Repaso de series

Series de números reales

Las **series** son 'sumas de infinitos números reales': $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

No se puede 'sumar infinitas veces'. Siempre podemos hallar la 'k-ésima suma parcial' $S_k = a_1 + \cdots + a_k$. Parece natural decir que la suma S de los infinitos a_n será el límite de la sucesión $\{S_k\}$. Pero este límite puede no existir. Así, para la serie $1+1+1+1+1+\cdots$ es $\{S_k\} = \{k\}$, que diverge a ∞ (y la suma infinita no es ningún número real). En cambio, para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 1+0.1+0.01+\cdots$ las sumas parciales 1 , 1.1 , 1.11 , ... si convergen y podemos decir que la suma infinita es el número $1.1111...$.

Def. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente** si lo es la sucesión $\{S_k\}$ con $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. La **suma de la serie** es entonces el $\lim_{k\to\infty} S_k$. Se llama **término general** de la serie al a_n y **sucesión de sus sumas parciales** a $\{S_k\}$. Si una serie no converge, se dice **divergente**.

Si quitamos, cambiamos o añadimos un número finito de términos a una serie, no se altera su carácter de convergencia o divergencia (aunque sí el valor de su suma, si converge), porque las nuevas S_k diferirán de las iniciales en un constante. Por eso, cuando hablemos de convergencia podremos no escribir el n en que empezamos a sumar; incluso escribiremos sólo $\sum$ (no olvidando que son infinitos términos).

¿Cómo saber si una serie converge o no? ¿Cuánto vale su suma si es convergente? Hay **criterios** que permiten responder a la primera pregunta para muchas series. Pero casi siempre necesitaremos ordenador para dar simplemente un valor aproximado de la suma de la serie.

Un caso excepcional en que se puede **sumar la serie** es el de las **series geométricas**:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}\text{ , si } |r|<1 \text{ . Si } |r|\geq 1 \text{ diverge.}} \quad \left[\text{se ve que } S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}\right].$$

Ej. Con esto confirmamos que $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots = \frac{1}{1-1/10} = \frac{10}{9} = 1.11\ldots$

Lo que sigue son los criterios más importantes para distinguir las series convergentes de las divergentes. El primer criterio permite identificar un montón de series **divergentes**:

Teor: $\boxed{\text{Si } \sum a_n \text{ es convergente } \Rightarrow a_n \to 0 \text{.}}$ [Y, por tanto, si $a_n \not\to 0$, la serie diverge].

Es $a_n = S_n - S_{n-1}$. Entonces $a_n \to 0$, pues S_n y S_{n-1} tienen, desde luego, el mismo límite.

Ej. $\sum (-1)^n e^{1/n}$ diverge, porque a_n no tiende a 0 (ni a nada; pares $\to 1$, impares $\to -1$).

Veamos que la implicación opuesta $\Leftarrow$ es **falsa**, o sea, que no basta que los números a_n que sumemos tiendan a 0 para que la serie converja. Para ello basta un contraejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \text{ diverge. Como } S_n = 1 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty$$

Más en general, se prueba que: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{array}{l} \text{converge si } s>1 \\ \text{diverge si } s\leq 1 \end{array}}$ $\left[\sum \frac{1}{n} \text{ diverge, } \sum \frac{1}{n^{100/99}} \text{ converge, } \ldots\right]$.

Citemos dos criterios para series de **términos positivos** $a_n \geq 0$. En ellos se compara nuestra serie con otra de convergencia conocida (normalmente con $\sum \frac{1}{n^s}$; por eso serán adecuados cuando hay como mucho potencias de n ; si hay términos mayores, como 3^n o $n!$, será mejor el criterio del cociente que veremos).

Criterio de comparación por desigualdades: $\boxed{\text{Si } 0 \leq a_n \leq b_n \text{ , entonces } \sum b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum a_n \text{ converge.}}$

[Por tanto $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverge. Pero no se sabe nada si la mayor diverge o menor converge].

Ej. $\sum \frac{\operatorname{sen} n + 1}{n^3 + n}$ converge, ya que $0 \leq \frac{\operatorname{sen} n + 1}{n^3 + n} \leq \frac{2}{n^3}$ y sabemos que $\sum \frac{2}{n^3} = 2 \sum \frac{1}{n^3}$ converge.

Criterio de comparación por paso al límite:

$$\boxed{\text{Sean } a_n \text{ , } b_n \geq 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \text{ (finito). Entonces: } \begin{array}{l} \text{Si } c>0 \text{, } \sum a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum b_n \text{ converge.} \\ \text{Si } c=0 \text{, } \sum b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum a_n \text{ converge.} \end{array}}$$

A partir de ahora, para abreviar, escribiremos: $\boxed{a_n \sim b_n \text{ si } \frac{a_n}{b_n} \to c>0}$

La parte del criterio con $c>0$ permite determinar la convergencia de muchas series a simple vista, mirando sólo en los términos n^s que 'mandan' en numerador y denominador:

Ej. $\sum \frac{n-1}{n^2}$ diverge, porque $a_n \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ $\big($es decir, $\frac{a_n}{1/n} = \frac{n}{n-1} \to 1 > 0\big)$ y $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
[La comparación por $\leq$ no es adecuada aquí (de la acotación sencilla $a_n \leq \frac{1}{n}$ no sale nada].

Ej. $\sum \frac{\arctan n}{4n^2+3}$ converge, ya que $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ $\left(\frac{a_n}{1/n^2} \to \frac{\pi}{8}\right.$, pues $\left.\arctan n \to \frac{\pi}{2}\right)$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Ej. $\sum \frac{1}{7^n+(-1)^n}$ converge: $a_n \sim \frac{1}{7^n}$ $\left(\frac{a_n}{1/7^n} \to 1 > 0 \right)$ y $\sum \left(\frac{1}{7}\right)^n$ es geométrica convergente.

Veamos ahora criterios para **series de términos cualesquiera**.
Consideremos primero la serie, de términos positivos, de los valores absolutos $\sum |a_n|$.

Teor: $\boxed{\sum |a_n| \text{ es convergente } \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente.}}$

La implicación $\Leftarrow$ es falsa: pronto veremos series $\sum a_n$ convergentes pero con $\sum |a_n|$ divergente.

Ej. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ converge pues lo hace su valor absoluto $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge (ya que $a_n \sim \frac{1}{n^2}$).

Ej. $\sum \frac{\cos n}{3^n}$. $\sum \frac{|\cos n|}{3^n} \leq \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ geométrica convergente $\Rightarrow \sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Ej. $\sum \frac{\cos n}{n}$. De $\sum \frac{|\cos n|}{n}$ no sacamos nada $\big(\leq \sum \frac{1}{n}$ divergente$\big)$. No sabremos decir si converge.

Ej. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$. $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ diverge, pero ella sí converge por el próximo criterio.

Criterio de Leibniz (para series alternadas):

$$\boxed{\text{Si } a_n \geq 0 \text{ es decreciente y } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots \text{ converge.}}$$

Ej. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ convergía absolutamente. También podemos ver que converge usando Leibniz:
Es alternada, $\frac{1}{n^2+1} \to 0$ y $\forall n$ es $\frac{1}{n^2+1} > \frac{1}{(n+1)^2+1}$.

Ej. $\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \cdots$ es alternada y $a_n \to 0$, pero **no decrece** (y Leibniz no es aplicable).
De hecho diverge: $S_2 = 1$, $S_4 = 1 + \frac{1}{2}$, . . . , $S_{2n} = 1 + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

Para las series con n en exponentes o factoriales es muy útil el siguiente criterio:

Criterio del cociente: $\boxed{\text{Sea } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r \text{ . Entonces: } \begin{array}{l} \text{si } r < 1 \text{ , } \sum a_n \text{ converge (absolutamente)} \\ \text{si } r > 1 \text{ (ó } r = \infty \text{) , } \sum a_n \text{ diverge} \end{array}}$

(Y si $r = 1$, el criterio no decide: la serie puede converger o divergir).

Ej. $\sum \frac{1}{n^s}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^s}{(n+1)^s} \to 1$; el cociente no decide para este tipo de series.

Ej. $\sum \frac{(-3)^n}{3+n!}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}}{3+(n+1)!} \frac{3+n!}{3^n} = 3\,\frac{3/n!+1}{3/n!+n+1} \to 0$. Converge. [Por Leibniz es complicado].

Ej. $\sum 2^n 7^{-\sqrt{n}}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2 \cdot 7^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \to 2$ $\big($pues $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 0\big)$. Diverge.

En los dos siguientes discutimos la convergencia según los valores de los a y b que aparecen:

Ej. $\sum \frac{n^a}{b^n}$, con $a > 0$, $b \neq 0$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^a |b|^n}{n^a |b|^{n+1}} = \frac{(1+1/n)^a}{|b|} \to \frac{1}{|b|}$.
Converge para $|b|>1$ (de esto deducimos que $n^a/b^n \to 0$ si $|b|>1$) y diverge para $|b|<1$. Para $b=\pm 1$ cociente no decide, pero está claro que diverge porque el término general no tiende a 0.

Ej. $\sum \frac{b^n}{n!}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|b|^{n+1}/(n+1)!}{|b|^n/n!} = \frac{|b|}{n+1} \to 0$. Convergente $\forall b$, por gordo que sea.
Por tanto, $b^n/n! \to 0$ para cualquier b , límite que tampoco es fácil de calcular directamente.

Series de potencias (extendiendo algo más lo escrito en los apuntes de Métodos).

A una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ se le llama serie de potencias en $(x-a)$.

Para cada x que converja la suma de la serie será un número real. Por tanto, define una función $f(x)$ cuyo dominio serán los x para los que converge. Supondremos a partir de ahora, por sencillez, que $a=0$ (en caso contrario haríamos $x-a=t$ y estaríamos en el caso $a=0$):

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots}$$ (viene a ser, pues, un 'polinomio infinito').

Una serie de estas siempre converge en $x=0$ $\big($y $f(0)=c_0\big)$, pero no tiene que hacerlo $\forall x$: vimos que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge si y sólo si $|x|<1$. En general, **toda serie de potencias converge en un intervalo centrado en el origen** (que puede degenerar en $x=0$ o ampliarse a todo $\mathbf{R}$):

Teor: A cada serie de potencias está asociado un **radio de convergencia** R tal que:
i) si $R=0$, la serie sólo converge en $x=0$,
ii) si R es un real positivo, la serie converge si $|x|<R$ y diverge si $|x|>R$,
iii) si $R=\infty$, la serie converge para todo x.

[En el caso ii), **para** $x=R$ **y** $x=-R$ **la serie puede converger o divergir**].

El R se podrá calcular casi siempre mediante el **criterio del cociente**. Por ejemplo, **si en la serie aparecen todos los** x^n $\big($no si es del tipo $\sum c_n x^{2n}$ ó $\sum c_n x^{2n+1}\big)$ se tiene que:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}\text{, si existe o es infinito, pues } \lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}||x|^{n+1}}{|c_n||x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\leqslant 1 \Leftrightarrow |x|\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

Ej. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{5n+1}}{(n-2)!}$. Cociente: $\frac{|x|^{5n+6}}{(n-1)!}\frac{(n-2)!}{|x|^{5n+1}}=\frac{|x|^5}{n-1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ \forall x \Rightarrow$ converge $\forall x$, es decir, $R=\infty$.
[No podíamos aplicar la fórmula para R y por eso usamos directamente el cociente].

Propiedad esencial de las series de potencias es que (como si fuesen polinomios) **se pueden derivar e integrar término a término dentro de su intervalo de convergencia** $|x|<R$:

Teor: Sea $R>0$ (finito o infinito) y sea $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ para $|x|<R$. Entonces para $|x|<R$:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots,\quad f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}=2c_2+6c_3x+\cdots$$

$$\int\Big(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\,dx\Big)=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}=C+c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\cdots.$$

Las series de potencias también se suman, multiplican,... como si fuesen polinomios:

Teor: Sean $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, $|x|<R_f$ y $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, $|x|<R_g$. Entonces si $|x|<\min(R_f,R_g)$:

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[c_n+b_n]x^n,\quad f(x)g(x)=c_0b_0+(c_0b_1+c_1b_0)x+(c_0b_2+c_1b_1+c_2b_0)x^2+\cdots$$

Ej. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty$. Converge $\forall x$ (veremos que a e^x).
Su serie derivada coincide con ella: $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)\ \forall x\in\mathbf{R}$ (natural, si es e^x).

Ej. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+\cdots$. Su radio de convergencia es $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1\Rightarrow$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots,\quad f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}x^{n-2}=\frac{1}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x^2}{4}+\cdots,\text{ si } |x|<1.$$

Como $\sum\frac{1}{n^2}$ converge y $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ también (absolutamente o Leibniz), la serie de f converge en ambos extremos $x=\pm1$ del intervalo de convergencia. Las de las derivadas se comportan peor.
La de f' converge en $[-1,1)$ $\big($en $x=1$ es $\sum\frac{1}{n}$ y en $x=-1$ converge por Leibniz$\big)$.
La de f'' lo hace sólo en $(-1,1)$, pues el término general no tiende a 0 en los extremos.

Las funciones definidas por series son 'muy buenas' en $(-R,R)$ (tienen infinitas derivadas ahí, o incluso en todo $\mathbf{R}$, si $R=\infty$). Pero para hallar los valores de estas funciones tan buenas debemos sumar series (y por eso casi siempre nos tendremos que conformar con valores aproximados).

Series de Taylor. Dada f con infinitas derivadas en 0 su **serie de Taylor** en $x=0$ es $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$.

Esta serie de potencias es un 'polinomio de Taylor de infinitos términos' y es previsible que una f coincida con su serie de Taylor (donde la serie converja). De hecho, se prueba que:

$$\boxed{\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ ,\ \ \operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ \ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n x^{2n}}{(2n)!}}\ ,\ \forall x\in\mathbf{R}$$

Operando con la serie de e^x y la de $\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots$ obtenemos que:

$$\boxed{\operatorname{sh}x=x+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,\ \operatorname{ch}x=1+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}}\ ,\forall x\in\mathbf{R}$$

Sabemos que $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ si $|x|<1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[-x]^n$ y $\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[-1]^n x^{2n}$ si $|x|<1$.

Por tanto: $\boxed{\log(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n}{n+1}\,x^{n+1}\ ,\ \ \arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[-1]^n}{2n+1}\,x^{2n+1}\ ,\ \ \text{para } |x|<1}$

pues las derivadas de las series son las de arriba y en $x=0$ se anulan funciones y series.

Comprobemos, con el criterio del cociente, que converge ahí, por ejemplo, la serie de $\arctan x$:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{|x|^{2k+3}}{2k+3}\frac{2k+1}{|x|^{2k+1}}=|x|^2\frac{2k+1}{2k+3}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}|x|^2<1\ \Leftrightarrow\ |x|<1\,.$$

[La serie de $\log(1+x)$ converge también en $x=1$ y la de $\arctan x$ en $x=\pm1$ (en ambas $R=1$) lo que no hacen las series derivadas; se puede ver que convergen (lentamente) hacia $\log 2$ y $\pm\arctan 1$:

$$\log 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\cdots\quad,\quad \tfrac{\pi}{4}=1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\cdots$$

Parece normal que la serie del $\log(1+x)$ o la de $\frac{1}{1+x}$ sólo converjan cuando $|x|<1$ pues en $x=-1$ las funciones se van a infinito, pero sorprende que lo haga sólo en ese intervalo la serie de $\frac{1}{1+x^2}$, que es derivable en todo $\mathbf{R}$. La explicación se tiene mirando las función en el plano complejo].

Otra serie muy útil es la de $f(x)=(1+x)^p$, $p\in\mathbf{R}$ (x^p no desarrollable en 0). Derivando:

$$\boxed{(1+x)^p=1+px+\tfrac{p(p-1)}{2!}x^2+\tfrac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\cdots,\ \text{ si } |x|<1}$$ (generaliza el binomio de Newton)

$\Big[$en particular se tiene: $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots$, $\ldots\Big]$

De las series de Taylor anteriores podemos deducir muchísimas otras:

Ej. Hallemos de varias formas 4 términos no nulos del desarrollo de e^{2x-x^2} (válido $\forall x$):

$$\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x^2}=\Big[1+2x+2x^2+\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{2}{3}x^4+\cdots\Big]\Big[1-2x^2+2x^4+\cdots\Big]=1+2x-\tfrac{8}{3}x^3-\tfrac{4}{3}x^4+\cdots$$

$$\mathrm{e}^{2x-2x^2}=1+[2x-2x^2]+\tfrac{1}{2}[2x-2x^2]^2+\tfrac{1}{6}[2x-2x^2]^3+\tfrac{1}{24}[2x-2x^2]^4+\cdots=1+2x-\tfrac{8}{3}x^3-\tfrac{4}{3}x^4+\cdots$$

$$\frac{1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\cdots}{1+2x^2+2x^4+\cdots}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\ \Rightarrow\ x^0:\ a_0=1\,;\ \ x^1:\ a_1=2\,;$$

$$x^2:\ a_2+2a_0=2\,,\ a_2=0\,;\ \ x^3:\ a_3+2a_1=\tfrac{4}{3}\,,\ a_3=\tfrac{4}{3}-4=-\tfrac{8}{3}\,;\ \ x^4:\ a_4+2a_2+2a_0=\tfrac{2}{3}\,,\ a_4=-\tfrac{4}{3}\,.$$

Lo que menos conviene es derivar muchas veces la función dada:

$$f'(x)=2(1-2x)\,\mathrm{e}^{2x-2x^2},\ f''(x)=16(-x+x^2)\,\mathrm{e}^{2x-2x^2},\ f'''(x)=16(-1+6x^2-4x^3)\,\mathrm{e}^{2x-2x^2},$$
$$f^{IV}(x)=32(-1+8x-16x^3+8x^4)\,\mathrm{e}^{2x-2x^2}\ \Rightarrow\ f(x)=1+2x-\tfrac{16}{6}x^3-\tfrac{32}{24}x^4+\cdots.$$

Aunque $f\in C^\infty(\mathbf{R})$ y su serie de Taylor converja $\forall x$, la f puede no coincidir con la serie:
Para la función $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$, $f(0)=0$, se prueba que $f^{(n)}(0)=0\ \forall n$. Su serie de Taylor es $\sum 0\cdot x^n=0$, convergente $\forall x$; pero, evidentemente, no coincide con f salvo en $x=0$.

Def. $\boxed{f \text{ es } \textbf{analítica} \text{ en } x=0 \text{ si viene dada por una serie de potencias en un entorno } |x|<r\,.}$

(deberá, al menos, tener infinitas derivadas en $x=0$). e^x, $\operatorname{sen}x$, $\cos x$, $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$, $\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^p$ son analíticas en $x=0$ (coinciden las cinco primeras con una serie en todo $\mathbf{R}$, y el resto en $|x|<1$). También lo son sumas, productos o cocientes con denominador no nulo de ellas.

E incluso funciones como: $g(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$, $g(0)=0$, pues $g(x)=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+\cdots\ \ \forall x$.

Son obviamente no analíticas las funciones discontinuas ($\log x$ en $x=0$, por ejemplo), o con sólo un número finito de derivadas (como $x^{8/3}$, que sólo tiene 2). La f de arriba es un ejemplo de función que no es analítica en 0 a pesar de ser de C^∞ en ese punto.