^2}$, $u_x=-8x\mathrm{e}^{y^2-4x^2} \to (4y+8x)\,\mathrm{e}^{y^2-4x^2}=4(y+2x)\,\mathrm{e}^{y^2-4x^2}\big]$.

[Hemos obtenido una única solución porque $y=0$ no es una de las características].

3. a] Calcular la solución $T(t)$ de $T'=-(1+2t)\,T+\mathrm{e}^{-t^2}$ que cumple $T(0)=1$. [0.8 puntos]

b] Hallar (usando el formulario) el desarrollo de $f(x)=\frac{\pi}{4}$ en serie de autofunciones de $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$.

c] Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}+2tu=\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sen}x,\ x\in(0,\pi),t>0 \\ u(x,0)=\frac{\pi}{4},\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. Hallar los 2 primeros términos no nulos de su serie solución. [Separar variables, hallar las autofunciones del homogéneo, llevar una serie a la EDP y al dato incial y calcular los dos primeros T_n no nulos].

a] $\mathrm{e}^{\int a}=\mathrm{e}^{-t-t^2} \;\to\; T=C\,\mathrm{e}^{-t-t^2}+\mathrm{e}^{-t-t^2}\int \mathrm{e}^{t+t^2}\mathrm{e}^{-t^2}dt=C\,\mathrm{e}^{-t-t^2}+\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow{d.i.} \boxed{C\mathrm{e}^{-t^2}}$.

b] Autofunciones $X_n=\{\operatorname{sen}nx\},\ n=1,2,\dots$. $\frac{\pi}{4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}nx \;\to\; c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}nx\,dx=-\frac{\cos nx}{2n}\Big]_0^\pi=\frac{1-(-1)^n}{2n}$.

(se anula si n par).

Por tanto, el desarrollo pedido es: $\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x+\cdots=\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x}$.

c] $u=XT \;\to\; \frac{X''}{X}=\frac{T'+2tT}{T}=-\lambda \;\to\; \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \text{ (de los datos de contorno)} \end{cases} \to\; \lambda_n=n^2,\ X_n=\{\operatorname{sen}nx\},\ n=1,2,\dots$

$\big[$Y además: $T'=-(\lambda+2t)T$ que ahora no usamos por ser un problema no homogéneo$\big]$. Probamos entonces:

$u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx \;\to\; \sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[T_n'+n^2T_n+2tT_n\big]\operatorname{sen}nx=\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sen}x$ (ya desarrollada en senos).

Y del dato incial sale $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=\frac{\pi}{4}$, desarrollo calculado en **b]**. Son no nulos:

$\begin{cases} T_1'+(1+2t)T_1=\mathrm{e}^{-t^2} \\ T_1(0)=1 \end{cases} \xrightarrow{\textbf{a]}} T_1=\mathrm{e}^{-t^2}$. $\begin{cases} T_3'+(9+2t)T_3=0 \\ T_3(0)=1/3 \end{cases} \to\; T_3=C\,\mathrm{e}^{-9t-t^2} \xrightarrow{d.i.} T_3=\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-9t-t^2}$.

Así pues, $\boxed{u(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-9t-t^2}\operatorname{sen}3x+\cdots}=\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sen}x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(2n-1)^2t-t^2}}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x$.