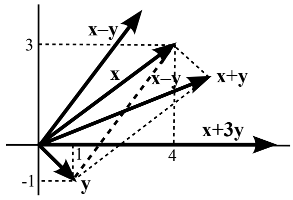
Soluciones de problemas 1 de MM(im) (2020)

1. $\mathbf{x}=(4,3)$, $\mathbf{y}=(1,-1)$. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(5,2)$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}=(3,4)$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}=(7,0)$,

$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|=\sqrt{29}\le 6\le 5+\sqrt{2}=\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$. $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=5=$ distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|=1\le 5\sqrt{2}=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>0 \Rightarrow$ ángulo agudo. $\|\mathbf{x}+3\mathbf{y}\|=7$.

$\frac{(\mathbf{x}+3\mathbf{y})\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}+3\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{y}\|}=\frac{7}{7\sqrt{2}}=\cos\phi \rightarrow$ $\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$ forman un ángulo $\frac{\pi}{4}$ (claro en dibujo).



2. $\mathbf{b}-\mathbf{a}=(0,1,1)$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=(1,-1,1)$, $\underset{\text{perpendiculares}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0}$. $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|=\sqrt{2}=$ distancia de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

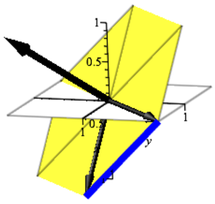
$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}=\frac{1}{2}=\cos\phi \rightarrow$ $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$. $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|=\|(2,1,-1)\|=\sqrt{6}\le 2\sqrt{2}=\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$ ($6<8$).

Plano que contiene a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$: $\mathbf{x}=t(1,0,-1)+s(1,1,0)$, $\begin{cases}x=t+s\\y=s\\z=-t\end{cases}$ $\rightarrow$ $\boxed{z=y-x}$.

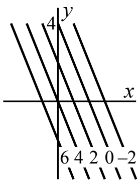
O como $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es perpendicular a este plano: $(1,-1,1)\cdot(x,y,z)=0$ ↗

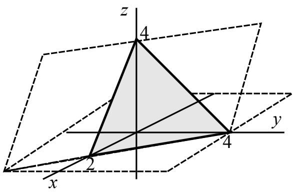
Segmentos $\mathbf{c}(t)=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ y $\mathbf{c}_*(t)=\mathbf{b}+t(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, ambos con $t\in[0,1]$. Es decir:

$\mathbf{c}(t)=(1,0,-1)+t(0,1,1)=\boxed{(1,\,t,\,t-1)}$, $\mathbf{c}_*(t)=(1,1,0)+t(0,-1,-1)=\boxed{(1,1-t,-t)}$

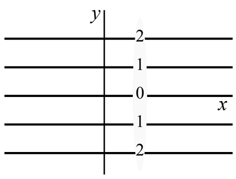


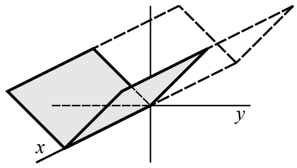
3. a) $\boxed{z=4-2x-y}$ $\quad x=0 \rightarrow z=4-y$, $\ y=0 \rightarrow z=4-2x$ $\quad$ curvas de nivel: $y=4-C-2x$





b) $\boxed{z=|y|}$ $\quad$ corte con todo plano $x=cte \rightarrow z=|y|$ $\quad$ curvas de nivel: $|y|=C$



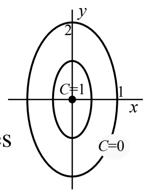


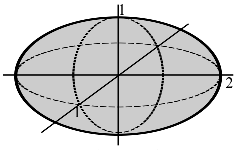
c) $\boxed{4x^2+y^2+4z^2=4}$

$z=C \rightarrow 4x^2+y^2=4-4C^2$ ↖

$x=0 \rightarrow \frac{y^2}{2^2}+z^2=1 \leftarrow$ elipses

$y=0 \rightarrow x^2+z^2=1$



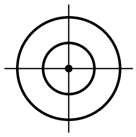


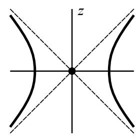
elipsoide (esfera estirada ← →)

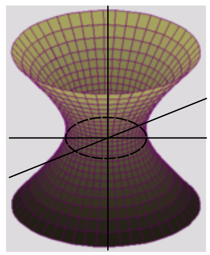
d) $\boxed{z^2=x^2+y^2-1}$ de revolución

$x=0 \rightarrow y^2-z^2=1$

$y=0 \rightarrow x^2-z^2=1$ $\quad$ hipérbolas







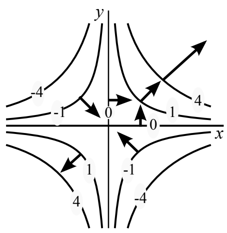
hiperboloide de una hoja (wikipedia)

4. a) $\boxed{f(x,y)=xy}$ $\quad \nabla f=(y,x) \quad = (1,0)\ (0,1)\ (1,1)\ (2,2)\ (1,-1)\ (-1,1)\ (-1,-1)$

en $(0,1)\ (1,0)\ (1,1)\ (2,2)\ (-1,1)\ (1,-1)\ (-1,-1)$

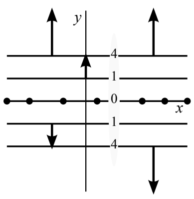
[silla de montar como la del Ej 8]

Plano tangente: $\boxed{z=x+y-1}$.



b) $\boxed{g(x,y)=y^2}$ $\quad \nabla g=(0,2y)\ \ [=(0,2)$ en $(1,1)]$.

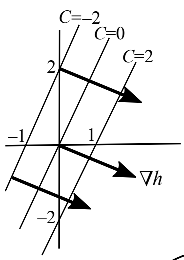
Plano tangente: $z=1+2(y-1)$, $\boxed{z=2y-1}$.



c) $\boxed{h(x,y)=2x-y}$ $\quad \nabla h=(2,-1)$ (constante y ⊥ a las rectas)

Plano tangente: $z=1+2(x-1)-(y-1)$, $\boxed{z=2y-x}$.

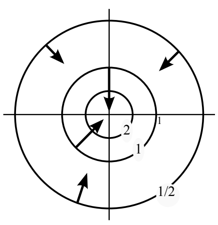
(claro, debía ser el propio plano)



d) $\boxed{k(x,y)=(x^2+y^2)^{-1}}$ $\quad \nabla k=-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y)$. $\nabla k(1,1)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

[∇k apunta hacia el origen y es mayor cuanto más cerca estemos].

Plano tangente: $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)$, $\boxed{z=\frac{3-x-y}{2}}$.



5. $\boxed{f(x,y)=x^5y-4x-xy^3}$ $\;f_x=5x^4y-4-y^3\,,\ f_y=x^5-3xy^2\,.\ \ f_{xx}=20x^3y\,,\ f_{xy}=f_{yx}=5x^4-3y^4\,,\ f_{yy}=-6xy\,.$

$\boxed{g(x,y)=x\,e^{x+y}}$ $\;g_x=(x+1)\,e^{x+y}\,,\ g_y=x\,e^{x+y}\,.\ \ g_{xx}=(x+2)\,e^{x+y}\,,\ g_{xy}=g_{yx}=(x+1)\,e^{x+y}\,,\ g_{yy}=x\,e^{x+y}\,.$

$\boxed{h(x,y)=\frac{\cos(xy)}{x}}$ $\;h_x=-\frac{1}{x^2}\cos(xy)-\frac{y}{x}\,\text{sen}(xy)\,,\ h_y=-\,\text{sen}(xy)\,.$

$h_{xx}=\left[\frac{2}{x^3}-\frac{y^2}{x}\right]\cos(xy)+\frac{2y}{x^2}\,\text{sen}(xy)\,,\ h_{xy}=h_{yx}=-y\cos(xy)\,,\ h_{yy}=-x\cos(xy)\,.$

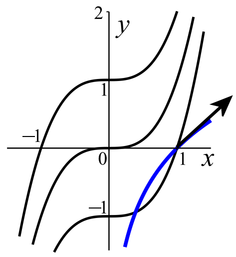
$\boxed{k(x,y)=\arctan\frac{x}{y}}$. $\;k_x=\frac{y}{x^2+y^2}\,,\ k_y=-\frac{x}{x^2+y^2}\,.\ \ k_{xx}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,\ k_{xy}=k_{yx}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\ k_{yy}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$

6. $\boxed{F(x,y,z)=x^3-2yz+e^xz^2}$. $\;\nabla F=\left(3x^2+z^2e^x,\,-2z,\,2ze^x-2y\right)\overset{(0,1,2)}{\longrightarrow}2(2,-2,1)\,.$

Plano: $(2,-2,1)\cdot(x,y-1,z-2)=0\,.$ $\boxed{z=2y-2x}$.

Perpendicular al vector y al gradiente en el punto es $(1,0,1)\times(2,-2,1)=(2,1,-2)\to\boxed{\bar u=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)}$ $[\text{o } -\bar u]$.

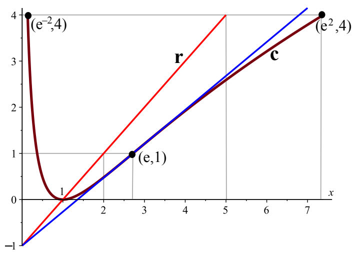
[O resolviendo $\begin{matrix}a+c=0 & \to & c=-a\\ 2a-2b+c=0 & & a=2b\end{matrix}$, vector de la forma $(2b,b,-2b)$ de módulo $9|b|$].



7. $\boxed{f(x,y)=\left(x^3-y\right)^2}$ y $\boxed{\mathbf{c}(t)=(t,\ln t)}$. $\;f=0,1\to y=x^3\,,\ y=x^3\pm1\,.$

$\nabla f=\left(6x^2(x^3-y)\,,2(y-x^3)\right),\ \nabla f(1,0)=(6\,,-2)\,,$

$\mathbf{c}'(t)=(1,\frac{1}{t})\overset{t=1}{\to}(1,1)$, de módulo $\|\|=\sqrt{2}$. $\;D_{\mathbf{u}}f(1,0)=(6,-2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=\boxed{2\sqrt2}$.



8. $\boxed{\mathbf{c}(t)=\left(e^t,\,t^2\right)}$, $t\in[-2,2]$. Pasa por los puntos $(e^{-2},4)$, $(1,0)$, $(e,1)$ y $(e^2,4)$.

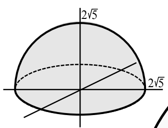
[La curva es la gráfica de $y=(\log x)^2$, pues $t=\log x$ e $y=t^2$].

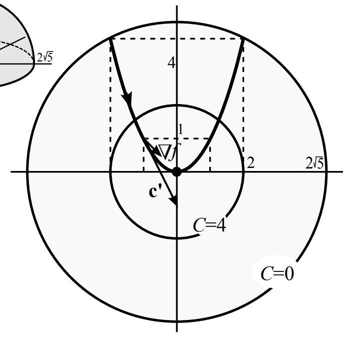
i) $\mathbf{c}'(t)=\left(e^t,\,2t\right)$, $\mathbf{c}'(1)=(e,2)$. Tangente $\mathbf{x}=(e,1)+t(e,2)=(e+t\,e,\,1+2t)$.

En cartesianas: $t=\frac{x}{e}-1=\frac{y-1}{2}$, $y=\frac{2}{e}x-1$. Normales $(\pm1,\mp e)\to\frac{1}{\sqrt{e^2+1}}(\pm1,\mp e)$.

ii) La recta $\mathbf{r}(s)=(s,s-1)$ corta la curva sólo en $(1,0)$ ($t=0$ y $s=1$).

[$s=e^t,\ s-1=t^2\ \Rightarrow\ 1+t^2=e^t\Leftrightarrow t=0$, como muestran las gráficas].





9. $\boxed{g(x,y)=\sqrt{20-x^2-y^2}}$ $\boxed{\mathbf{c}(t)=(t,t^2)}$

a) $g(x,y)=C\ \to\ x^2+y^2=20-C^2$. Circunferencias para $0\le C<2\sqrt5$.

Para $C=2\sqrt5$ es el punto $(0,0)$. C es parte de la parábola $y=x^2$.

b) $g_x=\frac{-x}{\sqrt{20-x^2-y^2}}\,,\ g_y=\frac{-y}{\sqrt{20-x^2-y^2}}\,.\ \ \nabla g(-1,1)=\left(\frac{1}{3\sqrt2},-\frac{1}{3\sqrt2}\right).$

Plano tangente: $z=3\sqrt2+\frac{1}{3\sqrt2}(x+1)-\frac{1}{3\sqrt2}(y-1)\,,$ $\boxed{z=\frac{1}{3\sqrt2}[20+x-y]}$.

O bien: $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=20\ \to\ \left(2,2,6\sqrt2\right)\cdot\left(x+1,y-1,z-3\sqrt2\right)=0\,.$ ↑

c) $\mathbf{c}'(-1)=(1,2t)\big|_{t=-1}=(1,-2)\,.\ \ h'(t)=g_x\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t)+g_y\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t)=\nabla g(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,.$

$h'(-1)=\nabla g(-1,1)\cdot(1,-2)=\boxed{\frac{1}{\sqrt2}}$. [Componiendo y derivando: $h(t)=\sqrt{20-t^2-t^4}\,,\ h'(t)=\frac{-t-2t^3}{\sqrt{20-t^2-t^4}}\overset{t=-1}{\longrightarrow}\frac{1}{\sqrt2}$].

10. $\boxed{h(t)=f(t,-t,t^2)}$ $\;h'(t)=f_x-f_y+2tf_z\,,\ h''(t)=(f_x)'-(f_y)'+2t(f_z)'+2f_z$

$=f_{xx}-f_{xy}+2tf_{xz}-f_{yx}+f_{yy}-2tf_{yz}+2tf_{zx}-2tf_{zy}+4t^2f_{zz}+2f_z$

$=f_{xx}+f_{yy}+4t^2f_{zz}-2f_{xy}+4tf_{xz}-4tf_{yz}+2f_z$

En concreto, para la f dada es $h(t)=t^4$, $h''(t)=12t^2$. Con la fórmula: $h''(t)=8t^2+4z\big|_{z=t^2}=12t^2\,.$

11. $\boxed{\mathbf{g}(x,y,z)=\left(2x^2-y+3z^3,\,2y-x^2\right)}$ $\;\mathbf{Dg}=\begin{pmatrix}4x & -1 & 9z^2\\ -2x & 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\ \mathbf{Dg}\,(2,-1,1)=\begin{pmatrix}8 & -1 & 9\\ -4 & 2 & 0\end{pmatrix}.$

$\mathbf{Df}\ \mathbf{Dg}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 9\\ 12 & 0 & 18\end{pmatrix}.$

$\boxed{\mathbf{f}(u,v)=\left(e^{u+2v},\,2u+v\right)}$ $\;\mathbf{Df}=\begin{pmatrix}e^{u+2v} & 2e^{u+2v}\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{g}(2,-1,1)=(12,-6)\ \Rightarrow\ \mathbf{Df}(12,-6)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y,z)=\left(e^{3y+3z^3},\,3x^2+6z^3\right),\ \ \mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})=\begin{pmatrix}0 & 3e^{-} & 9z^2e^{-}\\ 6x & 0 & 18z^2\end{pmatrix},$ que en $(2,-1,1)$ ↑

12. $\boxed{f(x,y)=\frac{x+y}{1+xy}}$ $f_x=\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$, $f_y=\frac{1-x^2}{(1+xy)^2}$, $\nabla f(0,2)=(-3,1)$. Plano tangente: $z=2-3x+y-2=y-3x$.

Recta tangente, perpendicular al gradiente: $(x,y-2)\cdot(-3,1)=0 \;\rightarrow\; y=3x+2$.

O directamente: $\frac{x+y}{1+xy}=2 \;\rightarrow\; y=\frac{2-x}{1-2x} \;\rightarrow\; y'(0)=\frac{3}{(1-2x)^2}\Big|_{x=0}=3 \;\rightarrow\; y=2+3x$.

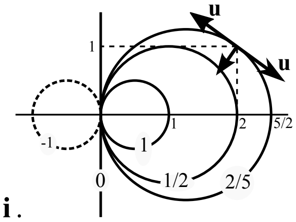
O derivando implícitamente: $\frac{(1+y')(1+xy)-(x+y)(y+xy')}{(1+xy)^2}\Big|_{x=2,y=0}=1+y'-4=0 \;\rightarrow\; y'(0)=3\;\ldots$

Si $h(u,v)=f(u^3+v^2-1,\mathrm{e}^v+1)$, es $\mathbf{D}h(1,0)=\nabla h(1,0)=\big(\nabla f(0,2)\big)\big(\mathbf{Dg}(1,0)\big)=(-3,1)\begin{pmatrix}3\cdot 1^2 & 2\cdot 0\\ 0 & \mathrm{e}^0\end{pmatrix}=(-9,1) \;\Rightarrow$

$$D_{(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})}h(1,0)=(-9,1)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-5\sqrt{2}\,.$$

13. $\boxed{f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}}$ $C=0 \rightarrow x=0$. $\frac{x}{x^2+y^2}=C \;\rightarrow\; x^2+y^2=\frac{x}{C}$, $\left(x-\frac{1}{2C}\right)^2+y^2=\frac{1}{4C^2}$ si $C\neq 0$,

circunferencias de centro $\left(\frac{1}{2C},0\right)$ que pasan por $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{C},0\right)$.



$\nabla f(x,y)=\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$, $\nabla f(2,1)=\left(-\frac{3}{25},-\frac{4}{25}\right)$ ($\perp$ a la circunferencia por el punto).

i) La derivada direccional es 0 en dirección perpendicular a ∇f : $\boxed{\mathbf{u}=\left(\pm\frac{4}{5},\mp\frac{3}{5}\right)}$.

ii) Uno claro es $\boxed{\mathbf{u}=(1,0)}$, pues la parcial $f_x=-\frac{3}{25}$ es precisamente la derivada según $\mathbf{i}$.

Con menos vista: $D_{\mathbf{u}}f(2,1)=\nabla\cdot\mathbf{u}=\left(-\frac{3}{25},-\frac{4}{25}\right)\cdot(a,b)=-\frac{3}{25} \rightarrow 3a+4b=3$, $b=\frac{3}{4}(1-a)$ y además $a^2+b^2=1$

$\rightarrow\; a^2+\frac{9}{16}a^2-\frac{9}{8}a+\frac{9}{16}=1$, $25a^2-18a-7=0$, $a=1$ ó $-\frac{7}{25} \rightarrow b=0$ ó $\frac{24}{25}$. $\mathbf{u}=\left(-\frac{7}{25},\frac{24}{25}\right)$ otro.

$\Delta f=-2x\left(x^2+y^2\right)^{-2}+4x\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^{-3}-2x\left(x^2+y^2\right)^{-2}+8xy^2\left(x^2+y^2\right)^{-3}=\frac{4x}{(x^2+y^2)^3}\left[-x^2-y^2+x^2-y^2+2y^2\right]=\boxed{0}$.

Mejor en polares: $f(r,\theta)=\frac{\cos\theta}{r}$, $f_r=-\frac{\cos\theta}{r^2}$, $f_{rr}=\frac{2\cos\theta}{r^3}$, $f_{\theta\theta}=-\frac{\cos\theta}{r}$, $\Delta f=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=0$.

14. **a]** $\frac{x^2+y^2}{2+x^2+y^2}=C \;\rightarrow\; x^2+y^2=\frac{2C}{1-C}=1\,,2\,,4$ para $C=\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}$.

$z=\frac{y^2}{2+y^2}\xrightarrow[y\to\pm\infty]{}1$; par; $z'=\frac{4y}{(2+y^2)^2}$; $z(0)=0$, $z(1)=\frac{1}{3}$, $z(2)=\frac{2}{3}$.

b] $\nabla f=\left(\frac{4x}{(2+x^2+y^2)^2},\frac{4y}{(2+x^2+y^2)^2}\right)$. $\nabla f(1,-1)=\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$.

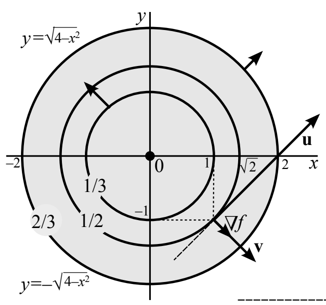
Plano tangente: $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{4}(y+1)$, $z=\frac{1}{4}(x-y)$.

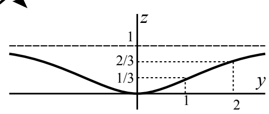
$D_{(2,2)}f(1,-1)=\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)\cdot(2,2)=0$ [perpendicular $\mathbf{u}$ al gradiente]

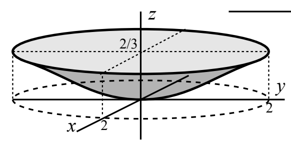
Máxima en la dirección y sentido de ∇f : $\mathbf{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c] Mejor en polares: $f(r)=\frac{r^2}{2+r^2}$, $f_r=\frac{4r}{(2+r^2)^2}$, $f_{rr}=\frac{8-12r^2}{(2+r^2)^3}$.

$$\Delta f=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r=\frac{8(2-r^2)}{(2+r^2)^3}=\frac{8(2-x^2-y^2)}{(2+x^2+y^2)^3}\,.$$







15. $\boxed{\mathbf{f}(x,y)=\left(x^2,1,y^2\right),\; g(x,y,z)=z}$ a) $\operatorname{div}\mathbf{f}=2x$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ x^2&1&y^2\end{vmatrix}=(2y,0,0)$. $\nabla g=(0,0,1)$. $\Delta g=0$.

$\operatorname{rot}(\nabla g)=\mathbf{0}$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=0$ (sin necesidad de calcular nada). $\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g)=\nabla(y^2)=(0,2y,0)$.

$\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g)=\operatorname{rot}(1,-x^2,0)=(0,0,-2x)$. $\operatorname{rot}\big(\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g)\big)=\mathbf{0}$, $\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g)\big)=0$ (de nuevo sin calcular).

b) $\operatorname{div}(g\,\mathbf{f})=g_xf_1+gf_{1x}+g_yf_2+gf_{2y}+g_zf_3+gf_{3z}=g(f_{1x}+f_{2y}+f_{3z})+(g_x,g_y,g_z)\cdot(g_1,g_2,g_3)=g\operatorname{div}\mathbf{f}+\nabla g\cdot\mathbf{f}$.

$$\operatorname{rot}(g\,\mathbf{f})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ gf_1&gf_2&gf_3\end{vmatrix}=(g_yf_3+gf_{3x}-g_zf_2-gf_{2z},\,g_zf_1+gf_{1z}-g_xf_3-gf_{3x},\,g_xf_2+gf_{2x}-g_yf_1-gf_{1y})$$

$$=g(f_{3x}-f_{2z},f_{1z}-f_{3x},f_{2x}-f_{1y})+(g_x,g_y,g_z)\times(f_1,f_2,f_3)=g\operatorname{rot}\mathbf{f}+\nabla g\times\mathbf{f}\,.$$

Comprobando:

$\operatorname{div}(g\,\mathbf{f})=2xz+y^2=z2x+(0,0,1)\cdot(x^2,1,y^2)$. $\operatorname{rot}(g\,\mathbf{f})=(2yz-1,\,x^2,0)=(2yz,0,0)+\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 0&0&1\\ x^2&1&y^2\end{vmatrix}$.

16. $\boxed{\mathbf{F}(x,y,z)=xy\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}}$. $\operatorname{div}\mathbf{F}=3y+x$. $\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ xy&y^2&xz\end{vmatrix}=(0,-z,-x)$. $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})=(1,3,0)$.

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$ (sabido). $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 0&-z&-x\end{vmatrix}=(1,1,0)$. $\nabla(\underbrace{\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}}_{x^2y^2+y^4+x^2z^2})=\left(2x(y^2+z^2),2x^2y+4x^3,2x^2z\right)$.

Soluciones de problemas 2 de MM(im) (2020)

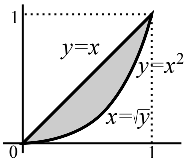
1. a) $\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 x^2dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 y^2dy\,dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 y^2dy = \frac{2}{3}$.

b) $\int_1^2\int_1^2 \log(xy)\,dx\,dy = \int_1^2 \log x\,dx + \int_1^2 \log y\,dy = 2[2\log 2 - 1]$, pues $\int_1^2 \log s\,ds = s\log s\Big]_1^2 - \int_1^2 1\,ds = 2\log 2 - 1$.

c) $\int_0^1\int_0^1 y\,e^{xy}dx\,dy = \int_0^1 \left[e^{xy}\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left[e^y - 1\right] dy = e-1-1 = e-2$.

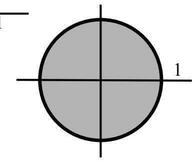
d) $\int_0^1\int_{x^2}^x xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx = \frac12\int_0^1[x^3-x^5]\,dx = \frac12\left[\frac14-\frac16\right] = \frac{1}{24}$.

O bien $\int_0^1\int_y^{\sqrt y} xy\,dx\,dy = \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{\sqrt y} dy = \frac12\int_0^1[y^2-y^3]\,dy = \frac12\left[\frac13-\frac14\right] = \frac{1}{24}$.



e) $\int_{-1}^1 x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 2\int_{-1}^1 \underbrace{x\sqrt{1-x^2}}_{\text{impar}}\,dx = 0$ ó $\int_0^{2\pi}\cos\theta\int_0^1 r^2dr\,d\theta = \frac12\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$.

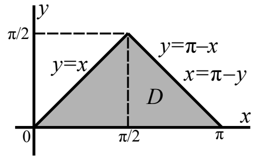
[Podemos decirlo sin cálculos pues es integral de función impar en recinto simétrico].



f) $\iint_D \operatorname{sen}x\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_y^{\pi-y}\operatorname{sen}x\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\big[\cos y - \underbrace{\cos(\pi-y)}_{=-\cos y}\big]\,dy = \Big[2\operatorname{sen}y\Big]_0^{\pi/2} = \boxed{2}$

Peor: $\iint_D = \int_0^{\pi/2}\int_0^x \operatorname{sen}x\,dy\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi-x}\operatorname{sen}x\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\operatorname{sen}x\,dx$

$= -x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx - (\pi-x)\cos x\Big]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx = 0+1+0+1 = \boxed{2}$



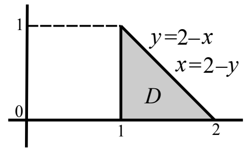
g) Mucho más corto utilizando polares: $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3dr = \frac18\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{4}$.

$\int_{-1}^1 x^2\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[x=\operatorname{sen}t\right] = 4\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2t\,dt = \frac{\pi}{4}$.

h) $\int_1^2\int_0^{2-x}\frac{y}{x^2}\,dy\,dx = \frac12\int_1^2\frac{4-4x+x^2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x} - 2\ln|x|\right]_1^2 + \frac12 = \frac32 - 2\ln 2$.

[f continua en D pues sólo no lo es en $x=0$].

Algo más largo: $\int_0^1\int_1^{2-y}\frac{y}{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 y\left[1-\frac{1}{2-y}\right]dy = \int_0^1\left[y+1-\frac{2}{2-y}\right]dy$.



2. **a]** $f(x,y)=y^2-x=0 \to x=y^2$, $f=-1 \to x=y^2+1$ (parábolas). $\nabla f(x,y)=(-1,2y)$.

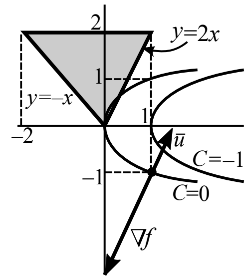
$f(1,-1)=0$, $\nabla f(1,-1)=(-1,-2)$. Plano: $z=-(x-1)-2(y+1)$, $z=-x-2y-1$.

$D_{\mathbf{u}}$ mínima en sentido opuesto a ∇f: $(1,2) \to \bar u = \left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right)$. $D_{\mathbf{u}}f(1,-1) = -\sqrt5$.

$f_{xx}+f_{yy}=2$. $f(r,\theta)=r^2\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta$. $f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2} = 2s^2+2s^2-\frac{c}{r}+2c^2-2s^2+\frac{c}{r} = 2$.

b] $\int_0^2\int_{-y}^{y/2}(y^2-x)\,dx\,dy = \int_0^2\left[y^2\left(\frac{y}{2}+y\right)-\frac{y^2/4-y^2}{2}\right]dy = \int_0^2\left[\frac{3y^3}{2}+\frac{3y^2}{8}\right]dy = \boxed{7}$.

Peor: $\int_{-2}^0\int_{-x}^2 (y^2-x)\,dy\,dx + \int_0^1\int_{2x}^2 (y^2-x)\,dy\,dx = \int_{-2}^0\left(\frac{8+x^3}{3}-2x-x^2\right)dx + \int_0^1\left(\frac{8-8x^3}{3}-2x+2x^2\right)dx = 7$.

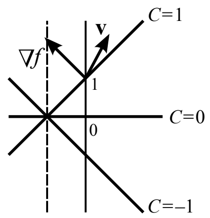


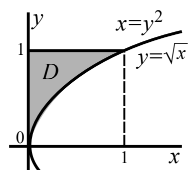
3. **a]** $\boxed{f(x,y)=\frac{y}{x+1}} = 0, 1, -1 \to$ rectas $y=0$, $y=x+1$, $y=-x-1$.

$\nabla f = \left(\frac{-y}{(x+1)^2}, \frac{1}{x+1}\right) \xrightarrow{(0,1)} (-1,1)$. $\Delta f = \frac{2y}{(x+1)^3}$. $D_{\mathbf{v}}f(0,1) = (-1,1)\cdot\left(\frac35,\frac45\right) = \frac15$.

b] $\iint_D f = \int_0^1\int_{\sqrt x}^1 \frac{y}{x+1}\,dy\,dx = \frac12\int_0^1\frac{1-x}{x+1}\,dx = \int_0^1\left[\frac{1}{x+1}-\frac12\right]dx = \ln 2 - \frac12$.

Más largo: $\int_0^1\int_0^{y^2}\frac{y}{x+1}\,dx\,dy = \int_0^1 y\ln(1+y^2)\,dy \underset{\text{partes}}{=} \frac{y^2}{2}\ln(1+y^2)\Big]_0^1 - \int_0^1\frac{y^3+y-y}{1+y^2}\,dy = \frac12\ln 2 - \frac12 + \frac12\ln 2$.





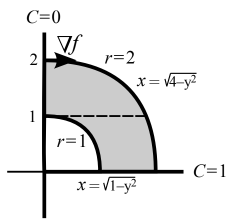
4. $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **a]** $f=0 \to x=0$, $f=1 \to x^2=x^2+y^2$, $y=0$ (si $x>0$; $f=\cos\theta$).

$\nabla f(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,(y,-x) \xrightarrow{(0,2)} \left(\frac12, 0\right)$ (perpendicular a la curva de nivel como debía).

Plano tangente: $z = 0 + \frac12(x-0) + 0(y-1)$, $z = \frac{x}{2}$.

b] En polares: $\iint_D f\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\,\frac{r\cos\theta}{r}\,dr\,d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac32$.

[Peor: $\int f\,dx = \sqrt{x^2+y^2} \to \int_0^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f\,dx\,dy = \int_0^1[2-1]\,dy + \int_1^2[2-y]\,dy = 3 - \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac32$].

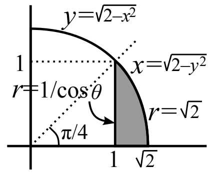


5. $g(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$. a) $\nabla g=\big(xy(x^2+y^2)^{-1/2},\,(x^2+y^2)^{1/2}+y^2(x^2+y^2)^{-1/2}\big)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big(xy,\,x^2+2y^2\big)\xrightarrow{(0,-2)}(0,4)$.

Plano tangente: $z=-4+4(y+2)=4y+4$. $g(r,\theta)=r^2\,\text{sen}\,\theta$. $g_{rr}+\frac{g_r}{r}+\frac{g_{\theta\theta}}{r^2}=2s+2s-s=\boxed{3\,\text{sen}\,\theta}=3y(x^2+y^2)^{-1/2}$.

Más largo: $g_{xx}+g_{yy}=y(x^2+y^2)^{-1/2}-x^2y(x^2+y^2)^{-3/2}+3y(x^2+y^2)^{-1/2}-y^3(x^2+y^2)^{-3/2}\uparrow$

b) $\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^2 r^3\,\text{sen}\,\theta=\big[\frac14 r^4\big]_0^2\big[-\cos\theta\big]_{\pi/2}^{\pi}=\boxed{4}$.



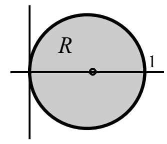
6. i) $\int_1^{\sqrt2}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} x\,dy\,dx=\int_1^{\sqrt2}x\sqrt{2-x^2}\,dx=-\frac13(2-x^2)^{3/2}\Big]_1^{\sqrt2}=\frac13$,

o bien: $\int_0^1\int_1^{\sqrt{2-y^2}} x\,dx\,dy=\int_0^1\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^{\sqrt{2-y^2}}dy=\int_0^1\frac{1-y^2}{2}\,dy=\frac12-\frac16=\frac13$.

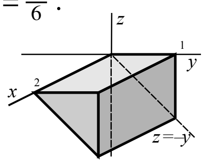
ii) $\int_0^{\pi/4}\int_{1/\cos\theta}^{\sqrt2} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=\frac13\int_0^{\pi/4}\Big[2\sqrt2\,\cos\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}\Big]d\theta=\frac13\big[2\sqrt2\,\text{sen}\,\theta-\tan\theta\big]_0^{\pi/4}=\frac13$.

7. $M=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r\cos\theta\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}(1-\text{sen}^2\theta)\cos\theta\,d\theta=\frac23$. $\bar y=0$ por simetría de R y ρ.

$\bar x=\frac1M\,2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r^2\cos^2\theta\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}(1-\text{sen}^2\theta)^2\cos\theta\,d\theta=\frac{8}{15}$.



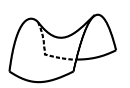
8. z positiva en el rectángulo: $V=\int_0^1\int_1^2(x^2+y)\,dy\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 y\,dy=\frac13+\frac{4-1}{2}=\frac{11}{6}$.

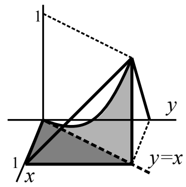


9. a) $\int_0^2\int_0^1\int_{-y}^0 e^y\,dz\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^1 y\,e^y\,dy\,dx=2\int_0^1 y\,e^y\,dy=2\big[(y-1)\,e^y\big]_0^1=2$.

b) $\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy}xy^2z^3\,dz\,dy\,dx=\frac14\int_0^1\int_0^x x^5y^6\,dy\,dx=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx=\frac{1}{364}$.

[$z=xy$ es un 'paraboloide hiperbólico' (silla de montar)].

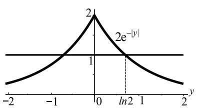


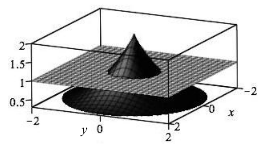


10. $g(x,y)=2\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ de revolución. $g(0,y)=2e^{-|y|}$ con pico.

$2\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}}=1\Leftrightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\ln 2$. Polares-cilíndricas:

$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\ln 2} r\big[2\,e^{-r}-1\big]\,dr\,d\theta=2\pi\big[-2(r+1)\,e^{-r}-\frac{r^2}{2}\big]_0^{\ln 2}=2\pi\big[1-\ln 2-\frac12(\ln 2)^2\big]$.





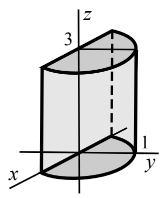
11. $F(x,y,z)=y+2xz$. a) $\nabla F=(2z,1,2x)\xrightarrow{(1,2,-1)}(-2,1,2)$. $D_{\mathbf v}=0$ si $\mathbf v\perp\nabla F$. Perpendicular también a $(1,-1,0)$

$\to\mathbf v=\begin{vmatrix}\mathbf i&\mathbf j&\mathbf k\\-2&1&2\\1&-1&0\end{vmatrix}=(2,2,1)$. $\|\mathbf v\|=\sqrt{4+4+1}=3$, $\boxed{\mathbf u=\big(\frac23,\frac23,\frac13\big)}$ (o $-\mathbf u$).

b) La integral triple se puede hacer en cilíndricas (mejor) o en cartesianas:

$\int_0^\pi\int_0^1\int_0^3 r^2(\text{sen}\,\theta+2z\cos\theta)\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^\pi\int_0^1 3r^2(\text{sen}\,\theta+3\cos\theta)\,dr\,d\theta=\int_0^\pi(\text{sen}\,\theta+3\cos\theta)\,d\theta=\boxed{2}$.

$\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^3 F\,dz\,dy\,dx=\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(3y+9x)\,dy\,dx=\int_{-1}^1\big(\frac32-\frac32x^2+\underbrace{9x\sqrt{1-x^2}}_{\text{impar}}\big)dy\,dx=\int_0^1(3-3x^2)\,dx=\boxed{2}$.

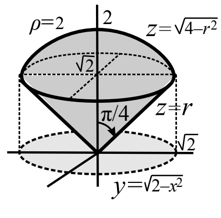


12. El cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ piden hacer la integral en esféricas

$\iiint_V z=2\pi\int_0^{\pi/4}\int_0^2\rho^3\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\,d\rho\,d\phi=\pi\big[\frac14\rho^4\big]_0^2\big[\text{sen}^2\phi\big]_0^{\pi/4}=2\pi$.

En cilíndricas: $2\pi\int_0^{\sqrt2}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} rz\,dz\,dr=2\pi\int_0^{\sqrt2} r\big(2-r^2\big)\,dr=2\pi\big[r^2-\frac{r^4}{4}\big]_0^{\sqrt2}=2\pi$.

Peor en cartesianas: $\int_{-\sqrt2}^{\sqrt2}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\,dy\,dx=\int_{-\sqrt2}^{\sqrt2}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\big(2-x^2-y^2\big)\,dy\,dx=\cdots$



13. a) $r=f(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]\ \to\ \mathbf c(\theta)=\big(f(\theta)\cos\theta,\,f(\theta)\,\text{sen}\,\theta\big)$, $\mathbf c'(\theta)=\big(f'\cos\theta-f\,\text{sen}\,\theta,\,f'\,\text{sen}\,\theta+f\cos\theta\big)$

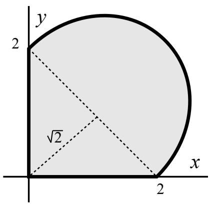
$\to\ \|\mathbf c'(\theta)\|=\sqrt{f^2(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)+(f')^2(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)}\ \to\ L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\big[f(\theta)\big]^2+\big[f'(\theta)\big]^2}\,d\theta$.

b) $r^2=2r\cos\theta+2r\,\text{sen}\,\theta$, $x^2+y^2=2x+2y$, $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, circunferencia.

i) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{2(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)} r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}(2+4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)\,d\theta=\pi+2$.

ii) $r^2+(r')^2=4\big[c^2+2sc+s^2+s^2-2sc+c^2\big]=8\ \to\ L=2+2+\int_0^{\pi/2}\sqrt8\,d\theta=4+\pi\sqrt2$.

$\Big[$Las integrales son innnecesarias: i) $A=\frac{\pi(\sqrt2)^2}{2}+\frac{2\cdot2}{2}=\pi+2$; ii) $L=2+2+\frac{2\pi\sqrt2}{2}=4+\pi\sqrt2\Big]$.



14. a) $f(x,y,z)=yz$, $\mathbf c(t)=(t,3t,2t)$, $\mathbf c'(t)=(1,3,2)$; $\int_{\mathbf c} f\,ds=\int_1^3 6\,t^2\sqrt{14}\,dt=2\sqrt{14}\,t^3\big]_1^3=52\sqrt{14}$.

b) $f(x,y,z)=x+z$, $\mathbf c(t)=\big(t,t^2,\frac23t^3\big)$, $\mathbf c'(t)=(1,2t,2t^2)$; $\int_{\mathbf c} f\,ds=\int_0^1\big(t+\frac23t^3\big)(1+2t^2)\,dt=\frac12\big(t+\frac23t^3\big)^2\Big]_0^1=\frac{25}{18}$.

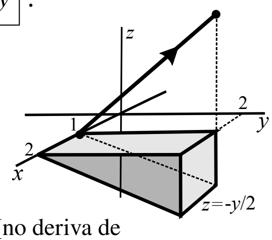
15. $\boxed{F(x,y,z)=\frac{y+2z}{x}}$. a) $\boxed{\nabla F=\left(-\frac{y+2z}{x^2}\,,\,\frac{1}{x}\,,\frac{2}{x}\right)}$. $\nabla F(1,0,1)=(-2,1,2)$. $\boxed{\Delta F=2\frac{y+2z}{x^3}}$.

b) La $D_{\mathbf{u}}$ es máxima en la dirección y sentido del gradiente. $\|\nabla F\|=3$. $\boxed{\mathbf{u}=\left(-\frac{2}{3}\,,\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3}\right)}$. [Y la $D_{\mathbf{u}}F=3$].

c) Plano tangente: $0=(-2,1,2)\cdot(x-1,y,z-1)=-2x+2+y+2z-2$, es decir, $\boxed{z=x-\frac{1}{2}y}$.
[Claro, la superficie $F=2$ es el plano $y+2z=2x$ y su plano tangente es él mismo].

d) $\iiint_V F=\int_1^2\!\int_0^2\!\int_{-y/2}^0 \frac{y+2z}{x}\,dz\,dy\,dx=\int_1^2\frac{1}{x}\int_0^2\frac{1}{4}y^2\,dy\,dx=\frac{2}{3}\int_1^2\frac{1}{x}\,dx=\boxed{\frac{2}{3}\ln 2}$.

e) $\overline{c}(t)=(1,2t,2t)$, $t\in[0,1]$. $F(\overline{c})=6t$. $\|\overline{c}'\|=\sqrt{8}$. $\int_C F\,ds=\int_0^1 12\sqrt{2}\,t\,dt=\boxed{6\sqrt{2}}$.



16. $\mathbf{f}(x,y,z)=(xy\,,x\,,-yz)$. $\operatorname{div}\mathbf{f}=y+0-y=0$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ xy&x&-yz\end{vmatrix}=(-z\,,0\,,1-x)$ [no deriva de un potencial].

$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^\pi(\cos t\,\text{sen}\,t,\cos t,-\text{sen}\,t)\cdot(-\text{sen}\,t,\cos t,0)\,dt=\int_0^\pi(\cos^2 t-\text{sen}^2 t\cos t)\,dt=\frac{\pi}{2}+\left[\frac{\text{sen}\,2t}{4}-\frac{\text{sen}^3 t}{3}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$.

Como $\|\overline{c}'\|=\sqrt{\text{sen}^2 t+\cos^2 t+0}=1$, la longitud de la curva es $L=\int_0^\pi 1\,dt=\pi$.

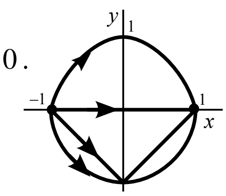
17. $\mathbf{f}(x,y)=(xy,0)$ entre $(-1,0)$ y $(1,0)$. Usamos en todas el parámetro x, $x\in[-1,1]$:

a) $\mathbf{c}(x)=(x,0)$, $\mathbf{c}'=(1,0)$. $\int_{-1}^1 0\,dx=0$. b) $\mathbf{c}(x)=(x,1-x^2)$, $\mathbf{c}'=(1,-2x)$. $\int_{-1}^1(x-x^3)\,dx=0$.

c) $\mathbf{c}(x)=(x,|x|-1)$, $\mathbf{c}'=\begin{cases}(1,-1),\ x<0\\(1,1),\ x>0\end{cases}$. $\int_{-1}^0(-x^2-x)\,dx+\int_0^1(x^2-x)\,dx=0$.

d) $\mathbf{c}(x)=\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)$, $\mathbf{c}'=(1,x(1-x^2)^{-1/2})$. $\int_{-1}^1-x\sqrt{1-x^2}\,dx=0$.

Pero no es gradiente de nigún campo escalar pues $f_y=x\neq 0=g_x$ (sobre otros caminos no se anulará).



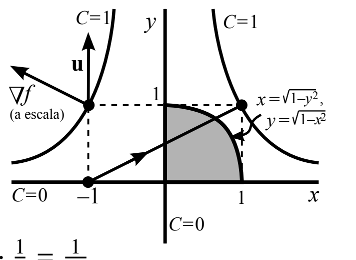
18. **a]** $f=0\to x=0$ o $y=0$; $f=1\to y=\frac{1}{x^2}$. ↙ perpendicular a la curva de nivel

$\nabla f(x,y)=\left(2xy,x^2\right)$. $\nabla f(-1,1)=(-2,1)$. $\mathbf{u}=\mathbf{j}$ lo cumple.

c] Cartesianas: $\iint_D f=\int_0^1\!\int_0^{\sqrt{1-x^2}}x^2y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]=\frac{1}{15}$.

Más largo: $\int_0^1\!\int_0^{\sqrt{1-y^2}}x^2y\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^1 y\left(1-y^2\right)^{3/2}dy=-\frac{1}{15}\left(1-y^2\right)^{5/2}\Big]_0^1=\frac{1}{15}$.

En polares: $\iint_D f=\int_0^{\pi/2}\!\int_0^1 r\,r^3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta=\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$.



d] Como $\mathbf{g}=\nabla f$, para hallar la integral de línea basta calcular $f(1,1)-f(-1,0)=1-0=1$.

Directamente: $\mathbf{c}(t)=\left(t\,,\frac{1+t}{2}\right)$, $t\in[-1,1]\ \to\ \int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^1\left(t+t^2,t^2\right)\cdot\left(1,\frac{1}{2}\right)dt=\int_{-1}^1\left(t+\frac{3}{2}t^2\right)dt=0+1=1$.

19. $\boxed{\mathbf{f}(x,y)=(y,x)}$. **a]** $\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y=0$. Como $g_x=1=f_y$ y $\mathbf{f}$ es $C^1(\mathbf{R}^2)$, deriva de un potencial:

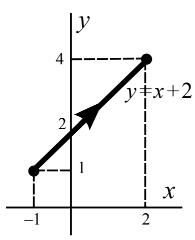
$$\begin{matrix}U_x=y\ \to\ U=xy+p(y)\\ U_y=x\ \to\ U=xy+q(x)\end{matrix}\ \to\ \boxed{U(x,y)=xy}.$$

b] i) La recta tiene pendiente 1 y corta $x=0$ en $y=2$. Es, por tanto, $y=x+2$.

Una parametrización sería, pues: $\mathbf{c}(t)=(t,t+2)$, $t\in[-1,2]$, $\mathbf{c}'(t)=(1,1)\ \to$

$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^2(t+2,t)\cdot(1,1)\,dt=\int_{-1}^2(2t+2)\,dt=t^2\Big]_{-1}^2+6=\boxed{9}$.

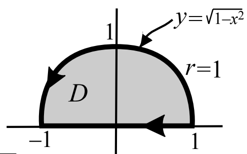
ii) Con el potencial: $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(2,4)-U(-1,1)=8+1=\boxed{9}$.



20. $\overline{\text{f}}(x,y)=\left(y+3x^2,x\right)$. **a]** $\operatorname{div}\overline{f}=6x+0=\boxed{6x}$. $g_x=1=f_y$ y $\overline{\text{f}}\in C^1\to$ **deriva de un potencial**.

b] Para calcular el valor de la integral de línea podemos calcular el potencial:

$$\begin{matrix}U_x=y+3x^2\ \to\ U=xy+x^3+p(y)\\ U_y=x\ \ \to\ U=xy+q(x)\end{matrix}\ \to\ U=xy+x^3,\ \int_{\overline{c}}\overline{f}\cdot d\overline{s}=U(-1,0)-U(1,0)=\boxed{-2}.$$



O podemos parametrizar la curva y calcular la integral: $\overline{c}(t)=(\cos t,\text{sen}\,t)$, $t\in[0,\pi]\ \to$

$\int_{\overline{c}}\overline{f}\cdot d\overline{s}=\int_0^\pi\left(s+3c^2,c\right)\cdot(-s,c)\,dt=\int_0^\pi\left[\underbrace{c^2-s^2}_{\cos 2t}-3c^2s\right]dt=\left[\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t+\cos^3 t\right]_0^\pi=\boxed{-2}$.

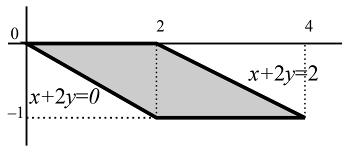
O, como no depende del camino, hallar la integral sobre el sencillo segmento $\overline{c}_*(x)=(x,0)$, $x\in[1,-1]$:

$$\int_{\overline{c}_*}\overline{f}\cdot d\overline{s}=\int_1^{-1}\left(3x^2,x\right)\cdot(1,0)\,dx=\int_1^{-1}3x^2\,dx=\left[x^3\right]_1^{-1}=\boxed{-2}.$$

c] $\int_0^1\!\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}6x\,dx\,dy=\int_0^1 0\,dx=\boxed{0}$ o $\int_{-1}^1\!\int_0^{\sqrt{1-x^2}}6x\,dy\,dx=\int_{-1}^1\underbrace{6x\sqrt{1-x^2}}_{\text{impar}}\,dx=-2\left(1-x^2\right)^{3/2}\Big]_{-1}^1=\boxed{0}$.

$\int_0^\pi\!\int_0^1 6r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=2\int_0^\pi\cos\theta\,d\theta=2\,\text{sen}\,\theta\Big]_0^\pi=\boxed{0}$. [Debía anularse por ser $6x$ impar y D simétrico].

21. D limitado por $y=-2$, $y=0$, $x+2y=0$ y $x+2y=2$.



a) $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}\int_{-2y}^{2-2y}(x+2y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2y}^{2-2y}+4y\right)dy=\int_{-1}^{0}2\,dy=2$.

O bien: $\begin{matrix}u=x+2y\,,\ x=u-2v\\ v=y\end{matrix}$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}=1\ \to\ \int_0^2\int_{-1}^0 u\,dv\,du=\int_0^2 u\,du=2$.

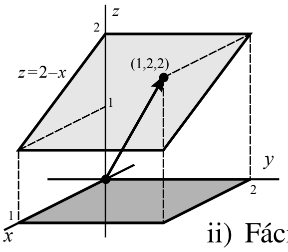
b) Como $\mathbf{f}(x,y)=(1,\cos y)$ cumple $(1)_y=0=(\cos y)_x$ ⇒ deriva de potencial ($U=x+\operatorname{sen} y$) ⇒ $\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=0$.

Directamente (largo): $\mathbf{c_1}=\left(t,-\frac{t}{2}\right)$, $t\in[0,2]$, $\mathbf{c_2}=(t,-1)$, $t\in[2,4]$, $\mathbf{c_3}=\left(t,1-\frac{t}{2}\right)$, $t\in[4,2]$, $\mathbf{c_4}=(t,0)$, $t\in[2,0]$,

$$\int_0^2\left[1-\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{t}{2}\right]dt+\int_2^4 dt+\int_4^2\left[1-\tfrac12\cos\left(1-\tfrac{t}{2}\right)\right]dt+\int_2^0 dt=-\tfrac14\operatorname{sen}1+\tfrac14\operatorname{sen}1=0.$$

22. a] $\nabla g=\left(2y\mathrm{e}^{2x-z},\mathrm{e}^{2x-z},-y\mathrm{e}^{2x-z}\right)\overset{(1,-1,2)}{\longrightarrow}\boxed{(-2,1,1)}$. $D_{(a,b,c)}g(1,-1,2)=\nabla g(1,-1,2)\cdot(a,b,c)=b+c-2a$.

La $D_{\mathbf{v}}$ es nula, por ejemplo, según el vector $(1,1,1)$. Haciéndolo unitario: $\mathbf{u}=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$ (perpendicular al gradiente).



b] En $[0,1]\times[0,2]$ está $z=2-x$ por encima de $z=0$ (no se precisa el dibujo).

$$\iiint_V g=\int_0^2\int_0^1\int_0^{2-x}y\,\mathrm{e}^{2x-z}\,dz\,dx\,dy=\int_0^2 y\,dy\int_0^1\left[\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{3x-2}\right]dx=\mathrm{e}^2-1-\tfrac23\,\mathrm{e}+\tfrac23\mathrm{e}^{-2}.$$

c] i) $\mathbf{c}(t)=(t,2t,2t)$ (salta a la vista). $\mathbf{c}'(t)=(1,2,2)$. $\|\mathbf{c}'(t)\|=\sqrt{1+4+4}=3$.

$$\int_{\mathbf{c}} g\cdot ds=\int_0^1 g(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt=\int_0^1 6t\,dt=\boxed{3}.$$

ii) Fácil: $\int_{\mathbf{c}}\nabla g\cdot d\mathbf{s}=g(1,2,2)-g(0,0,0)=\boxed{2}$. $\left[\text{Peor: }\int_0^1(4t,1,-2t)\cdot(1,2,2)\,dt=\int_0^1 2\,dt=2\right]$.

23. $\mathbf{g}(x,y,z)=\left(2y\mathrm{e}^{2x},\mathrm{e}^{2x},2z\right)$. $\operatorname{div}\mathbf{g}=4y\mathrm{e}^{2x}+2$. $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{g})=\left(8y\mathrm{e}^{2x},4\mathrm{e}^{2x},0\right)$. $\operatorname{rot}\mathbf{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ 2y\mathrm{e}^{2x}&\mathrm{e}^{2x}&2z\end{vmatrix}=\left(0,0,2\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{2x}\right)=\mathbf{0}$.

Podemos usar la definición sobre el camino dado $\left[\text{parametrizando a ojo o usando } \overline{c}(t)=\overline{a}+t(\overline{b}-\overline{a})\right]$:

$$\overline{c}(t)=(t,2t,1),\ t\in[0,1]\ \to\ \int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_0^1\left(4t\mathrm{e}^{2t},\mathrm{e}^{2t},2\right)\cdot(1,2,0)\,dt=\int_0^1(4t+2)\,\mathrm{e}^{2t}dt=\left[2t\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1=\boxed{2\mathrm{e}^2}.$$

O podemos calcular la función potencial $\left[\operatorname{rot}\mathbf{g}=\mathbf{0}\text{ y }\mathbf{g}\in C^1\right]$ y evaluarla en los puntos final e inicial:

$U_x=2y\mathrm{e}^{2x}\ \to\ U=y\mathrm{e}^{2x}+p(y,z)$
$U_y=\mathrm{e}^{2x}\ \to\ U=y\mathrm{e}^{2x}+q(x,z)$ $\quad\to\ U=y\mathrm{e}^{2x}+z^2\ \to\ \int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=U(1,2,1)-U(0,0,1)=2\mathrm{e}^2+1-1=\boxed{2\mathrm{e}^2}$.
$U_z=2z\ \to\ U=z^2+r(x,y)$

24. $\overline{g}(x,y,z)=\left(z,y^2,x\right)$. **a]** $\operatorname{div}\overline{g}=2y$. $\nabla(\operatorname{div}\overline{g})=(0,2,0)$. $\operatorname{rot}\overline{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ z&y^2&x\end{vmatrix}=\left(0-0,1-1,0-0\right)=\overline{0}$.
(y $\overline{g}\in C^1\Rightarrow\overline{g}$ conservativo).

b] Con la definición: $\int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_0^{\pi/2}\left(-s,s^2,c\right)\cdot(-s,c,-c)\,dt=\int_0^{\pi/2}\left[s^2\underbrace{-c^2+s^2}_{-\cos 2t}c\right]dt=\left[\tfrac13\operatorname{sen}^3t-\tfrac12\operatorname{sen}2t\right]_0^{\pi/2}=\boxed{\tfrac13}$.

Hallando el potencial:
$U_x=x\ \to\ U=xz+p(y,z)$
$U_y=y^2\ \to\ U=\tfrac13y^3+q(x,z)\ \to\ U=xz+\tfrac13y^3\ \to\ \int_{\overline{c}}\overline{g}\cdot d\overline{s}=U(0,1,-1)-U(1,0,0)=\boxed{\tfrac13}$.
$U_z=z\ \to\ U=xz+r(x,y)$

Integrando sobre el segmento $\overline{c}_*(t)=(1-t,t,-t)$, $t\in[0,1]$: $\int_{\overline{c}_*}\overline{g}\cdot d\overline{s}=\int_0^1\left(-t,t^2,t\right)\cdot(-1,1,-1)\,dt=\int_0^1 t^2\,dt=\boxed{\tfrac13}$.

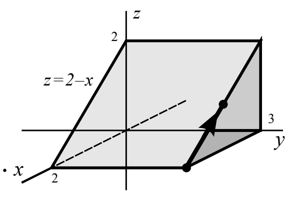
25. $\boxed{\mathbf{f}(x,y,z)=\left(z^2,2y,cxz\right)}$. $\operatorname{div}\mathbf{f}=\boxed{2+cx}$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ z^2&2y&cxz\end{vmatrix}=\boxed{(0,2z-cz,0)}=\mathbf{0}$ si $\boxed{c=2}$ y $\mathbf{f}\in C^1(\mathbf{R}^3)$.

Si $c=2$ existe el U:
$U_x=z^2\ \to\ U=xz^2+p(y,z)$
$U_y=2y\ \to\ U=y^2+q(x,z)$, $\boxed{U=xz^2+y^2}\ \to\ \int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,0,1)-U(0,0,0)=\boxed{1}$.
$U_z=2xz\ \to\ U=xz^2+r(x,y)$

Sin necesidad de hacer integrales de línea.

$\left[\text{Una parametrización sería: } \mathbf{c}(t)=(t,0,t),\ t\in[0,1]\ \to\ \int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t^2,0,2t^2)\cdot(1,0,1)\,dt=\int_0^1 3t^2\,dt=1\right]$.

26. a] $\mathbf{f}(x,y,z)=2xz\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+x^2\,\mathbf{k}$. $\operatorname{div}\mathbf{f}=2z$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 2xz&1&x^2\end{vmatrix}=\mathbf{0}$.
$\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})=(0,0,2)$.
$\Delta(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})=\Delta(4x^2z^2+1+x^4)=20x^2+8z^2$.



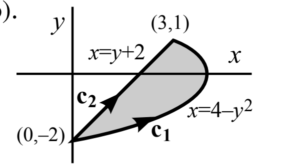
b] $\iiint_V 2z\,dx\,dy\,dz=\int_0^3\int_0^2\int_0^{2-x}2z\,dz\,dx\,dy=3\int_0^2(2-x)^2dx=-(2-x)^3\Big]_0^2=8$.

c] Como $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\mathbf{0}$ y $\mathbf{f}$ es C^1 en $\mathbf{R}^3$, existe la función potencial.

$U_x=2xz\ \to\ U=x^2z+p(y,z)$
$U_y=1\ \to\ U=y+q(x,z)$, $U=x^2z+y\ \Rightarrow\ \int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,3,1)-U(2,3,0)=1$.
$U_z=x^2\ \to\ U=x^2z+r(x,y)$

$\left[\text{Con } \mathbf{c}(t)=(2-t,3,t),\ t\in[0,1]\ \to\ \int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\left(4t-2t^2,1,(2-t)^2\right)\cdot(-1,0,1)\,dt=\int_0^1(4-8t+3t^2)\,dt=1\right]$.

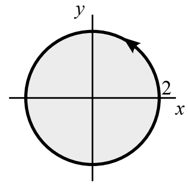
27. a) $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,2x)$, $\mathbf{c_1}=(4-t^2,t)$, $t\in[-2,1]$, $\mathbf{c_2}=(t,t-2)$, $t\in[0,3]$ (sentido opuesto).



$$\int_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-2}^{1}(-2t^3+8-2t^2)\,dt-\int_0^3(t^2-2t+4)\,dt=26-\tfrac{1}{2}-12=\tfrac{27}{2}\,.$$

$$g_x-f_y=2-2y\,,\ \int_{-2}^{1}\int_{y+2}^{4-y^2}(2-2y)\,dx\,dy=\int_{-2}^{1}(4-6y+2y^3)\,dy=\tfrac{27}{2}\,.$$

b) $\mathbf{f}(x,y)=\big(0,xy^2\big)$. $\mathbf{c}(t)=(2\cos t,2\,\mathrm{sen}\,t)$, $t\in[0,2\pi]$



$$\to\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=(0,8cs^2)\cdot(-2s,2c)\,dt=\int_0^{2\pi}16\,s^2c^2\,dt=4\pi-\Big[\tfrac{\mathrm{sen}\,4t}{2}\Big]_0^{2\pi}=4\pi\,.$$

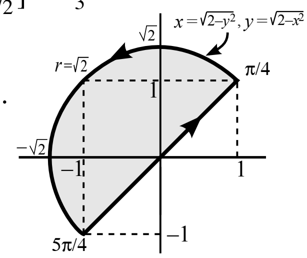
$4\,\mathrm{sen}^2 2t=2(1-\cos 4t)$

$$g_x-f_y=y^2\,,\ \iint_{\circ}y^2\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,\mathrm{sen}^2\theta\,dr\,d\theta=\Big[\tfrac{1}{4}r^4\Big]_0^2\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=4\pi\,.$$

[En cartesianas cálculos muy largos: $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}y^2\,dy\,dx=\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}dx=\cdots$].

c) $g_x-f_y=-y\,,\ \iint_D -y\,dx\,dy=-\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\,\mathrm{sen}\,\theta=\big[\tfrac{1}{3}r^3\big]_0^{\sqrt{2}}\big[\cos\theta\big]_{\pi/4}^{5\pi/4}=\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\big[-\tfrac{1}{\sqrt{2}}-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big]=-\tfrac{4}{3}\,.$

En cartesianas (de las dos formas) es más complicado. Por ejemplo:



$$\iint_D=-\int_{-\sqrt{2}}^{-1}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}y\,dy\,dx-\int_{-1}^{1}\int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}}y\,dy\,dx=-\int_{-\sqrt{2}}^{-1}0\,dx+\int_{-1}^{1}\big[x^2-1\big]\,dx=-\tfrac{4}{3}\,.$$

Parametrizaciones sencillas: $\mathbf{c_1}(t)=(t,t)$, $t\in[-1,1]$ (en sentido correcto).

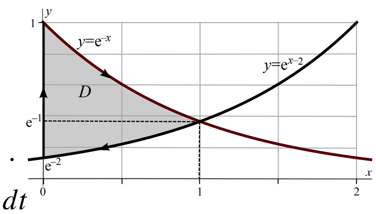
$\mathbf{c_2}(t)=\big(\sqrt{2}\,\cos t\,,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\big)$, $t\in\big[\tfrac{\pi}{4},\tfrac{5\pi}{4}\big]$ (también en buen sentido).

$$\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-1}^{1}(t^2,t^2)\cdot(1,1)\,dt+\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\big(2\,\mathrm{sen}^2t,2\,\mathrm{sen}\,t\cos t\big)\cdot\big(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t,\sqrt{2}\cos t\big)$$

$$=\int_{-1}^{1}2t^2\,dt+2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\big[sc^2-s^3\big]\,dt=\tfrac{4}{3}+2\sqrt{2}\big[\cos t-\tfrac{2}{3}\cos^3t\big]_{\pi/4}^{5\pi/4}=\tfrac{4}{3}+2\big[1+1-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\big]=-\tfrac{4}{3}\,.$$

$\searrow 2sc^2-s$

28. a] $\displaystyle\int_0^1\int_{e^{x-2}}^{e^{-x}}x\,e^x dy\,dx=\int_0^1\big[x-xe^{2x-2}\big]\,dx=\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x}{2}e^{2x-2}\Big]_0^1+\tfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2x-2}dx=\boxed{\tfrac{1-e^{-2}}{4}}$.



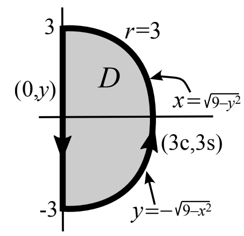
b] $g_x-f_y=-x\,e^x$. Según Green, la $\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ vale lo de arriba. Directamente:

$\mathbf{c}_1(t)=(0,t)$, $y\in[e^{-2},1]$; $\mathbf{c}_2(t)=(t,e^{-t})$, $t\in[0,1]$; $\mathbf{c}_3(t)=(t,e^{t-2})$, $t\in[1,0]$.

$$\int_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{e^{-2}}^{1}(0,1)\cdot(0,1)\,dt+\int_0^1(t,1)\cdot(1,-e^{-t})\,dt+\int_1^0(te^{2t-2},1)\cdot(1,e^{t-2})\,dt$$

$$=1-e^{-2}+\int_0^1(t-e^{-t})\,dt+\int_1^0(te^{2t-2}+e^{t-2})\,dt=\tfrac{3}{2}-e^{-2}+\big[e^{-t}\big]_0^1+\big[\tfrac{t}{2}e^{2t-2}-\tfrac{1}{4}e^{2t-2}+e^{t-2}\big]_1^0=\tfrac{1-e^{-2}}{4}\,.$$

29. a] i) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^3 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=2\big[\mathrm{sen}\,\theta\big]_0^{\pi/2}\big[\tfrac{r^3}{3}\big]_0^3=\boxed{18}$.



ii) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-y^2}}x\,dx\,dy=\tfrac{2}{2}\int_0^3(9-y^2)\,dy=27-\big[\tfrac{y^3}{3}\big]_0^3=\boxed{18}$.

O bien: $\displaystyle\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}x\,dy\,dx=\int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx=-\tfrac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3=\tfrac{2}{3}27=\boxed{18}$.

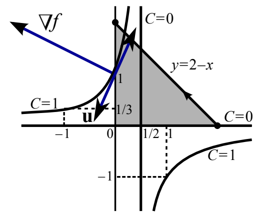
b] i) Como $g_x-f_y=x$ el campo **no es conservativo** (debía ser $\equiv 0$). ii) $\mathrm{div}\,\mathbf{f}=f_x+g_y=\boxed{1-y}$.

iii) Según Green el valor de la integral de linea en sentido antihorario coincide con el de la integral de **a]**: $\boxed{18}$.

Calculando la integral de línea directamente: $\mathbf{c}(t)=(3\cos t,3\,\mathrm{sen}\,t)$, $t\in\big[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big]$. $\mathbf{c}_*(t)=(0,y)$, $y\in[3,-3]$.

$$\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-9cs,3s)\cdot(-3s,3c)\,dt+\int_3^{-3}(0,y)\cdot(0,1)\,dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\underset{\text{par}}{27s^2c}+\underset{\text{impar}}{9sc})\,dt-\int_{-3}^{3}\overset{\text{imp}}{y}\,dy=18s^3\Big]_0^{\pi/2}=18\,.$$

30. a] $y(1-2x)=0\ \to$ rectas $y=0\,,x=\tfrac{1}{2}$. $y(1-2x)=1\ \to\ y=\tfrac{1}{1-2x}$ $\quad y=0\,,x=\tfrac{1}{2}$ asíntotas. $y(-1)=\tfrac{1}{3}$, $y(1)=-1$.



$\nabla f(x,y)=(-2y\,,1-2x)$, $\nabla f(0,1)=(-2\,,1)$ (perpendicular curva $C=1$).

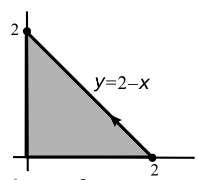
$D_{\mathbf{u}}=0$ en la dirección perpendicular al gradiente: $\mathbf{u}=\big(\tfrac{1}{\sqrt{5}}\,,\tfrac{2}{\sqrt{5}}\big)$ o $\mathbf{u}=\big(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}\,,-\tfrac{2}{\sqrt{5}}\big)$.

$\mathrm{div}\big(\nabla f\big)=\Delta f(x,y)=f_{xx}+f_{yy}=0+0=0$.

b] $\displaystyle\iint_D f=\int_0^2\int_0^{2-x}y(1-2x)\,dy\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^2(2-x)^2(1-2x)\,dx=\int_0^2\big(2-6x+\tfrac{9}{2}x^2-x^3\big)\,dx=\boxed{0}$.

Más corto: $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2-y}y(1-2x)\,dx\,dy=\int_0^2 y\big[(2-y)-(2-y)^2\big]\,dy=\int_0^2\big[-2y+3y^2-y^3\big]\,dy=\boxed{0}$.

c] $\mathbf{g}(x,y)=(xy^2,xy)$. Como $g_x-f_y=y-2xy\not\equiv 0$, $\mathbf{g}$ no deriva de un potencial.



Una posible parametrización es: $\mathbf{c}(x)=(x,2-x)$, $x\in[2,0]$, $\mathbf{c}'(x)=(1,-1)$ $\to$

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_2^0\big(x(2-x)^2,x(2-x)\big)\cdot(1,-1)\,dx=\int_2^0\big(2x-3x^2+x^3\big)\,dx=x^2-x^3+\tfrac{1}{4}x^4\Big]_2^0=\boxed{0}\,.$$

[Se podría hacer con Green en el triángulo, cuyo borde está formado por nuestro segmento y los ejes donde $\mathbf{g}=\mathbf{0}$.

$$\oint_{\partial D}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=0+0+\int_{\mathbf{c}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\iint_D\big[g_x-f_y\big]\,dx\,dy=\iint_D\big[y-2xy\big]\,dx\,dy=0\ \text{(calculada en **b]**)}\big].$$

Soluciones de problemas 3 de MM(im) (2020)

1. a) $\boxed{y'=-\frac{2y}{x}}$ $y = C\,e^{\int a(x)\,dx} = C\,e^{-2\int dx/x} = C\,e^{-2\ln x} = C\,e^{\ln x^{-2}} = \boxed{\frac{C}{x^2}}$.

b) $\boxed{y' = \frac{y}{x^2}}$ $y = C\,e^{\int a(x)\,dx} = C\,e^{\int dx/x^2} = \boxed{C\,e^{-1/x}}$.

c) $\boxed{y' = y+5}$, $\boxed{y = Ce^x - 5}$ (y_p a ojo). $\big[$Sin ojo: $y=Ce^x + e^x\int 5e^{-x}\,dx = Ce^x - 5\,\big]$. [También es separable].

d) $\boxed{y' = \frac{y}{3x}+2}$ $e^{\int dx/3x} = e^{\frac{1}{3}\ln x} = x^{1/3}$, $y = Cx^{1/3} + x^{1/3}\int 2x^{-1/3}dx = \boxed{Cx^{1/3} + 3x}$.

$\big[$También es de la forma $y'=f(\frac{y}{x})$: $z=\frac{y}{x} \to xz'+z=\frac{z}{3}+2$, $\int\frac{3dz}{3-z} = -3\ln(3-z) = 2\ln x + C$, $3-z=Cx^{-2/3}\ldots\big]$.

e) $\boxed{\frac{dy}{dx}=2xy^2}$ separable: $\int\frac{dy}{y^2} = \int 2x\,dx + C$, $-\frac{1}{y} = x^2+C \to \boxed{y = \frac{1}{C-x^2}}$.

f) $\boxed{\frac{dy}{dx} = x+\frac{x}{y}}$ separable: $\int\frac{y\,dy}{1+y} = \int x\,dx + C \to \boxed{y - \log|1+y| = \frac{x^2}{2} + C}$ (no se puede despejar y).

g) $\boxed{\frac{dy}{dx} = x+\frac{y}{x}}$ lineal: $e^{\int dx/x} = x$, $y = Cx + x\int\frac{x\,dx}{x} \to \boxed{y = Cx + x^2}$.

h) $\boxed{\frac{dy}{dx} = e^{x-y}}$ separable: $\int e^y\,dy = \int e^x\,dx + C \to \boxed{y = \log(C+e^x)}$ [mucho más largo $z=x-y$, $z'=1-e^z$ ...]

2. $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{12x+5y}{5x+2y}}$ $12x+5y + (5x+2y)\frac{dy}{dx}=0$, $M_y=5=N_x$ exacta. $U=6x^2+5xy+p(y)=5xy+y^2+q(x)\downarrow$

O también: $z=\frac{y}{x}$, $xz'+z=-\frac{12+5z}{5+2z}$, $\int\frac{(2z+5)\,dz}{z^2+5z+6} = \int\frac{-2\,dx}{x}+C$, $z^2+5z+6=\frac{C}{x^2}$, $\boxed{y^2+5xy+6x^2 = C}$.

3. a) $\boxed{T'=4-4T}$, $T(0)=0$. La de la homogénea es Ce^{-4t} y la $T_p=1$ salta a la vista. General: $\boxed{T=Ce^{-4t}+1}$.

O bien, con **fvc**: $T=Ce^{-4t}+e^{-4t}\int 4e^{4t}dt = Ce^{-4t}+1$. $T(0)=C+1=0 \to C=-1$, $\boxed{T=1-e^{-4t}}$.

b) $\boxed{T'+9T=t}$, $T(0)=0$. $T=Ce^{-9t}+e^{-9t}\int t\,e^{9t}dt = \boxed{Ce^{-9t}+\frac{t}{9}-\frac{1}{81}}$ $\big($o probando $T_p=At+B \to$ $A+9At+9B=t$, $A=\frac{1}{9}$, $B=-\frac{1}{81}\big)$.

$\quad\int t\,e^{9t}dt = \frac{t}{9}e^{9t}-\frac{1}{9}\int e^{9t}dt$

$T(0)=C-\frac{1}{81}=0 \to \boxed{T=\frac{1}{81}\big(e^{-9t}+9t-1\big)}$.

c) $\boxed{T'+(1+2t)T=0}$, $T(0)=0$. $T = Ce^{-\int(1+2t)\,dt} = \boxed{Ce^{-(t+t^2)}} \xrightarrow{T(0)=0} \boxed{T\equiv 0}$.

[Las lineales homogéneas (de coeficientes continuos) con datos 0 tienen siempre por solución la trivial $T\equiv 0$].

d) $\boxed{T'=T+2\,\text{sen}\,t}$ $T=Ce^t+2e^t\int e^{-t}\,\text{sen}\,t\,dt$. Integrando 2 veces por partes: $\boxed{T = C\,e^t - \text{sen}\,t - \cos t}$.

$\big[$Sin integrar: $T_p=A\cos t+B\,\text{sen}\,t \to -As+Bc=Ac+Bs+2s \to B=A$, $-A=B+2 \to A=B=-1\,\big]$.

$T(0)=C-1=0 \to \boxed{T = e^t - \text{sen}\,t - \cos t}$.

4. a) $\boxed{y''+2y'+5y=0}$ $\mu^2+2\mu+5=0 \to \mu=-1\pm 2i$, $\boxed{y = (c_1\cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x)\,e^{-x}}$.

b) $\boxed{x^2y''-3xy'+3y=0}$ Euler. $\mu(\mu-1)-3\mu+3 = \mu^2-4\mu+3 = 0 \to \mu=1,3 \to \boxed{y = c_1x + c_2x^3}$.

c) $\boxed{x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0}$. No es de coeficientes constantes, ni de Euler, ni falta el término en y .

Buscamos una solución que salte a la vista: $y_1=x \to y_2=x\int\frac{e^{\int\frac{x+2}{x}}}{x^2} = x\,e^x$, $\boxed{y = c_1x + c_2\,x\,e^x}$.

[Si no se puede ver esa solución (que es lo habitual), hay que acudir a series].

5. $\boxed{x^2y''+xy'-n^2y=0}$. Ecuación de Euler. $\mu(\mu-1)+\mu-1=n^2$, $\mu=\pm n \to$ $\boxed{\begin{array}{l} y(x) = c_1x^n + c_2x^{-n} \text{ si } n>0 \\ y(x) = c_1 + c_2\ln x \text{ si } n=0 \end{array}}$

6. a) $\boxed{y''-3y=e^{2x}}$ $\mu=\pm\sqrt{3}$, $y_p=Ae^{2x}$, $4A-3A=1 \rightarrow \boxed{y=c_1 e^{\sqrt{3}x}+c_2 e^{-\sqrt{3}x}+e^{2x}}$.

$\Big[$Con la **fvc** casi siempre es más largo: $|W|=-2\sqrt{3}$, $y_p=e^{-\sqrt{3}x}\int\frac{e^{(2+\sqrt{3})x}}{-2\sqrt{3}}-e^{\sqrt{3}x}\int\frac{e^{(2-\sqrt{3})x}}{-2\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{2x}\big[\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}\big]\Big]$.

b) $\boxed{y''+y=x\cos x}$ $\mu=\pm i$, $y_p=(Ax^2+Bx)\,c+(Cx^2+Dx)\,s$, $y_p''+y_p=(2A+2D+4Cx)\,c+(2C-2B-4Ax)\,s$

$\rightarrow \boxed{y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+\frac{1}{4}x^2\sin x+\frac{1}{4}x\cos x}$.

c) $\boxed{y''+y=6\cos^2 x}$ $\begin{vmatrix} c & s \\ -s & c \end{vmatrix}=1$, $y_p=s\int 6c^3-c\int 6sc^2=\cdots \rightarrow \boxed{y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x}$.

O bien, $6\cos^2 x=3+3\cos 2x \rightarrow y_p=A+B\cos 2x+C\operatorname{sen}2x \rightarrow y_p=3-\cos 2x$ ↑

d) $\boxed{y''+4y'+5y=x}$ Coeficientes constantes. $\mu^2+4\mu+5=0$, $\mu=-2\pm i \rightarrow y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+y_p$.

$\mu=0$ no autovalor $\rightarrow y_p=Ax+B \rightarrow 4A+5Ax+5B=x$, $\boxed{y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+\frac{x}{5}-\frac{4}{25}}$.

[La **fvc** nos llevaría a integrales bastante largas].

e) $\boxed{y''-2y'+y=x^2}$ $\mu^2-2\mu+1=0 \rightarrow \mu=1$ doble, $y=(c_1+c_2x)\,e^x+y_p$. Como $\mu=0$ no autovalor:

$y_p=Ax^2+Bx+C \rightarrow 2A-4Ax-2B+Ax^2+Bx+C=x^2$, $A=1$, $B=4$, $C=6$, $\boxed{y=(c_1+c_2x)\,e^x+x^2+4x+6}$.

7. $\boxed{y''+2y'-3y=f(x)}$ $\mu^2+2\mu-3=0$, $\mu=-1\pm\sqrt{4}=1,-3 \rightarrow y=c_1e^x+c_2e^{-3x}+y_p$.

a) $\mu=-1$ no autovalor. Probamos $y_p=Ae^{-x}$: $Ae^{-x}-2Ae^{-x}-3Ae^{-x}=e^{-x}$, $A=\frac{1}{4}$, $\boxed{y=c_1e^x+c_2e^{-3x}-\frac{1}{4}e^{-x}}$.

b) $\mu=1$ sí lo es. Probamos $y_p=Axe^x$: $A(x+2)+2A(x+1)-3Ax=1$, $A=\frac{1}{4}$, $\boxed{y=c_1e^x+c_2e^{-3x}-\frac{1}{4}xe^{-x}}$.

c) $\mu=\pm i$ no lo son. $yp=A\cos x+B\operatorname{sen}x \rightarrow (2B-4A)c-(2A+4B)s=s$. $\boxed{y=c_1e^x+c_2e^{-3x}-\frac{1}{10}\cos x-\frac{1}{5}\operatorname{sen}x}$.

8. a) $\boxed{y''+2y'+2y=2}$ $\mu^2+2\mu+2=0 \rightarrow \mu=-1\pm i$, $y=(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)\,e^{-x}+1$ (y_p a simple vista).

$y(0)=y'(0)=0 \rightarrow \begin{cases} c_1+1=0 \\ c_2-c_1=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{y=1-e^{-x}(\cos x+\operatorname{sen}x)}$.

b) $\boxed{y''+2y'+y=x+2}$ $\mu^2+2\mu+1=0$, $\mu=-1$ doble $\rightarrow y=(c_1+c_2x)\,e^{-x}+y_p$.

$y_p=Ax+B \rightarrow 2A+Ax+B=x+2 \rightarrow A=1$, $B=0$. La solución general es: $y(x)=(c_1+c_2x)\,e^{-x}+x$.

Imponiendo los datos: $\begin{cases} c_1=0 \\ c_2-c_1+1=0,\ c_2=-1 \end{cases}$. La solución es, pues: $\boxed{y(x)=x\left(1-e^{-x}\right)}$.

c) $\boxed{y''+y=x^2}$ $\mu^2+1=0$, $\mu=\pm i$. $y_p=Ax^2+Bx+C$ ($\mu=0$ no autovalor) $\rightarrow 2A+Ax^2+Bx+C=x^2$, $A=1$, $B=0$, $C=-2$.

$y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+x^2-2 \overset{d.i.}{\rightarrow} \begin{matrix} y(0)=c_1-2=0 \\ y'(0)=c_2=0 \end{matrix}$, $\boxed{y=2\cos x+x^2-2}$.

d) $\boxed{y''+y=2x\,e^x}$ $\mu=\pm i \rightarrow y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+y_p$. $y_p=(Ax+B)\,e^x$, $y_p'=(Ax+B+A)\,e^x$, $y_p''=(Ax+B+2A)\,e^x$

$(2Ax+2B+2A)\,e^x=2x\,e^x \rightarrow A=1$, $B=-1$. $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+(x-1)\,e^x$. $\begin{cases} c_1-1=0 \\ c_2=0 \end{cases}$, $\boxed{y=\cos x+(x-1)\,e^x}$.

e) $\boxed{y''+y=\frac{2}{\cos^3 x}}$ $\mu=\pm i$, $\begin{vmatrix} c & s \\ -s & c \end{vmatrix}=1$, $y_p=s\int\frac{2}{c^2}-c\int\frac{s}{c^3}=\frac{1}{c}-2c \rightarrow y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+\frac{1}{\cos x}$

$\overset{y(0)=y'(0)=0}{\longrightarrow} \boxed{y=\frac{1}{\cos x}-\cos x=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}}$.

9. **a]** $\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{y-2}{x}}$ i) Como lineal: $\frac{dy}{dx}=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}\int 2\,dx=-\frac{y}{x}+\frac{2}{x} \rightarrow y=\frac{C}{x}+2$, $\boxed{x(y-2)=C}$.

ii) Como separable: $\int\frac{dy}{y-2}=-\int\frac{dx}{x}+C$, $\ln(y-2)=C-\ln x$, $y-2=\frac{C}{x}$. ↗

iii) $(y-2)+x\frac{dy}{dx}=0$, $M_y\equiv 1\equiv N_x$. $\begin{matrix} U_x=y-2\,,\ U=xy-2x+p(y) \\ U_y=x\,,\ U=xy+q(x) \end{matrix} \rightarrow xy-2x=C$. ↑

b] $\boxed{x^2y''+xy'=2x}$ i) $y'=v \rightarrow v'=-\frac{v}{x}+\frac{2}{x} \rightarrow v=\frac{C}{x}+2$ (como arriba), $\boxed{y=K+C\ln x+2x}$.

ii) $\mu(\mu-1)+\mu=0$, $\mu=0$ doble, $y=c_1+c_2\ln x+y_p$. Para hallar la y_p :

$\begin{vmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & x^{-1} \end{vmatrix}=x^{-1}$, $y_p=\ln x\int\frac{1\cdot 2/x}{x^{-1}}-1\int\frac{\ln x\cdot 2/x}{x^{-1}}=2x$. O mejor, $y_p=Ax\ (Ae^s) \rightarrow A=2$.

10. a) $\boxed{xy''+2y'=x}$ $\mu(\mu-1)+2\mu=0 \to y=c_1+c_2x^{-1}+y_p$ solución de la no homogénea.

$\begin{vmatrix}1 & x^{-1}\\ 0 & -x^{-2}\end{vmatrix}=-x^{-2}$, $y_p=\frac{1}{x}\int\frac{1\cdot 1}{-x^{-2}}-1\int\frac{1/x\cdot 1}{-x^{-2}}=\frac{x^2}{6}$. O mejor, $y_p=Ax^2$ $\left(Ae^{2s}\right)\to 2A+4A=1$.

O también: $xv'+2v=x \to v=\frac{C}{x^2}+\frac{x}{3} \to \boxed{y=\frac{1}{6}x^2-\frac{C}{x}+K}$, como antes (con otro nombre de constantes).

b) $\boxed{x^2y''-2y=2}$ Euler. $\mu(\mu-1)+0\mu-2=\mu^2-\mu-2=(\mu-2)(\mu+1)=0$ e $y_p=-1$ a ojo $\to \boxed{y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}-1}$.

Sin vista: $|W|=\begin{vmatrix}x^2 & x^{-1}\\ 2x & -x^{-2}\end{vmatrix}=-3$. $y_p=x^{-1}\int\frac{x^2 2x^{-2}}{-3}dx-x^2\int\frac{x^{-1}2x^{-2}}{-3}dx=-\frac{2}{3x}\int dx+\frac{x^2}{3}\int\frac{2\,dx}{x^3}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$.

c) $\boxed{x^2y''+4xy'+2y=e^x}$ $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+y_p$, $|W|=-x^{-4}$, $y_p=-x^{-2}\int xe^x+x^{-1}\int e^x=\frac{e^x}{x^2}$. $\boxed{y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\frac{e^x}{x^2}}$.

11. $\boxed{(x+1)\,y''-y'=(x+1)^2}$ $y'=v$, $v'=\frac{v}{x+1}+x+1$, $v=c_1(x+1)+x^2+x$, $\boxed{y=c_1(x^2+2x)+c_2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}}$.

O bien, $x+1=s$, $sx''-x'=s^2$ (Euler), $y_p=As^3$, $y=k_1s^2+k_2+\frac{s^3}{3}=k_1(x+1)^2+k_2+\frac{(x+1)^3}{3}$ ↗

12. $\boxed{x^2y''-3xy'=4}$. Como Euler: $\mu(\mu-1)-3\mu=0$, $\mu=0,4 \to y=c_1+c_2x^4+y_p$. Con la **fvc**:

$\begin{vmatrix}1 & x^4\\ 0 & 4x^3\end{vmatrix}=4x^3$. $y_p=x^4\int\frac{1\cdot 4/x^2}{4x^3}dx-1\int\frac{x^4\cdot 4/x^2}{4x^3}dx=x^4\int\frac{dx}{x^5}-\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{4}-\ln|x|$, $\boxed{y=c_1+c_2x^4-\ln|x|}$.

[Haciendo $x=e^s \to y''-4y'=4 \xrightarrow{y_p=As} y=c_1+c_2e^{4s}-s$ ↗].

O bien: $y'=v$, $v'=\frac{3}{x}v+\frac{4}{x^2}$, $e^{3\ln x}=x^3$, $v=Cx^3+x^3\int\frac{4}{x^5}dx=Cx^3-\frac{1}{x}$, $y=C^*x^4+K-\ln|x|$, como arriba.

Imponiendo los datos $\left(y'=4c_2x^3-\frac{1}{x}\right)$: $\begin{cases}c_1+c_2=3\\ 4c_2-1=3\end{cases} \to \boxed{y=2+x^4-\ln|x|}$.

13. $\boxed{y''-y=3e^{-2x}}$. $\mu=\pm1$ e $y_p=Ae^{-2x}$, $4A-A=3 \to$ solución general $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^{-2x}$.

i) $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Imponiendo los datos: $\begin{matrix}c_1+c_2+1=1\\ c_1-c_2-2=0\end{matrix} \to c_1=1,\ c_2=-1$. $\boxed{y=e^x-e^{-x}+e^{-2x}}$.

ii) $y'(0)=y'(1)=0$. $\begin{matrix}c_1-c_2=2\\ ec_1-e^{-1}c_2=2e^{-2}\end{matrix}$, sistema con solución única. Es $y=e^{-2x}-\frac{2}{e(e+1)}\left[e^x-(e^2+e+1)e^{-x}\right]$.

[Viendo 4.3: como el problema homogéneo tiene sólo la solución $y\equiv 0$ (por no ser $\lambda=-1$ autovalor), sin necesidad de echar cuentas se sabe que el no homogéneo tiene **solución única**].

14. a) $\boxed{y''+y'=2x-1}$. i) $\mu^2+\mu=0 \to c_1+c_2e^{-x}+y_p$. $y_p=Ax^2+Bx$ ($\mu=0$ autovalor) $\to$

$2A+2Ax+B=2x-1$, $A=1$, $B=-3$, $\boxed{y=c_1+c_2e^{-x}+x^2-3x}$, $y'=-c_2e^{-x}+2x-3$

ii) $y'=v \to v'=-v+2x-1 \to v=Ce^{-x}+e^{-x}\int e^x(2x-1)\,dx=Ce^{-x}+2x-3$, $y=\int v=K-C\,e^{-x}+x^2-3x$.

b) $\begin{cases}y(0)=c_1+c_2=0, & c_1=3\\ y'(0)=-c_2-3=0, & c_2=-3\end{cases} \to \boxed{y=x^2-3x+3-3e^{-x}}$. c) $\begin{cases}y'(0)=-c_2-3=0, & c_2=-3\\ y'(1)=-c_2e^{-1}-1=0, & c_2=-e\end{cases}$, Imposible. **No hay solución**.

[O utilizando los resultados de 4.3: $\begin{matrix}y=c_1+c_2e^{-x}\\ y'=-c_2e^{-x}\end{matrix} \to \begin{cases}-c_2=0\\ -c_2e^{-1}=0\end{cases}$. **Infinitas soluciones** del homogéneo $\{1\}$.

$\left[e^xy'\right]'=e^x(2x-1)$. $\int_0^1 e^x(2x-1)\,dx=e^x(2x-3)\Big]_0^1=3-e\neq 0 \Rightarrow$ el no homogéneo **no tiene solución**].

15. a) $\boxed{y''+y'=2e^x}$ $\mu=0,-1$. $y_p=Ae^x \to A+A=2$. $y=c_1+c_2e^{-x}+e^x \xrightarrow{d.i.} \begin{matrix}y(0)=c_1+c_2+1=0\\ y'(0)=-c_2+1=2\end{matrix}$, $\boxed{y=e^x-e^{-x}}$.

($\mu=1$ no autovalor)

O bien: $y'=v \to v'=-v+2e^x$, $v=Ce^{-x}+e^{-x}\int 2e^{2x}dx=Ce^{-x}+e^x$. $y=K-Ce^{-x}+e^x$, como antes.

b) $\boxed{\begin{matrix}y''+y'+\lambda y=0\\ y'(0)=y'(1)=0\end{matrix}}$ $\mu^2+\mu+\lambda=0$. $\lambda=0$, $y=c_1+c_2e^{-x} \xrightarrow{cc} \begin{matrix}-c_2=0\\ -c_2e^{-1}=0\end{matrix}$, $\forall c_1$. **Autovalor** con $\boxed{y_0=\{1\}}$.

$\lambda=-2$, $\mu=1,-2$, $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}$, $y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x} \xrightarrow{cc} \begin{matrix}c_1=2c_2 \searrow & c_2=0\\ c_1e-2c_2e^{-2}=c_1(e-e^{-2})=0, & c_1=0\end{matrix}$. **No autovalor**.

[Como la ecuación en forma autoadjunta es $\left[y'e^x\right]'+\lambda e^xy=0$, al ser $q=\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$ sabemos que no había $\lambda<0$].

16. $\boxed{y''+2y'+y=4e^x}$. **a]** $\mu^2+2\mu+1=(\mu+1)^2=0$, $y_p=Ae^x$ (1 no autovalor), $A+2A+A=4$, $y=(c_1+c_2x)\,e^{-x}+e^x$.

Imponiendo datos $\left[y'=(c_2-c_1-c_2x)\,e^{-x}+e^x\right]$: $\begin{cases}c_1+1=0\\ c_2-c_1+1=2\end{cases}$, $c_1=-1$, $c_2=0$. $\boxed{y=e^x-e^{-x}}$.

b] $\lambda=1 \;\rightarrow\; \begin{matrix}y=(c_1+c_2x)\,e^{-x}\\ y'=(c_2-c_1-c_2x)\,e^{-x}\end{matrix}$ $\begin{cases}y(0)=c_1=0\\ y'(1)=-c_1e^{-1}=0\end{cases}$, $c_1=0, \forall c_2$. **Autovalor** con autofunción $\boxed{\{xe^{-x}\}}$.

$\lambda=2,\ \mu=-1\pm i \;\rightarrow\; \begin{matrix}y=(c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x)\,e^{-x}\\ y'=(-c_1s+c_2c-c_1c-c_2s)\,e^{-x}\end{matrix}$ $\begin{cases}y(0)=c_1=0 \downarrow \ \ {}_{\neq 0}\swarrow \frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}\\ y'(1)=c_2(\cos 1-\mathrm{sen}\,1)\,e^{-1}=0,\ c_2=0\end{cases}$. **No autovalor**.

17. a] $\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$, $q\equiv 0 \;\Rightarrow\; \lambda\geq 0$. [Directamente: $\lambda<0$: $y=c_1e^{px}+c_2e^{-px} \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix}c_1+c_2=0\searrow\\ pc_1[e^{p/2}+e^{-p/2}]=0\end{matrix}\right\}\rightarrow c_1=c_2=0$].

$\lambda=0$: $y=c_1+c_2x \;\rightarrow\; \left.\begin{matrix}y(0)=c_1=0\\ y'(\frac{1}{2})=c_2=0\end{matrix}\right\}\rightarrow \lambda=0$ no es autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$, $y'=-wc_1\,\mathrm{sen}\,wx+wc_2\cos wx$. $y(0)=0\rightarrow c_1=0\rightarrow y'(\frac{1}{2})=wc_2\cos\frac{w}{2}=0$

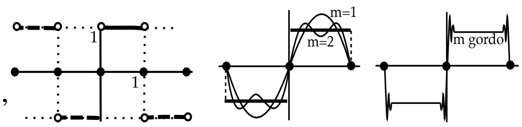
$\rightarrow\; w_n=(2n-1)\pi$, $\boxed{\lambda_n=(2n-1)^2\pi^2,\ y_n=\{\mathrm{sen}(2n-1)\pi x\}}$, $n=1,2,\ldots$ (como en formulario).

$\langle y_n,y_n\rangle \overset{r\equiv 1}{=} \int_0^{1/2}\mathrm{sen}^2 w_nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left[1-\cos 2w_nx\right]dx=\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{sen}(2n-1)\pi}{2(2n-1)\pi}=\boxed{\frac{1}{4}}$ (como en formulario).

b] $c_n=4\int_0^{1/2}x\,\mathrm{sen}(2n-1)\pi x\,dx=-\frac{4x}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\pi x\Big]_0^{1/2}+\frac{4}{(2n-1)\pi}\int_0^{1/2}\cos(2n-1)\pi x=\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi}{2}$.

Por tanto: $\boxed{x=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\,\mathrm{sen}(2n-1)\pi x}=\frac{4}{\pi^2}\left[\mathrm{sen}\,\pi x-\frac{1}{9}\,\mathrm{sen}\,3\pi x+\frac{1}{25}\,\mathrm{sen}\,5\pi x+\cdots\right]$.

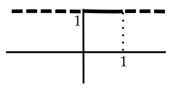
18. a) $\boxed{f(x)=1}$ $b_n=2\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,n\pi x\,dx=\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}$, $\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2m-1)\pi x}{2m-1}$.



La serie tiende hacia la extensión 2-periódica de $f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$,

y la suma es 0 si $x\in\mathbf{Z}$. Cerca de ellos aparecerán picos.

La serie en cosenos es la propia constante $1=1+0+0+\cdots$ (es una de las autofunciones).

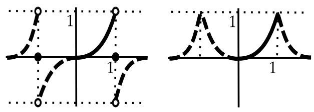


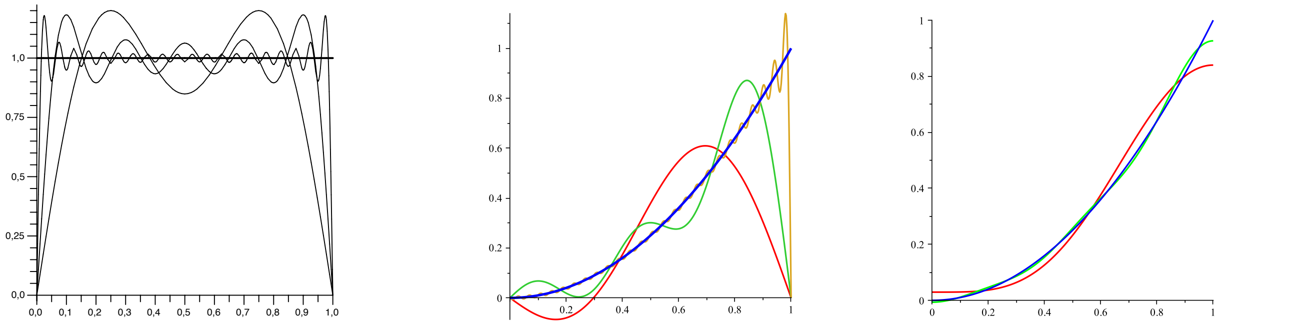
b) $\boxed{f(x)=x^2}$ $b_n=2\int_0^1 x^2\mathrm{sen}\,n\pi x\,dx=-\frac{2x^2\cos n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1+\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}+\frac{4x\,\mathrm{sen}\,n\pi x}{n^2\pi^2}\Big]_0^1-\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1\mathrm{sen}\,n\pi x\,dx$

$a_0=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}$, $a_n=2\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx=\frac{2x^2\mathrm{sen}\,n\pi x}{n\pi}\Big]_0^1+\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,n\pi x\,dx=-\frac{4x\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Big]_0^1-\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1\cos n\pi x\,dx$

Por tanto, $x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}-\frac{4[(-1)^n-1]}{\pi^3n^3}\right]\mathrm{sen}\,n\pi x=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$.

La de senos convergerá mal cerca de 1 y la de cosenos tiende a x^2 en todo $[0,1]$.





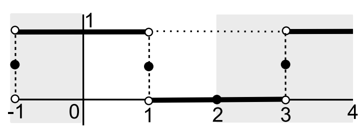
a) sen, $m=2,5,20$ b) sen, $n=2,5,50$ b) cos, $n=2,5$

19. $\boxed{f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & 1<x\leq 2\end{cases}}$ Si $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$, es $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$. En este caso:

$a_0=\frac{2}{2}\int_0^1 dx=1$, $a_n=\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n \text{ par}\\ \frac{2(-1)^m}{(2m+1)\pi}, & n=2m+1\end{cases}\rightarrow \boxed{\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2}}$.

i) En $x=1$ es f discontinua y la serie tenderá hacia $\frac{1}{2}\left[f(1^-)+f(1^+)\right]=\frac{1}{2}$:

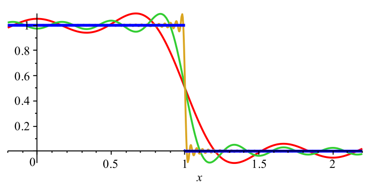
$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi}{2}=\frac{1}{2}$ [los cosenos se anulan].



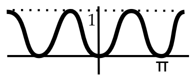
ii) Como tiende en todo $\mathbf{R}$ hacia la extensión par y 4-periódica de f, en $x=2$ ha de tender hacia $f(2)=0$. Sustituyendo:

$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos(2m+1)\pi=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=0$,

ya que la última serie $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

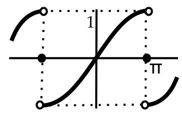


20. a) $\boxed{f(x)=\text{sen}^2 x} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, ya desarrollada $\left[\, a_0=\frac{1}{2}\,,\, a_2=-\frac{1}{2}\right.$ y resto de a_n y $\left. b_n=0\,\right]$.



b) $\boxed{f(x)=\text{sen}\,\frac{x}{2}}$ Como es impar serán $a_n=0$.

$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}\,\frac{x}{2}\,\text{sen}\,nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\frac{(1-2n)x}{2}-\cos\frac{(1+2n)x}{2}\right]dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1-2n}-\frac{(-1)^n}{1+2n}\right]=\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^n n}{1-4n^2}$.



21. $\boxed{\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)-2y'(0)=y(1)-2y'(1)=0\end{array}}$ Como $\beta\cdot\beta'>0$ pueden existir $\lambda<0$.

$\lambda<0\,,\ y=c_1e^{px}+c_2e^{-px}\ \rightarrow\ \begin{array}{l} c_1+c_2-2p[c_1-c_2]=0 \\ c_1e^p+c_2e^{-p}-2p[c_1e^p-c_2e^{-p}]=0\end{array},\ \begin{vmatrix} 1-2p & 1+2p \\ [1-2p]e^p & [1+2p]e^{-p}\end{vmatrix}=[1-2p][1+2p][e^{-p}-e^p]$.

El determinante se anula si $p=\frac{1}{2}$ (y entonces es $c_2=0$). $\boxed{\lambda_0=-\frac{1}{4}}$ y su autofunción es $\boxed{y_0=\{e^{x/2}\}}$.

$\lambda=0\,,\ y=c_1+c_2x\ \rightarrow\ \begin{array}{l} c_1-2c_2=0 \\ c_1-c_2=0\end{array}\ \Rightarrow\ c_1=c_2=0$. No es autovalor.

$\lambda>0\,,\ y=c_1\cos wx+c_2\,\text{sen}\,wx\ \rightarrow\ \begin{array}{l} c_1-2wc_2=0\,,\ c_1=2wc_2 \\ c_1\cos w+c_2\,\text{sen}\,w-2w[-c_1\,\text{sen}\,w+c_2\cos w]=0\end{array}\rightarrow\ c_1(1+4w^2)\,\text{sen}\,w=0$.

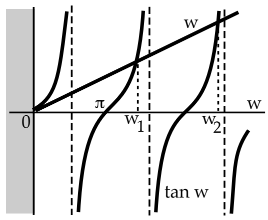
Por tanto, $w_n=n\pi$, $\boxed{\lambda_n=n^2\pi^2}$, $\boxed{y_n=\{2n\pi\cos n\pi x+\text{sen}\,n\pi x\}}$, $n=1,2,\dots$

$\langle y_0,y_0\rangle=\int_0^1 e^x dx=\boxed{e-1}$. $\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^1\left[2n^2\pi^2(1+\cos 2n\pi x)+2n\pi\,\text{sen}\,2n\pi x+\frac{1}{2}(1-\cos 2n\pi x)\right]dx=\boxed{\frac{1}{2}+2n^2\pi^2}$.

22. $\boxed{\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)-y'(1)=0\end{array}}$ a) $\lambda=0$: $y=c_1+c_2x$, $\left.\begin{array}{l} c_1=0 \\ c_1+c_2-c_2=0\end{array}\right\}$ $c_1=0\,,\ \forall c_2\ \rightarrow\ \lambda_0=0\,,\ \boxed{y_0=\{x\}}$.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\,\text{sen}\,wx$, $w=\sqrt{\lambda}\ \rightarrow\ \left.\begin{array}{l} c_1=0 \searrow \\ c_2(\text{sen}\,w-w\cos w)=0\end{array}\right\}$

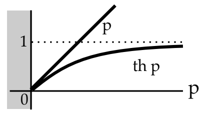
c_2 cualquiera si $\text{sen}\,w=w\cos w$. Infintos $\lambda_n=w_n$ con $w_n=\tan w_n$, $y_n=\{\,\text{sen}\,w_nx\}$.



Como $\beta\beta'<0$ podría haber $\lambda<0$. Para ver que no buscamos la tangente hiperbólica:

$y=c_1e^{px}+c_2e^{-px}\ \rightarrow\ \left.\begin{array}{l} c_1=-c_2 \searrow \\ c_2(p[e^p+e^{-p}]-[e^p-e^{-p}])=0\end{array}\right\}\ \rightarrow\ y\equiv 0$

$\big[$no existe $p>0$ con $p=\text{th}\,p$, pues $(\text{th}\,p)'(0)=1\,\big]$.



b) Los coeficientes del desarrollo $1=\sum_{n=0}^{\infty}c_ny_n(x)=c_0x+\sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}\,w_nx$ vienen dados por $c_n=\frac{\langle 1,y_n\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle}$.

En particular, $\langle 1,x\rangle=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$, $\langle x,x\rangle=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$. Por tanto, $c_0=\frac{1/2}{1/3}=\boxed{\frac{3}{2}}$, $1=\frac{3}{2}x+\cdots$

23. $\boxed{\begin{array}{l} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(1/2)=0\end{array}}$ En forma autoadjunta: $\left(y'e^{2x}\right)'+\lambda e^{2x}y=0$ [problema de S-L regular].
$\mu^2+2\mu+\lambda=0\rightarrow\ \mu=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$. En principio, puede haber λ negativos.

$\lambda<1\,,\ \sqrt{1-\lambda}=p\ \rightarrow\ y=c_1e^{(p-1)x}+c_2e^{-(p+1)x}\ \rightarrow\ \begin{array}{l} y(0)+y'(0)=p(c_1-c_2)=0 \\ y(\frac{1}{2})=(c_1e^{p/2}+c_2e^{-p/2})\,e^{-1/2}=0\end{array}\ \rightarrow\ c_1=c_2=0$.

$\lambda=1\ \rightarrow\ y=(c_1+c_2x)e^{-x}\ \rightarrow\ \begin{array}{l} y(0)+y'(0)=c_2=0 \\ y(\frac{1}{2})=(c_1+\frac{1}{2}c_2)\,e^{-1/2}=0\end{array}\ \rightarrow\ c_1=c_2=0$.

$\lambda>1\,,\ \sqrt{\lambda-1}=w\ \rightarrow\ y=(c_1\cos wx+c_2\,\text{sen}\,wx)\,e^{-x}\ \rightarrow\ y(0)+y'(0)=c_2w=0\,,\ c_2=0\ \rightarrow\ y\left(\frac{1}{2}\right)=c_1\cos\frac{w}{2}e^{-1/2}=0$
$\rightarrow\ w_n=(2n-1)\pi\,,\ \lambda_n=1+(2n-1)^2\pi^2\,,\ y_n=\left\{e^{-x}\cos(2n-1)\pi x\right\},\ n=1,2,\dots$

Por tanto: $1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle 1,y_n\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle}y_n$, con $\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^{1/2}\cos^2(2n-1)\pi x\,dx=\frac{1}{4}$, $\langle 1,y_n\rangle=\int_0^{1/2}e^x\cos(2n-1)\pi x\,dx$.

Como es $\int e^x\cos bx\,dx=\frac{(\cos bx+b\,\text{sen}\,bx)e^x}{1+b^2}$, concuimos que: $1=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)\pi e^{1/2}-1}{1+(2n-1)^2\pi^2}\,e^{-x}\cos(2n-1)\pi x$.

24. $\boxed{\begin{array}{l} x^2y''+3xy'+y+\lambda y=0 \\ y(1)=y(e)=0\end{array}}$ **a]** $y''+\frac{3}{x}y'+\frac{1}{x^2}y+\frac{1}{x^2}\lambda y=0$, $e^{\int 3/x}=x^3$, $(x^3y')'+xy+\lambda xy=0\ \Rightarrow\ \boxed{r(x)=x}$ peso.
Ecuación de Euler: $\mu(\mu-1)+3\mu+1+\lambda=0$, $\mu=-1\pm\sqrt{-\lambda}$.

b] Para $\lambda=0$, $\mu=-1$ doble $\rightarrow\ y=\left(c_1+c_2\ln x\right)x^{-1}\ \rightarrow\ \begin{array}{l} y(1)=c_1=0 \\ y(e)=(c_1+c_2)\,e^{-1}=0\end{array}\ \Rightarrow\ c_1=c_2=0$. **No es autovalor.**

c] Para $\lambda=\pi^2$, $\mu=-1\pm i\,\pi$ la solución general es: $y=c_1\frac{\cos(\pi\ln x)}{x}+c_2\frac{\text{sen}(\pi\ln x)}{x}\ \rightarrow\ \begin{array}{l} y(1)=c_1=0 \\ y(e)=-c_1e^{-1}=0\end{array}$, $\forall c_2$.

Es pues, $\lambda=\pi^2$ autovalor con **autofunción** asociada $\boxed{y_1=\left\{\frac{\text{sen}(\pi\ln x)}{x}\right\}}$.

$\langle y_1\,,y_1\rangle=\int_1^e x\frac{1}{x^2}\,\text{sen}^2(\pi\ln x)\,dx=[\,\ln x=s\,]=\int_0^1\text{sen}^2(\pi s)\,ds=\frac{1}{2}\int_0^1\left[1-\cos(2\pi s)\right]ds=\boxed{\frac{1}{2}}$.

25. $\boxed{y''+y'=x}$ $\mu^2+\mu=0$, $\mu=0,-1$. $y_p=Ax^2+Bx \to 2A+2Ax+B=x$, $A=\frac{1}{2}, B=-1$. $y=c_1+c_2\,e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x$.

Imponiendo datos: $\begin{cases} c_1+c_2=-1\,, & c_1=-1 \\ -c_2-1=-1\,, & c_2=0\uparrow \end{cases} \to\ y=\frac{1}{2}x^2-x-1$.

b] Mejor mirar el homogéneo: $y=c_1+c_2\,e^{-x} \xrightarrow{cc} \begin{cases} -c_2=0 \\ -c_2\,e^{-1}=0 \end{cases}$. Infinitas soluciones $y_h=\{1\}$ del homogéneo $\Rightarrow$ infinitas o ninguna del no homogéneo.

[Imponiendo los datos en la no homogénea o haciendo la integral del terorema se ve que no tiene solución].

26. $\boxed{\begin{matrix} y''+y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{matrix}}$ Multiplicando por e^x: $\boxed{\left(e^x y'\right)'+\lambda\,e^x y=0}$ forma autoadjunta.

$\alpha\alpha'=\beta\beta'=q=0 \Rightarrow$ los $\lambda\geq 0$ y $\lambda=-2$ no puede ser autovalor. O directamente:

$\mu^2+\mu-2=0$, $\mu=1,-2$, $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}$, $y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}$, $\begin{cases} y'(0)=c_1-2c_2=0 \\ y'(1)=c_1e-2c_2e^{-2}=0 \end{cases}$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ e & -2e^{-2} \end{vmatrix}\neq 0 \to c_1=c_2=0$.

$\mu^2+\mu=0$, $\mu=0,-1$, $y=c_1+c_2e^{-x}$, $y'=-c_2e^{-x}$, $\begin{cases} y'(0)=-c_2=0 \\ y'(1)=-c_2e^{-1}=0 \end{cases} \to c_2=0,\ \forall c_1$. $\lambda=0$ autovalor $\left[\,y_0=\{1\}\,\right]$.

Como para $\lambda=-2$ el homogéneo tiene sólo la solución $y\equiv 0$, el no homogéneo tiene **solución única**.

27. $\boxed{\begin{matrix} x^2y''+\lambda y=0 \\ y'(1)=y'(2)=0 \end{matrix}}$ **a]** Euler, $\mu^2-\mu-\lambda=0$. $\lambda=0 \to \mu=0,1$, $y=c_1+c_2x \xrightarrow{cc} \begin{matrix} c_2=0 \\ c_2=0 \end{matrix}$, $\forall c_1$. **Autovalor** con $\boxed{y_0=\{1\}}$.

$\lambda=-2 \to \mu=2,-1$, $y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}$, $y'=2c_1x-\frac{c_2}{x^2} \xrightarrow{cc} \begin{matrix} y'(1)=2c_1-c_2=0 \\ y'(2)=2c_1-\frac{1}{4}c_2=0 \end{matrix} \Rightarrow c_1=c_2=0$. **No es autovalor**.

$\big[$Como la ecuación es $\left[y'\right]'+\lambda\frac{1}{x^2}y=0$ en forma autoadjunta, al ser $q=\alpha\alpha'=\beta\beta'=0$ sabemos que no había $\lambda<0\,\big]$.

b] Como el homogéneo tenía sólo la solución $y\equiv 0$, este no homogéneo tendrá seguro **solución única**.

[Imponiendo los datos en la solución de la no homogénea $y=c_1x^2+c_2x^{-1}\underset{\text{a ojo}}{-1}$, se ve que esa única solución es $y=-1$].

28. $\boxed{\begin{matrix} xy''-y'=x^2-a \\ y'(2)=y'(4)=0 \end{matrix}}$ La homogénea se puede resolver como Euler: $\lambda(\lambda-1)-\lambda=0 \to y=c_1+c_2x^2$, o haciendo $y'=v \to v'=\frac{v}{x} \to v=Ce^{\ln x}=Cx \to y=c_1+c_2x^2$ $\left[\,y'=2c_2x\,\right]$.

Imponiendo datos: $\begin{matrix} y'(2)=4c_2=0 \\ y'(4)=8c_2=0 \end{matrix} \to c_2=0$ y todo c_1. El homogéneo tiene infinitas soluciones $y_h=\{1\}$.

El no homogéneo tendrá infinitas o ninguna. En forma autoadjunta: $y''-\frac{1}{x}y'=x-\frac{a}{x} \xrightarrow{\times e^{-\log x}} \left(\frac{1}{x}y'\right)'=1-\frac{a}{x^2}$.

$\int_2^4 1\cdot(1-\frac{a}{x^2})\,dx=2+\left[\frac{a}{x}\right]_2^4=2-\frac{a}{4} \to$ Si $\boxed{a=8}$ tiene infinitas soluciones. [Si $a\neq 8$, ninguna].

$\big[$Se llega a lo mismo imponiendo los datos en la solución genera de la no homogénea $\cdots\ y=c_1+c_2x^2+\frac{1}{3}x^3+ax\ \cdots\ \big]$.

29. $\boxed{\begin{matrix} y''+\lambda y=\operatorname{sen}x \\ y(0)=y'(\frac{\pi}{2})=0 \end{matrix}}$ La ecuación ya está en forma autoadjunta: $[y']'+\lambda y=\operatorname{sen}x$.
Sabemos que para el homogéneo son: $\lambda_n=(2n-1)^2$, $y_n=\left\{\operatorname{sen}(2n-1)x\right\}$, $n=1,2,\ldots$

Para cualquier $\lambda\neq(2n-1)^2$ el homogéneo sólo tiene la solución trivial y el no homogéneo **solución única**.

Si $\lambda=(2n-1)^2$ el no homogéneo tendrá $\begin{matrix}\text{infinitas}\\ \text{ninguna}\end{matrix}$ según sea $\begin{matrix}=0\\ \neq 0\end{matrix}$ la integral $I=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}x\ \operatorname{sen}(2n-1)x\,dx$.

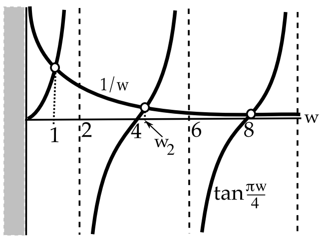
Por tanto, **no hay solución** sólo si $\lambda=1$ $\left[\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2x\,dx\neq 0\right]$, ya que para los otros autovalores $\lambda=9,\ 25,\ \ldots$ la integral es cero [sin calcularla: $\operatorname{sen}x$ es ortogonal a las otras autofunciones] y hay **infinitas soluciones**.

$\big[$La integral no es difícil de calcular: $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\cos 2(n-1)x-\cos 2nx\right]dx \overset{n\neq 1}{=} \frac{\operatorname{sen}(n-1)\pi}{4(n-1)}-\frac{\operatorname{sen}n\pi}{4n}=0$, $n\neq 1\,\big]$.

30. $\boxed{\begin{matrix} y''+\lambda y=\cos 3x \\ y'(0)=y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=0 \end{matrix}}$ $\begin{matrix} \alpha\cdot\alpha'=0 \\ \beta\cdot\beta'>0 \end{matrix} \Rightarrow \lambda\geq 0$. $\lambda=0$: $y=c_1+c_2x \to \begin{matrix} y'(0)=c_2=0\downarrow \\ y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=c_1=0 \end{matrix}\Big\}$ $\lambda=0$ no autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen}wx$. $y'(0)=0 \to c_2=0 \to y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=c_1\left[\cos\frac{w\pi}{4}-w\operatorname{sen}\frac{w\pi}{4}\right]=0$.

Si el corchete es cero, c_1 queda indeterminado. Infinitos w_n cumplen $\tan\frac{\pi w_n}{4}=\frac{1}{w_n}$. A cada $\lambda_n=w_n^2$, está asociada la $y_n=\{\cos w_nx\}$.



λ_1 se pueda hallar exactamente: $\boxed{\lambda_1=1 \to y_1=\{\cos x\}}$ ($\tan\frac{\pi}{4}=1$).

Si $\cos 3x=c_1\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cos w_nx$, el primer coeficiente c_1 es:

$$c_1=\frac{\langle\cos 3x,\cos x\rangle}{\langle\cos x,\cos x\rangle}=\frac{\int_0^{\pi/4}\cos 3x\cos x\,dx}{\int_0^{\pi/4}\cos^2x\,dx}=\frac{\int_0^{\pi/4}(\cos 4x+\cos 2x)\,dx}{\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2x)\,dx}=\boxed{\frac{2}{\pi+2}}.$$

Para i), por no ser $\lambda=0$ autovalor hay solución única del no homogéneo. Para ii), hay infinitas del homogéneo $y_h=\{\cos x\}$ y el no homogéneo no tiene solución pues: $\int_0^{\pi/4}\cos 3x\cos x\,dx=\frac{1}{4}\neq 0$.

Soluciones de problemas 4 de MM(im) (2020)

1. i) $\boxed{x^2y''-2y=0}$ es de Euler. $\mu(\mu-1)-2=(\mu-2)(\mu+1)=0 \;\to\; \boxed{y=c_1x^2+c_2x^{-1}}$, c_1,c_2 constantes.

ii) $\boxed{x^2u_x=2u}$ es EDP lineal de primer orden en x con una constante para cada y :

$$u(x,y)=p(y)\,\mathrm{e}^{\int(2/x^2)\,dx}=\boxed{p(y)\,\mathrm{e}^{-2/x}},\text{ con } p \text{ función arbitraria.}$$

2. $\boxed{\begin{matrix}2xu_y+u_x=4xy\\ u(1,y)=1\end{matrix}}$ $\frac{dy}{dx}=2x$. $y=x^2+C$. Características: $\boxed{y-x^2=C}$. [También válidas $x^2-y=C,\dots$].

Haciendo $\begin{cases}\xi=y-x^2\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=-2xu_\xi\end{cases} \to 2xu_\eta=4xy$, $u_\eta=2y=2\eta$. $u=p(\xi)+\eta^2=\boxed{p(y-x^2)+y^2}$.

[Más largo: $\begin{cases}\xi=y-x^2\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=-2xu_\xi+u_\eta\end{cases} \to u_\eta=4xy=4\xi\eta-4\eta^3$. $u=q(\xi)+2\xi\eta-\eta^3=q(y-x^2)+2x^2y-x^4$].

Imponiendo el dato inicial: $u(1,y)=p(y-1)+y^2=1 \to p(v)=-2v-v^2$, $\boxed{u(x,y)=2x^2y-2y+2x^2-x^4}$.

[O bien, $q(y-1)+2y-1=1$, $q(v)=-2v \nearrow$].

Comprobamos: $u(1,y)=1$, y además: $2xu_y+u_x=2x(2x^2-2)+(4xy+4x-4x^3)=4xy$.

3. $\boxed{u_y-2u_x=(x+2y)u}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$. $\int 2\,dy=-\int dx+C$. Características: $\boxed{x+2y=C}$.

Haciendo $\begin{cases}\xi=x+2y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases} \to u_\eta=(x+2y)u=\xi u$. $u=p(\xi)\,\mathrm{e}^{\xi\eta}=\boxed{p(x+2y)\,\mathrm{e}^{xy+2y^2}}$.

[O más largo: $\begin{cases}\xi=x+2y\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=2u_\xi\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases} \to -2u_\eta=(x+2y)u$, $u_\eta=-\frac{\xi}{2}u$. $u=q(\xi)\,\mathrm{e}^{-\xi\eta/2}=q(x+2y)\,\mathrm{e}^{-x^2/2-xy}$].

Imponiendo el dato inicial: $u(x,1)=p(x+2)\,\mathrm{e}^{x+2}=2$, $p(v)=2\mathrm{e}^{-v}$, $\boxed{u(x,y)=2\,\mathrm{e}^{xy-x-2y+2y^2}=2\,\mathrm{e}^{(y-1)(x+2y)}}$.

Comprobamos: $u(x,1)=1$, y además: $u_y-2u_x=(x-2+4y-2y+2)\,\mathrm{e}^{\cdots}=(x+2y)\,\mathrm{e}^{\cdots}$.

[Como los datos se dan sobre una recta no característica, la solución debía ser única].

4. $\boxed{u_y+u_x=u+x}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1} \to \boxed{y-x=C}$. Más corto: $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=-u_\xi+u_\eta\end{cases} \to u_\eta=u+x=u+\eta$.

$u(\xi,\eta)=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta+\mathrm{e}^\eta\int \mathrm{e}^{-\eta}\eta\,d\eta=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta-\eta-1$ [o probando $u_p=A\eta+B$]. $\boxed{u(x,y)=p(y-x)\,\mathrm{e}^x-x-1}$.

[Algo más largo: $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=-u_\xi\end{cases} \to u_\eta=u+x=u+\eta-\xi$. $u=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta+\mathrm{e}^\eta\int \mathrm{e}^{-\eta}(\eta-\xi)\,d\eta=p(\xi)\,\mathrm{e}^\eta+\xi-\eta-1$].

Imponiendo el dato inicial: $u(x,0)=p(-x)\,\mathrm{e}^x-x-1=-x \to p(-x)=\mathrm{e}^{-x}$, $p(v)=\mathrm{e}^v$, $\boxed{u(x,y)=\mathrm{e}^y-x-1}$.

[Comprobamos: $u(x,0)=-x$, y además: $u_y+u_x=\mathrm{e}^y-1=\mathrm{e}^y-x-1+x=u+x$].

5. $\boxed{2xyu_y-u_x=2xy}$ $\frac{dy}{dx}=-2xy$ lineal. $y=C\mathrm{e}^{-\int 2x}=C\mathrm{e}^{-x^2}$. Características: $\boxed{y\,\mathrm{e}^{x^2}=C}$.

Haciendo $\begin{cases}\xi=y\,\mathrm{e}^{x^2}\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=\mathrm{e}^{x^2}u_\xi+u_\eta\\ u_x=2xy\mathrm{e}^{x^2}u_\xi\end{cases} \to 2xyu_\eta=2xy$, $u_\eta=1$, $u=\eta+p(\xi)=\boxed{y+p\big(y\,\mathrm{e}^{x^2}\big)}$.

[Peor: $\begin{cases}\xi=y\,\mathrm{e}^{x^2}\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=\mathrm{e}^{x^2}u_\xi\\ u_x=2xy\mathrm{e}^{x^2}u_\xi+u_\eta\end{cases} \to -u_\eta=2xy$, $u_\eta=-2\xi\eta\mathrm{e}^{-\eta^2}$, $u=\xi\mathrm{e}^{-\eta^2}+p(\xi)=y+p\big(y\,\mathrm{e}^{x^2}\big)$ como antes].

Imponiendo el dato inicial: $u(1,y)=y+p(\mathrm{e}y)=0 \to p(v)=-v/\mathrm{e}$, $\boxed{u(x,y)=y-y\,\mathrm{e}^{x^2-1}}$.

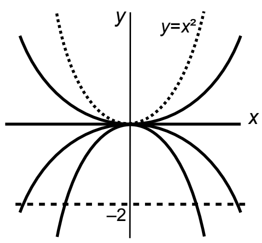
6. $\boxed{2yu_y+xu_x=4x^2y}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x} \to y=C\,\mathrm{e}^{\int(2/x)}=C\,\mathrm{e}^{2\ln x}=Cx^2$. $\begin{cases}\xi=yx^{-2}\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=x^{-2}u_\xi+u_\eta\\ u_x=-2yx^{-3}u_\xi\end{cases} \to$

$2yu_\eta=4x^2y$, $u_\eta=2x^2=\frac{2\eta}{\xi} \to u=\frac{\eta^2}{\xi}+p(\xi)$. $\boxed{u(x,y)=x^2y+p\big(\frac{y}{x^2}\big)}$ solución general

O bien $\begin{cases}\xi=yx^{-2}\\ \eta=x\end{cases} \to xu_\eta=4x^2y$, $u_\eta=4xy=4\xi\eta^3 \to u=\xi\eta^4+p(\xi)=x^2y+p\big(\frac{y}{x^2}\big)$.

Imponiendo el dato: $4y+p\big(\frac{y}{4}\big)=3y$, $p\big(\frac{y}{4}\big)=-y$, $p(v)=-4v$, $\boxed{u(x,y)=x^2y-\frac{4y}{x^2}}$.

[Solución única por no ser tangente $x=-2$ a las características].



7. a) $\boxed{\begin{array}{l}(2y-x)u_y+xu_x=2y\\ u(1,y)=0\end{array}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}-1 \to y=Cx^2+x \to \begin{cases}\xi=\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\\ \eta=x\end{cases} \to xu_\eta=2y\,,\ u_\eta=2+2\xi\eta \to$

$u=2\eta+\xi\eta^2+p(\xi)=x+y+p(\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}) \to 1+y+p(y-1)=0 \to p(v)=-v-2\,,\ \boxed{u=\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}+x+y-2}\,.$

b) $\boxed{\begin{array}{l}u_y+3y^2u_x=\frac{2u}{y}+6y^4x\\ u(x,1)=x^2\end{array}}$ $\begin{cases}\xi=x-y^3\\ \eta=y\end{cases}\to u_\eta=\frac{2u}{\eta}+6\eta^4(\xi+\eta^3)\,,\ u=p(\xi)\eta^2+\eta^2(\xi+\eta^3)^2=p(x-y^3)y^2+x^2y^2$

O bien, $\begin{cases}\xi=x-y^3\\ \eta=x\end{cases}\to u_\eta=\frac{2u}{3(\eta-\xi)}+2(\eta-\xi)^{2/3}\eta\,,\ u=p(\xi)(\eta-\xi)^{2/3}+\eta^2(\eta-\xi)^{2/3}$

$u(x,1)=p(x-1)+x^2=x^2 \to p(v)=0 \to \boxed{u=x^2y^2}$

c) $\boxed{\begin{array}{l}u_y+2yu_x=3xu\\ u(x,0)=2x\end{array}}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}\,.\ \int 2y\,dy=\int dx+C\,.\ \boxed{y^2-x=C}\,.$ [También se podría haber puesto $x-y^2=C\,,\ldots$].

Haciendo $\begin{cases}\xi=y^2-x\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=2yu_\xi+u_\eta\\ u_x=-u_\xi\end{cases}\to u_\eta=3xu=(3\eta^2-3\xi)u\,,\ u=p(\xi)\,e^{\eta^3-3\xi\eta}=\boxed{p(y^2-x)\,e^{3xy-2y^3}}\,.$

[Peor con: $\begin{cases}\xi=y^2-x\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=2yu_\xi\\ u_x=-u_\xi+u_\eta\end{cases}\to u_\eta=\frac{3x}{2y}u=\frac{3\eta}{2\sqrt{\xi+\eta}}u$, con la integral bastante más larga de calcular].

Imponiendo el dato inicial: $u(x,0)=p(-x)=2x \to p(v)=-2v\,,\ u(x,y)=\boxed{2(x-y^2)\,e^{3xy-2y^3}}\,.$

d) $\boxed{\begin{array}{l}2yu_y-xu_x=2u\\ u(-1,y)=y^3\end{array}}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}$ lineal. $y=C\,e^{\int(-2/x)\,dx}=Ce^{\ln x^{-2}}=\frac{C}{x^2}$. Características: $\boxed{x^2y=C}\,.$

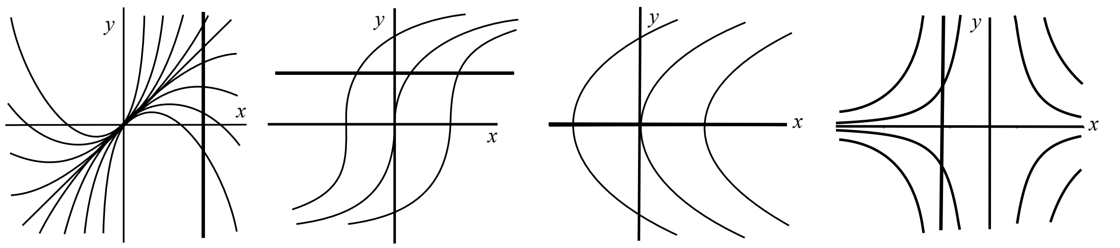
$\begin{cases}\xi=x^2y\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=x^2u_\xi+u_\eta\\ u_x=2xy\,u_\xi\end{cases}\to 2yu_\eta=2u\,,\ u_\eta=\frac{1}{\eta}u\,,\ u=p(\xi)\,e^{\ln\eta}=p(\xi)\,\eta\,.\ \boxed{u(x,y)=p(x^2y)\,y}\,.$

O bien: $\begin{cases}\xi=x^2y\\ \eta=x\end{cases}\to\begin{cases}u_y=x^2u_\xi\\ u_x=2xyu_\xi+u_\eta\end{cases}\to -xu_\eta=2u\,,\ u_\eta=-\frac{2}{\eta}u\,,\ u=q(\xi)\,e^{-2\ln\eta}=\frac{q(\xi)}{\eta^2}\,.\ \boxed{u(x,y)=\frac{q(x^2y)}{x^2}}\,.$

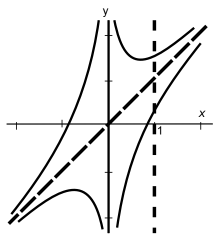
Imponiendo el dato inicial: $u(-1,y)=p(y)\,y=y^3\,,\ p(v)=v^2\,,\ u(x,y)=x^4y^2y=\boxed{x^4y^3}\,.$

O bien: $u(-1,y)=q(y)=y^3\,,\ q(v)=v^3\,,\ u(x,y)=x^6y^3/x^2=\boxed{x^4y^3}\,.$

[Comprobamos: $u(-1,y)=y3$, y además: $2yu_y-xu_x=6x^4y^3-4x^4y^3=2u$. La solución debía ser única].



8. **a]** $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x}}$ i) Como lineal: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}+2 \to y=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}\int 2x\,dx=\frac{C}{x}+x\,,\ x(y-x)=C\,.$



ii) $(y-2x)+x\frac{dy}{dx}=0\,,\ M_y=1\equiv N_x\,.$ $\begin{array}{l}U_x=y-2x\,,\ U=xy-x^2+p(y)\\ U_y=x\,,\ U=xy+q(x)\end{array} \to xy-x^2=C\uparrow$

iii) $y=xz \to xz'+z=2-z\,.\ \int\frac{dz}{z-1}=-\int\frac{2\,dx}{x}+C\,,\ \ln(z-1)=C-2\ln x\,,\ z-1=\frac{y}{x}-1=Cx^{-2}.$

b] $\boxed{(2x-y)u_y+xu_x=yu}\,.$ $\begin{cases}\xi=xy-x^2\\ \eta=x\end{cases},\ u_\eta=\frac{y}{x}u=(1+\frac{\xi}{\eta^2})u\,,\ u=p(\xi)\,e^{\eta-\frac{\xi}{\eta}}=p(xy-x^2)\,e^{2x-y}\,.$

$u(1,y)=p(y-1)\,e^{2-y}=1\,,\ p(v)=e^{v-1}\,,\ \boxed{u(x,y)=e^{xy-x^2+2x-y-1}=e^{(x-1)(y-x+1)}}$ [Solución única por no ser $x=1$ tangente a las características].

[Más largo sería: $\begin{cases}\xi=xy-x^2\\ \eta=y\end{cases},\ \eta^2-4\xi=(2x-y)^2 \to u_\eta=\frac{y}{2x-y}u=\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-4\xi}}u \to u=p(\xi)\,e^{\sqrt{\eta^2-4\xi}}=p(xy-x^2)\,e^{2x-y}$].

Comprobando: $u(1,y)=e^0=1\,.\ u_y=(x-1)\,e^{\cdots}\,,\ u_x=(y-2x+2)\,e^{\cdots}\,,\ (2x^2-2x-xy+y+xy-2x^2+2x)\,e^{\cdots}=y\,e^{\cdots}\,.$

c] $u(x,x)=p(0)\,e^x=e^x \to p(0)=1$. Para cada p derivable que lo cumpla tenemos una solución. Hay infinitas. [Dato sobre una característica]. Por ejemplo, tomando $p(v)\equiv 1$ y $p(v)=e^v$ es: $u=e^{2x-y}$ y $u=e^{xy-x^2+2x-y}$.

9. $\boxed{u_{xx}+4u_{xy}-5u_{yy}+6u_x+3u_y=9u}$ Hiperbólica $\begin{cases}\xi=x-\frac{y}{5}\\ \eta=x+y\end{cases}$ ó $\begin{cases}\xi=5x-y\\ \eta=x+y\end{cases} \to 4u_{\xi\eta}+3u_\xi+u_\eta=u$ no resoluble.

$\boxed{u_{yy}+2u_{xy}+2u_{xx}=0}$ $B^2-4AC=-4$ elíptica $\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=y\end{cases}$ $\begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}\\ u_{xy}=-u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{yy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases} \to u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$ no resoluble

$\boxed{u_{xx}-3u_x+2u=y}$ Parabólica en forma normal. $\lambda^2-3\mu+2=0 \to,\ \mu=1,2 \to \boxed{u=p(y)e^x+q(y)e^{2x}+\frac{y}{2}}$

10. a) $\boxed{y''+y=3}$. $\mu^2+1=0$, $\mu=\pm i$. $y_p=3$ a ojo ($y_p=A \to A=3$). Solución $\boxed{y=c_1\cos x+c_2 \operatorname{sen} x+3}$.

b) $\boxed{u_{yy}-2u_{xy}+u_{xx}+u=x+y}$ $B^2-4AC=0$ parabólica $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $\begin{cases}u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases} \to u_{\eta\eta}+u=x+y$,

$\boxed{u_{\eta\eta}+u=\xi}$ forma canónica . $\mu=\pm i$, $u_p=\xi \to u=p(\xi)\cos\eta+q(\xi)\operatorname{sen}\eta+\xi=\boxed{p(x+y)\cos y+q(x+y)\operatorname{sen} y+x+y}$ solución general

11. a) $\boxed{u_{tt}-4u_{xx}+2u_t+4u_x=0}$. $B^2-4AC=16$. Hiperbólica. En el formulario: $-\frac{B\mp\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\pm 2$, $\begin{cases}\xi=x+2t\\ \eta=x-2t\end{cases}$

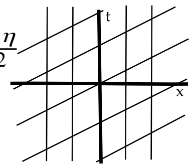
(O directamente son las de la ecuación de ondas, pues sólo dependen de las derivadas de segundo orden).

Haciendo el cambio: $\begin{cases}u_t=2u_\xi-2u_\eta\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $\begin{cases}u_{tt}=4u_{\xi\xi}-8u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases} \to -16u_{\xi\eta}+8u_\xi=0 \xrightarrow{u_\xi=v} v_\eta=\frac{1}{2}v \to$

$v=p^*(\xi)\,e^{\eta/2} \to u=q(\eta)+p(\xi)\,e^{\eta/2} \to \boxed{u=q(x-2t)+p(x+2t)\,e^{x/2-t}}$, q,p funciones C^2 arbitrarias.

$\begin{cases}q(x)+p(x)e^{x/2}=x,\ q'(x)+\big[p'(x)+\frac{p(x)}{2}\big]e^{x/2}=1\\ -2q'(x)+[2p'(x)-p(x)]e^{x/2}=0\end{cases} \to 4p'(x)e^{x/2}=2$, $p(x)=-e^{-x/2}$, $q(x)=x+1$, $\boxed{u=x-2t+1-e^{-2t}}$

b) $\boxed{u_{tt}+2u_{xt}=2}$ Hiperbólica $\begin{cases}\xi=x-2t\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_{tt}=4u_{\xi\xi}\\ u_{tx}=-2u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}\end{cases} \to u_{\xi\eta}=-\frac{1}{2}$, $u=p(\xi)+q(\eta)-\frac{\xi\eta}{2}$



$\boxed{u=p(x-2t)+q(x)-\frac{1}{2}x^2+xt}$ $\begin{cases}0=u(x,0)=p(x)+q(x)-\frac{1}{2}x^2 \qquad q(x)=\frac{1}{4}x^2-C\\ 0=u_t(x,0)=-2p'(x)+x \to p(x)=\frac{1}{4}x^2+C \nearrow\end{cases} \to \boxed{u=t^2}$.

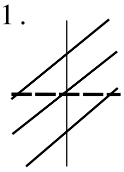
$y=0$ no tangente a las características $\to$ solución única

c) $\boxed{u_{yy}+2u_{xy}+u_{xx}-u=y}$. $B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_x=u_\xi\\ u_y=-u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $\begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}\\ u_{xy}=-u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{yy}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases}$

$\to \boxed{u_{\eta\eta}-u=\eta}$ forma canónica $\mu=\pm 1$, $u_p=-\eta \to u=p(\xi)\,e^{\eta}+q(\xi)\,e^{-\eta}-\eta=\boxed{p(x-y)\,e^{y}+q(x-y)\,e^{-y}-y}$ solución general

$\to u_y(x,y)=\big[p(x-y)-p'(x-y)\big]\,e^{y}-\big[q'(x-y)+q(x-y)\big]\,e^{-y}-1$.

$\begin{cases}p(x)+q(x)=1 \to p'(x)+q'(x)=0 \searrow\\ p(x)-q(x)-p'(x)-q'(x)=1, \quad p(x)-q(x)=1\end{cases} \to p(x)=1$, $q(x)=0$. $\boxed{u(x,y)=e^{y}-y}$.



Comprobamos: $u(x,0)=1-0$, $u_y(x,0)=1-1$. Y además: $u_{yy}+2u_{xy}+u_{xx}-u=e^{y}+0+0-e^{y}+y=y$.

12. $\boxed{\begin{matrix}u_t-u_{xx}=0,\ x\in(0,\pi),\ t>0\\ u(x,0)=0,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=1\end{matrix}}$ $v=x$ cumple las condiciones de contorno.
$w=u-x \to \begin{cases}w_t-w_{xx}=0\\ w(x,0)=-x,\ w_x(0,t)=w_x(\pi,t)=0\end{cases} \to$

$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'(\pi)=0\end{cases} \to \lambda_n=n^2$, $X_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,\dots$, y además $T'+\lambda T=0 \to T_n=\{e^{-n^2t}\}$.

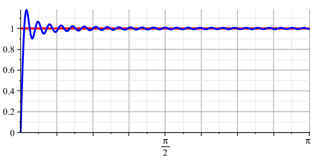
$w=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{-n^2t}\cos nx \to u(x,0)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=-x$, con $a_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx$:

$a_0=-\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=-\pi$, $a_n=-\frac{2}{n\pi}x\operatorname{sen} nx\Big]_0^\pi+\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[1-\cos n\pi]=\begin{cases}4/(n^2\pi),\ n \text{ impar}\\ 0,\ n \text{ par}\end{cases}$

$$\boxed{u(x,t)=x-\frac{\pi}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\,e^{-(2m-1)^2t}\cos(2m-1)x}$$

13. **a]** Sabemos que para $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X'(\pi)=0\end{cases}$ son $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$, $X_n=\big\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\big\}$ y $\langle X_n,X_n\rangle=\frac{L}{2}=\frac{\pi}{2}$. Como $r=1$,

es: $c_n=\frac{\langle 1,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=-\frac{4}{\pi(2n-1)}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^\pi=\frac{4}{\pi(2n-1)}$. Por tanto: $\boxed{1=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}}$.



f continua en $x=\frac{\pi}{2}\in(0,\pi) \to$ la suma de la serie será su valor en el punto: $1=f\big(\frac{\pi}{2}\big)$.

[Con ordenador, sumando 50 términos de la serie para $x=\frac{\pi}{2}$ se obtiene 1.0090..., con 1000 sale 0.9995..., . . . También se puede con un ordenador dibujar diferentes sumas parciales (a la izquierda S_{50}) y ver cómo se acercan en todo $(0,\pi]$ a la $f(x)=1$].

b] $\boxed{\begin{matrix}u_t-4(1+2t)\,u_{xx}=0,\ x\in(0,\pi),\ t>0\\ u(x,0)=1,\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0\end{matrix}}$ $u=XT \to XT'=(4+8t)X''T$, $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{(4+8t)T}=-\lambda \to$

$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X'(\pi)=0\end{cases}$, $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}$, $X_n=\big\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\big\}$. Y además: $T'+4\lambda_n(1+2t)T=0$, $T_n=\big\{e^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\big\}$.

Probamos: $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n e^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}$. Imponiendo el dato inicial $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}=1$.

Los c_n son los calculados en **a]**. Por tanto, la solución es: $u(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}$.

14. $\boxed{\begin{array}{l} u_t-8tu_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array}}$ con **a]** $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, **b]** $f(x)=\frac{\pi}{4}$.

$u(x,t)=X(x)\,T(t)\,,\ \frac{T'}{8tT}=\frac{X''}{X}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}\,,\ n=1,2,\dots\,,\ X_n=\left\{\cos\frac{(2n-1)x}{2}\right\}.$

Y además $T'=-8\lambda tT=-2(2n-1)^2tT \to T_n=\left\{e^{-(2n-1)^2t^2}\right\}$.

Probamos pues: $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{-(2n-1)^2t^2}\cos\frac{(2n-1)x}{2}$, y sólo falta cumplirse $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\cos\frac{(2n-1)x}{2}=f(x)$.

Para **a]** es claramente $c_1=1$ y los otros $c_n=0 \to \boxed{u(x,t)=e^{-t^2}\cos\frac{x}{2}}$ es la solución (fácilmente comprobable).

En el caso **b]** debemos hallar el desarrollo en serie de autofunciones de $f(x)=\frac{\pi}{4}$:

$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,dx=\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)x}{2}\Big]_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. La solución es ahora la serie:

$$\boxed{u(x,t)=e^{-t^2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\,e^{-9t^2}\cos\frac{3x}{2}+\cdots}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,e^{-(2n-1)^2t^2}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\,.$$

15. a] El formulario nos da las autofunciones $X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$, $n=1,2,\dots$, y la expresión para los coeficientes:

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{sen}nx\,dx=\left[\frac{2x-\pi}{n\pi}\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n+1}{n} \to \frac{\pi}{2}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}2nx\,.$$

b] $u=X(x)\,T(t) \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$ de antes. [Y además $T'+\lambda T=0$ que ahora no usamos].

Llevamos la serie $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx$ a la EDP no homogénea y al dato inicial para calcular los T_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+n^2T_n\right]\operatorname{sen}nx=\operatorname{sen}x\,.\quad u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=\frac{\pi}{2}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}2nx \to \begin{array}{l} T_{2n-1}(0)=0 \\ T_{2n}(0)=\frac{1}{n}\end{array}$$

Son no nulos: $\begin{cases} T_1'+T_1=1 \\ T_1(0)=0 \end{cases} \to T_1=Ce^{-t}+1$ (T_p a ojo) $\overset{d.i.}{\to} C=-1$ y $\begin{cases} T_{2n}'+4n^2T_{2n}=0 \\ T_{2n}(0)=\frac{1}{n}\end{cases} \to T_{2n}=Ce^{-4n^2t} \overset{d.i.}{\to} C=\frac{1}{n}$.

$$\to \boxed{u=\left(1-e^{-t}\right)\operatorname{sen}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,e^{-4n^2t}\operatorname{sen}2nx}=\left(1-e^{-t}\right)\operatorname{sen}x+e^{-4t}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{2}\,e^{-16t}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{3}\,e^{-36t}\operatorname{sen}6x+\cdots$$

16. a) $\boxed{\begin{array}{l} u_t-u_{xx}=4\operatorname{sen}2x\,,\ x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=2\operatorname{sen}x\,,\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array}}$ $u(x,t)=X(x)\,T(t) \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to X_n=\{\operatorname{sen}nx\}\,,\ n=1,2,\dots$

Llevamos a la EDP: $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx \to \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+n^2T_n\right]\operatorname{sen}nx=4\operatorname{sen}2x$ (ya desarrollada en senos).

Y del dato incial se deduce: $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=2\operatorname{sen}x \to T_1(0)=2$ y el resto de $T_n(0)=0$.

Sólo nos falta resolver: $\begin{cases} T_1'+T_1=0 \\ T_1(0)=2 \end{cases}$ y $\begin{cases} T_2'+4T_2=4 \\ T_2(0)=0 \end{cases}$, pues el resto de $T_{n\geq 3}\equiv 0$ claramente.

$T_1=Ce^{-t} \overset{T_1(0)=2}{\longrightarrow} T_1(t)=2e^{-t}$. $T_{2p}=1$ (a ojo), $T_2=Ce^{-4t}+1$ $\left[\text{ó } T_2=Ce^{-4t}+e^{-4t}\int 4e^{4t}\right] \overset{T_2(0)=0}{\longrightarrow} T_2(t)=1-e^{-4t}$.

La solución es entonces: $\boxed{u(x,t)=2\,e^{-t}\operatorname{sen}x+\left(1-e^{-4t}\right)\operatorname{sen}2x}$.

b) $\boxed{\begin{array}{l} u_t-u_{xx}+u=e^{-2t},\ x\in(0,\pi)\,,\ t>1 \\ u(x,0)=\cos x\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{array}}$ $u=XT \to XT'+XT=X''T\,,\ \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}+1=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$ ↖

Llevamos a la ecuación: $u=T_0(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos nx \to T_0+T_0'+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[T_n'+T_n+n^2T_n\right]\cos nx=e^{-2t}$.

[e^{-2t} (constante en x) ya está desarrollada en las autofunciones $\{\cos nx\}$, pues la primera de ellas es $\{1\}$].

Imponiendo el dato inicial $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)\cos nx=\cos x$, deducimos: $T_1(0)=1$ y $T_n(0)=0$ si $n\neq 1$.

Sólo son no nulas: $\begin{cases} T_0'+T_0=e^{-2t} \\ T_0(0)=0 \end{cases} \to T_0(t)=C\,e^{-t}+e^{-t}\int e^te^{-2t}dt=e^{-t}-e^{-2t} \overset{T_0(0)=0}{\longrightarrow} C=1$,

[La T_p se podía hallar tanteando: $T_p=A\,e^{-2t} \to A=-1 \to T_p=-e^{-2t}$].

$\begin{cases} T_1'+2T_1=0 \\ T_1(0)=1 \end{cases} \to T_1=Ce^{-2t} \overset{T_1(0)=1}{\longrightarrow} T_1(t)=e^{-2t}$. La solución es: $\boxed{u(x,t)=e^{-t}-e^{-2t}+e^{-2t}\cos x}$.

[hasta aquí el control]

17. a) $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-4u_{xx}=e^{-t}\ ,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=-1 \end{array}}$ $\quad u=\frac{1}{2}\big[(x+2t)^2+(x-2t)^2\big]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}ds+\frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-2[t-\tau]}^{x+2[t-\tau]}e^{-\tau}\,ds\,d\tau$
$= x^2+4t^2+e^{-t}-1$.

Una solución particular que sólo depende de t es: $v_{tt}=e^{-t}\ \to\ v=e^{-t}$. Con $w=u-e^{-t}$ se tiene:

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=x^2-1,\ w_t(x,0)=0 \end{cases} \to\ w=\tfrac{1}{2}\big[(x+2t)^2-1+(x-2t)^2-1\big]=x^2+4t^2-1 \text{ , como antes.}$$

b) $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-4u_{xx}=4\ ,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{array}}$ **a]** Las características de esta ecuación de ondas son:

$$\begin{cases} \xi=x+2t \\ \eta=x-2t \end{cases} \to \begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{tt}=4u_{\xi\xi}-8u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta} \end{cases} ,\ \to\ \boxed{u_{\xi\eta}=-\tfrac{1}{4}} \quad \textbf{forma canónica}.$$

b] Para hallar la solución pedida podemos utilizar la fórmula de D'Alembert directamente:

$$u(x,t)=\tfrac{1}{4}\int_0^t\int_{x-2[t-\tau]}^{x+2[t-\tau]}4\,ds\,d\tau=\int_0^t 4[t-\tau]\,d\tau=\big[-2(t-\tau)^2\big]_0^t=\boxed{2t^2} .$$

O bien, por ser $v=2t^2$ solución de la EDP, con $w=u-v$ se convertirá la más fácil:

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=w_t(x,0)=0 \end{cases} \text{(casualidad que sea tan sencilla)} \to\ w=0\ \to\ u=w+v=2t^2 .$$

Mucho peor es calcularla a partir de la forma canónica de arriba. Resumiendo algo los cálculos:

$$u_\xi=-\tfrac{1}{4}\eta+p^*(\xi)\ ,\ u=-\tfrac{1}{4}\xi\eta+p(\xi)+q(\eta)=t^2-\tfrac{1}{4}x^2+p(x+2t)+q(x-2t)\ ,\ u_t=2t+2p'(x+2t)-2q'(x-2t)$$

$$\xrightarrow{d.i.} \begin{cases} u(x,0)=-x^2/4+p(x)+q(x)=0 \\ u_t(x,0)=2p'(x)-2q'(x)=0\to p(x)=q(x) \nearrow \end{cases} p(x)=q(x)=\tfrac{x^2}{8}\uparrow$$

[Lo que no tiene sentido es usar separación de variables, pues es en todo $\mathbf{R}$ y no hay condiciones de contorno].

c) $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=2x\ ,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{array}}$ Las características de la ecuación de ondas son:

$$\begin{cases} \xi=x+t \\ \eta=x-t \end{cases} ,\ \begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{tt}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \end{cases} ,\ -4u_{\xi\eta}=2x \xrightarrow{\xi+\eta=2x} \boxed{u_{\xi\eta}=-\tfrac{1}{4}(\xi+\eta)}.$$

Para hallar la solución podemos utilizar D'Alembert directamente:

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2}\int_0^t\int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]}2s\,ds\,d\tau=\int_0^t\big[s^2\big]_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]}d\tau=\int_0^t 2x[t-\tau]\,d\tau=x\big[-(t-\tau)^2\big]_0^t=\boxed{xt^2} .$$

O, por ser $v=-\frac{1}{3}x^3$ solución de la EDP, con $w=u-v$ se convertirá en una homogéna más fácil:

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=x^3/3,\ w_t(x,0)=0 \end{cases} \to\ w=\tfrac{1}{6}\big[(x+t)^3+(x-t)^3\big]=\tfrac{1}{3}x^3+xt^2\ ,\ u=w+v=xt^2 .$$

Mucho peor es calcularla a partir de la forma canónica de arriba. Resumiendo algo los cálculos:

$$u_\xi=-\tfrac{1}{4}\xi\eta-\tfrac{1}{8}\eta^2+p(\xi)\ ,\ u=-\tfrac{1}{8}\xi\eta(\xi+\eta)+p(\xi)+q(\eta)=\tfrac{1}{4}(xt^2-x^3)+p(x+t)+q(x-t)\ ,$$

$$u_t=-\tfrac{xt}{2}+p'(x+t)-q'(x-t) \xrightarrow{d.i.} \begin{cases} u(x,0)=-x^3/4+p(x)+q(x)=0 \\ u_t(x,0)=p'(x)-q'(x)=0\to p(x)=q(x) \nearrow \end{cases} p(x)=q(x)=\tfrac{x^3}{8}\uparrow$$

[Lo que no tiene sentido es usar separación de variables, pues es en todo $\mathbf{R}$ y no hay condiciones de contorno].

18. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-4u_{xx}=0\ ,\ x\in[0,\pi]\ ,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}3x \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array}}$ **a]** $u(x,t)=X(x)T(t)\ ,\ \frac{X''}{X}=\frac{T''}{4T}=-\lambda\ \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$
$\to \lambda_n=n^2\ ,\ n=1,2,\dots\ ,\ X_n=\{\operatorname{sen}nx\}$.

Y además $\begin{cases} T''+4\lambda T=0 \\ T(0)=0 \end{cases}$, $\mu^2+4n^2=0\ \to\ T=c_1\cos 2nt+c_2\operatorname{sen}2nt \xrightarrow{d.i.} c_1=0\ ,\ T_n=\{\operatorname{sen}2nt\}$.

Satisface la EDP, $u(x,0)=0$ y las condiciones de contorno la serie: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}2nt\operatorname{sen}nx$.

El dato inicial que falta nos da: $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}2nc_n\operatorname{sen}nx=\operatorname{sen}3x\ \to\ 6c_3=1$ y el resto de los $c_n=0$.

La solución es por tanto: $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{6}\operatorname{sen}6t\operatorname{sen}3x}$ (fácil de comprobar).

b] Como $g(x)=\operatorname{sen}3x$ es impar y de periodo 2π , su extensión $g^*(x)$ es ella misma. Y D'Alembert nos da:

$$u=\tfrac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}g^*(s)\,ds=\tfrac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\operatorname{sen}3s\,ds=-\tfrac{1}{12}\cos 3s\Big]_{x-2t}^{x+2t}=\tfrac{1}{12}\big[\underbrace{\cos(3x-6t)}_{cc+ss}-\underbrace{\cos(3x+6t)}_{cc-ss}\big]=\tfrac{1}{6}\operatorname{sen}6t\operatorname{sen}3x .$$

19. a] $\boxed{y''+y=2}$ $\mu^2+1=0$, $\mu=\pm i$, $y_p=2 \;\to\; y=c_1\cos x+c_2\,\text{sen}\,x+2$.

Imponiendo los datos: $\begin{cases} c_1+2=0 \\ c_2=0 \end{cases}$, se obtiene la solución única del problema: $\boxed{y=2-2\cos x}$.

b] $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=2\,\text{sen}\,x\,,\; x\in[0,\pi],\; t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{array}}$. Al ser un problema no homogéneo, debemos probar una serie con la autofunciones X_n del homogéneo.

Sabemos que al separar variables aparece $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to\; X_n=\{\text{sen}\,nx\}$, $n=1,2,\dots$

Llevamos, pues, a la ecuación $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,\text{sen}\,nx$, obteniendo $\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''+n^2T_n\right]\text{sen}\,nx=2\,\text{sen}\,x$.

Los datos iniciales: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\,\text{sen}\,nx=0$, $u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\,\text{sen}\,nx=0 \;\Rightarrow\; T_n(0)=T_n'(0)=0\;\forall n$.

Todas las ecuaciones son homogéneas con datos nulos (y su solución es $T_n\equiv 0$) excepto $\begin{cases} T_1''+T_1=2 \\ T_1(0)=T_1'(0)=0 \end{cases}$,

que es lo resuelto (con otros nombres) en **a]**. La solución es, entonces: $\boxed{u(x,t)=2(1-\cos t)\,\text{sen}\,x}$.

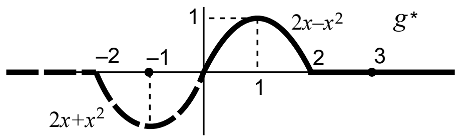
[Se podría usar D'Alembert. Como $2\,\text{sen}\,x$ es impar y 2π-periódica, su extensión es ella misma, y entonces:

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} 2\,\text{sen}\,s\,ds\,d\tau=\int_0^t\left[\cos(x-t+\tau)-\cos(x+t-\tau)\right]d\tau$$
$$=\left[\text{sen}(x-t+\tau)+\text{sen}(x+t-\tau)\right]_0^t=2\,\text{sen}\,x-2\,\text{sen}\,x\cos t\,].$$

20. $\boxed{\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\; x\ge 0\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=\begin{cases} 2x-x^2\,,\; x\in[0,2] \\ 0\,,\; x\in[2,\infty) \end{cases} \\ u(0,t)=0 \end{cases}}$ La solución es: $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g^*(s)\,ds$, siendo g^* la extensión impar de g respecto del origen a todo **R**.

En $[-2,0]$ la expresión de g^* será: $-\left[2(-x)-(-x)^2\right]$.

Por tanto la expresión de g^* es: $g^*(x)=\begin{cases} 2x+x^2 & \text{si } x\in[-2{,}0] \\ 2x-x^2 & \text{si } x\in[0{,}2] \\ 0 & \text{en el resto de } \mathbf{R} \end{cases}$.



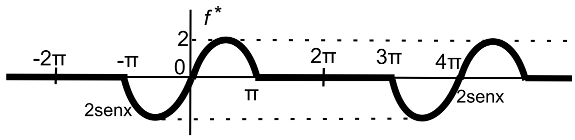
Entonces: i) $u(5,2)=\frac{1}{2}\int_3^7 g^*=\frac{1}{2}\int_3^7 0\,ds=\boxed{0}$.

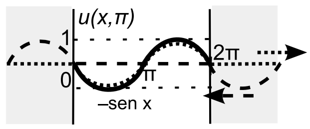
ii) $u(3,2)=\frac{1}{2}\int_1^5 g^*=\frac{1}{2}\int_1^2(2s-s^2)\,ds=\frac{1}{2}\left[s^2-\frac{s^3}{3}\right]_1^2=\boxed{\frac{1}{3}}$ -

iii) $u(1,2)=\frac{1}{2}\int_{-1}^3 g^*=\frac{1}{2}\int_{-1}^0(2s+s^2)\,ds+\frac{1}{2}\int_0^2(2s-s^2)\,ds \underset{g^*\text{ impar}}{=} \frac{1}{2}\int_1^2(2s-s^2)\,ds=\boxed{\frac{1}{3}}$.

21. $\boxed{\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\; x\in[0,2\pi]\,,\; t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x\,,\; x\in[0,\pi] \\ 0\,,\; x\in[\pi,2\pi] \end{cases},\; u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2\pi,t)=0 \end{cases}}$ La solución es $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x+t)+f^*(x-t)\right]$, con f^* extensión impar y 4π-periódica de la f inicial. Para dibujar $u(x,\pi)$ basta trasladar $\frac{1}{2}f(x)$ a la izquierda y a la derecha π unidades y sumar las gráficas en $[0,2\pi]$.

[Sólo queda lo que va a la derecha con la mitad de altura].





Como si $x\in[0{,}2\pi]$ siempre $x+\pi\in[\pi{,}3\pi]$, $x-\pi\in[-\pi{,}\pi]$ y en todo este intervalo es $f^*(x)=2\,\text{sen}\,x$ ($\text{sen}\,x$ impar):

$$u(x,\pi)=\tfrac{1}{2}\left[f^*(x+\pi)+f^*(x-\pi)\right]=\tfrac{1}{2}\left[0+2\,\text{sen}(x-\pi)\right]=\boxed{-\text{sen}\,x}\quad \forall x\in[0,2\pi].$$

$$u=XT \;\to\; \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(2\pi)=0 \end{cases} \to\; \lambda_n=\tfrac{n^2}{4},\; X_n=\left\{\text{sen}\,\tfrac{nx}{2}\right\}, n=1,2,\dots \text{ y } \begin{cases} T''+\lambda T=0 \\ T'(0)=0 \end{cases} \to\; T_n=\left\{\cos\tfrac{nt}{2}\right\}.$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\tfrac{nt}{2}\,\text{sen}\,\tfrac{nx}{2} \;\to\; u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\text{sen}\,\tfrac{nx}{2}=\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x\,,\; x\in[0,\pi] \\ 0\,,\; x\in[\pi,2\pi] \end{cases} \to$$

$$c_n=\tfrac{2}{2\pi}\int_0^\pi 2\,\text{sen}\,x\,\text{sen}\,\tfrac{nx}{2}\,dx=\tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\cos\left(\tfrac{n}{2}-1\right)x-\cos\left(\tfrac{n}{2}+1\right)x\right]dx \underset{n\neq 2}{=} \tfrac{1}{\pi}\left[\frac{\text{sen}(\frac{n}{2}-1)\pi}{\frac{n}{2}-1}-\frac{\text{sen}(\frac{n}{2}+1)\pi}{\frac{n}{2}+1}\right]$$

$$=\tfrac{2}{\pi}\left[-\frac{\text{sen}\frac{n\pi}{2}}{n-2}+\frac{\text{sen}\frac{n\pi}{2}}{n+2}\right]=-\frac{8\,\text{sen}\frac{n\pi}{2}}{\pi(n^2-4)}=\begin{cases} 0\,,\; n=2m \\ \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^2-4}\,,\; n=2m-1 \end{cases}. \text{ Además } c_2=\tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi[1-\cos 2x]\,dx=1.$$

$$\boxed{u(x,t)=\cos t\;\text{sen}\,x+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^2-4}\cos\frac{(2m-1)t}{2}\,\text{sen}\,\frac{(2m-1)x}{2}}$$
$\to\; u(x,\pi)=-\,\text{sen}\,x$, pues $\cos\pi=-1$, $\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}=0$.

22. $\begin{cases} u_{tt}+4u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}2x\,,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$ Como la ecuación es nueva empezamos separando variables:

$u=XT \to X[T''+4T']-X''T=0 \to \frac{T''+4T'}{t}=\frac{X''}{X}=-\lambda \to$

$\begin{cases} x''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \to \lambda_n=n^2,\ X_n=\{\operatorname{sen}nx\}\,,\ n=1,2,\ldots \to T''+4T'+n^2T=0\,,\ \mu=-2\pm\sqrt{4-n^2} \to$

$$T_1=c_1\,e^{(-2+\sqrt{3})\,t}+c_2\,e^{(-2-\sqrt{3})\,t}\,,\ \ T_2=(c_1+c_2t)\,e^{-2t}\,,\ \ T_{n\geq 3}=e^{-2t}\big(c_1\cos\sqrt{4-n^2}\,t+c_2\operatorname{sen}\sqrt{4-n^2}\,t\big)\,.$$

Probamos, pues, $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\operatorname{sen}nx$. Sólo faltan las condiciones iniciales:

$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\operatorname{sen}nx=\operatorname{sen}2x\,,\ \ u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\operatorname{sen}nx=0 \to T_n(t)\equiv 0\,,$ si $n\neq 2$ [ecuación homogénea con datos nulos]

Sólo es no nula T_2 : $\begin{matrix} T_2(0)=c_1=1 \\ T_2'(0)=c_2-2c_1=0 \end{matrix} \to u(x,t)=(1+2t)\,e^{-2t}\operatorname{sen}2x$. [Tiende a pararse la cuerda con rozamiento].

23. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$ $u=X(x)\,T(t)\,,\ \frac{X''}{X}=\frac{T''}{T}=-\lambda \to \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$

$\to \lambda_n=n^2\,,\ n=0,1,\ldots\,,\ X_n=\{\cos nx\}$ $\big[$con $X_0=\{1\}\big]$.

Y además $\begin{cases} T''+\lambda T=0 \\ T(0)=0 \end{cases}$, $\mu^2+n^2=0 \to$ $\begin{matrix} T=c_1+c_2t \to T_0=\{t\} \\ T=c_1\cos nt+c_2\operatorname{sen}nt \to T_n=\{\operatorname{sen}nt\}\,,\ n\geq 1 \end{matrix}$

Satisface la EDP, $u(x,0)=0$ y las condiciones de contorno la serie: $u(x,t)=\frac{c_0}{2}t+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}nt\cos nx$.

El dato inicial que falta nos da: $u_t(x,0)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\cos nx=x \to c_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$, y para $n\geq 1$:

$$c_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2x}{n^2\pi}\operatorname{sen}nx\Big]_0^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}nx\,dx=\frac{2}{n^3\pi}\big[(-1)^n-1\big]$$ (se anula si n par).

La solución es por tanto:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{\pi}{2}t-\frac{4}{\pi}\Big[\operatorname{sen}t\cos x+\frac{1}{27}\operatorname{sen}3t\cos 3x+\cdots\Big]}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\operatorname{sen}(2n-1)t\cos(2n-1)x\,.$$

[Esas condiciones de contorno significan que se da libertad a los extremos de la cuerda, y como esta está subiendo inicialmente, la altura de la cuerda lo hace indefinidamente].

24. a) $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi) \\ u(\pi,y)=5+\cos y \\ u(0,y)=u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \end{cases}$ $\begin{matrix} Y''+\lambda Y=0\,,\ Y'(0)=Y'(\pi)=0 \to \lambda_n=n^2\,,\ Y_n=\{\cos ny\}\,,\ n=0,1,\ldots \\ X''-n^2X=0\,,\ X(0)=0 \to X_0=\{x\} \text{ y } X_n=\{\operatorname{sh}nx\} \text{ si } n>0\,. \end{matrix} \to$

$u=c_0x+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sh}nx\cos ny \to u(x,\pi)=c_0\pi+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sh}n\pi\cos ny=5+\cos y \to \boxed{u(x,y)=\frac{5x}{\pi}+\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}\pi}\cos y}$.

b) $\begin{cases} \Delta u=y\cos x,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,1) \\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=u_y(x,0)=u_y(x,1)=0 \end{cases}$ $u=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(y)\cos nx \to \sum_{n=0}^{\infty}\big[Y_n''-n^2Y_n\big]\cos nx=y\cos x \to$

$\begin{matrix} Y_1''-Y_1=y \\ Y_1'(0)=Y_1'(1)=0 \end{matrix} \to Y_1=c_1e^y+c_2e^{-y}-y \xrightarrow{c.c.} Y_1=\frac{e^y-e^{1-y}}{1+e}-y$. Los $Y_n\equiv 0$ para $n\geq 2$.

Como es de Neumann aparece (al resolver $Y_0''=0+$c.c.) una C arbitraria: $\boxed{u=C+\Big[\frac{e^y-e^{1-y}}{1+e}-y\Big]\cos x}$.

c) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+6u_x=0 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u_y(x,0)=0\,,\ u_y(x,\pi)=0 \\ u_x(0,y)=0\,,\ u(\pi,y)=2\cos^2 2y \end{cases}$ $u=XY \to \frac{X''+6X'}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda \to \begin{cases} Y''+\lambda Y=0\,,\ Y'(0)=Y'(\pi)=0 \\ X''+6X'-\lambda X=0\,,\ X'(0)=0 \end{cases}$

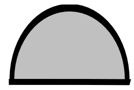
$\to \lambda_n=n^2\,,\ Y_n=\{\cos ny\}\ n=0,1,\ldots \to X''+6X'-n^2X=0\,,\ X=c_1e^{(\sqrt{9+n^2}-3)x}+c_2e^{-(\sqrt{9+n^2}+3)x} \xrightarrow[X'(0)=0]{}$

$$X_0=\{1\}\ ;\ \ X_n=\Big\{\big(\sqrt{9+n^2}+3\big)e^{(\sqrt{9+n^2}-3)x}+\big(\sqrt{9+n^2}-3\big)e^{-(\sqrt{9+n^2}+3)x}\Big\}\,,\ n\geq 1\,.$$

$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nX_n(x)\cos ny \to u(\pi,y)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nX_n(\pi)\cos ny=1+\cos 4y \to$

$$c_0=1\,,\ c_4=\frac{1}{x_4(\pi)} \text{ y los demás cero} \to \boxed{u=1+\frac{4e^{2x}+e^{-8x}}{4e^{2\pi}+e^{-8\pi}}\cos 4y}\,.$$

25. a) $\boxed{\begin{array}{l} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<2\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(2,\theta)=\operatorname{sen}3\theta\,,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{array}}$ $\quad u=R\Theta \ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=n^2\,,\ \{\operatorname{sen}n\theta\}\,,\ n=1,2,...$



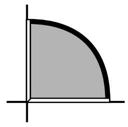
$r^2R''+rR'-\lambda R=0 \ \xrightarrow{\lambda=n^2}\ \mu=\pm n\,,\ R=c_1r^2+c_2r^{-n} \ \xrightarrow{R \text{ acotado en } r=0}\ R_n=\{r^n\}\,,\ n=1,2,\dots.$

Probamos, pues, $u=\sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \operatorname{sen}n\theta$, y para calcular los b_n imponemos el dato que falta:

$u_r(2,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}b_n\operatorname{sen}n\theta=\operatorname{sen}3\theta \ \to\ 12b_3=1$ y el resto 0. $\boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{12}r^3\operatorname{sen}3\theta}$.

Comprobando: $u_r=\frac{1}{4}r^2\operatorname{sen}3\theta\,,\ u_{rr}=\frac{1}{2}r\operatorname{sen}3\theta\,,\ u_{\theta\theta}=-\frac{3}{4}r^2\operatorname{sen}3\theta \ \to\ \Delta u=r\operatorname{sen}3\theta\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right]=0\,,$
$u_r(2,\theta)=\frac{4}{4}\operatorname{sen}3\theta$, y es claro que se cumplen las condiciones de contorno.

b) $\boxed{\begin{array}{l} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(1,\theta)=\cos2\theta\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}}$ $\ \xrightarrow{u=R\Theta}\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases},\quad \lambda_n=4n^2,\ \Theta_n=\{\cos2n\theta\}$
$n=0,1,2,\dots$

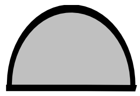


Y además $r^2R''+rR'-\lambda R=0\,,\ \mu=\pm2n\,,\ R$ acotado $\to R_n=\{r^{2n}\}$. $u=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}\cos2n\theta$

$\to\ u(1,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos2n\theta=\cos2\theta \ \to\ a_{2n}=0\ \forall n$, menos $a_2=1$. $\boxed{u=r^2\cos2\theta}$ $\left[=x^2-y^2\right]$.

Comprobando: $u_r=2r\cos2\theta\,,\ u_{rr}=2\cos2\theta\,,\ u_{\theta\theta}=-4r^2\cos2\theta \ \to\ \Delta u=\left[2+2-4\right]\cos2\theta=0\,,$
$u(1,\theta)=\cos2\theta\,,\ \ u_\theta=-2r^2\operatorname{sen}2\theta$ se anula si $\theta=0$ y si $\theta=\frac{\pi}{2}$.

26. $\boxed{\begin{array}{l} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 \end{array}}$ Haciendo $u=R\Theta$ el formulario dice que sale:
$\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta(\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=n^2,\ \Theta_n=\{\operatorname{sen}n\theta\}\,,\ n=1,2,...$



[pues $u(r,0)=R(r)\Theta(0)=0\,,\ u(r,\pi)=R(r)\Theta(\pi)=0$ y de $R(r)\equiv0$ solo sale la solución cero],

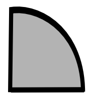
y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0 \ \xrightarrow{\lambda=n^2}\ R=c_2r^n+c_2r^{-n}$. R debe ser **acotada** en $r=0 \ \to\ R_n=\{r^n\}$.

Probamos, pues, $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nr^n\operatorname{sen}n\theta$, y para calcular los c_n imponemos el dato que falta:

$u_r(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n\operatorname{sen}n\theta=\frac{\theta}{2} \ \to\ nc_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}n\theta\,d\theta=-\frac{\theta}{n\pi}\cos n\theta\Big]_0^\pi+\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\cos n\theta\,d\theta=-\frac{\cos n\pi}{n}+0=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$

La solución es, por tanto: $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}r^n\operatorname{sen}n\theta=\boxed{r\operatorname{sen}\theta-\frac{1}{4}r^2\operatorname{sen}2\theta+\cdots}$.

27. $\boxed{\begin{array}{l} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u(2,\theta)=\pi,\ u(r,0)=u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}}$ El formulario nos da las ecuaciones que aparecen separando variables en la EDP:



$u=R\Theta \ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=(2n-1)^2\,,\ \{\operatorname{sen}(2n-1)\theta\}\,,\ n=1,2,...$

$r^2R''+rR'-\lambda R=0 \ \to\ \mu^2=(2n-1)^2\,,\ R=c_1r^{2n-1}+c_2r^{1-2n}$. Como R debe ser acotada: $R_n=\{r^{2n-1}\}$.

Probamos entonces $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\theta$. Sólo nos falta aplicar el último dato de contorno:

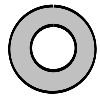
$u(2,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n2^{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\theta=\pi$. Por tanto debe ser:

$c_n2^{2n-1}=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\pi\operatorname{sen}(2n-1)\theta\,d\theta=\left[-\frac{4}{2n-1}\cos(2n-1)\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{4}{2n-1}$ (esos cosenos se anulan en $\frac{\pi}{2}$).

Los 2 primeros coeficientes son: $2c_1=4\,,\ c_1=2$ y $8c_2=\frac{4}{3}\,,\ c_1=\frac{1}{6}$.

Y los 2 primeros de la serie solución son: $\boxed{u(r,\theta)=2r\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{6}r^3\operatorname{sen}3\theta+\cdots}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n-1}}{(2n-1)\,2^{2n-3}}\operatorname{sen}(2n-1)\theta.$

28. a) $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u=0\,,\ 1<r<2\\ u(1,\theta)=0\,,\ u(2,\theta)=1+\text{sen}\,\theta\end{array}}$ Sabemos: $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta\ \ 2\pi\text{-per.}\end{cases}\to\ \lambda_n=n^2\,,\ \Theta_n=\{\cos n\theta\,,\text{sen}\,n\theta\}\ \to$ $n=0,1,2,\dots$



$$r^2R''+rR'-n^2R=0\to\begin{array}{l}R_0=c_1+c_2\ln r\overset{R(1)=0}{\longrightarrow}R_0=\{\ln r\}\\ R_n=c_1r^n+c_2r^{-n}\longrightarrow R_n=\{r^n-r^{-n}\}\end{array}\to\ u=a_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\big(r^n-r^{-n}\big)[a_n\cos n\theta+b_n\,\text{sen}\,n\theta]$$

$$u(2,\theta)=a_0\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\big(2^n-\tfrac{1}{2^n}\big)[a_n\cos n\theta+b_n\,\text{sen}\,n\theta]=1+\text{sen}\,\theta\to a_0=\tfrac{1}{\ln 2}\,,\ b_1=\tfrac{2}{3}\,,\ \text{resto }0\,.\ \boxed{u=\tfrac{\ln r}{\ln 2}+\tfrac{2}{3}\big(r-\tfrac{1}{r}\big)\,\text{sen}\,\theta}\,.$$

b) $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u=\cos\theta\,,\ r<2\\ u(2,\theta)=\text{sen}\,2\theta\end{array}}$ $u=a_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\,\text{sen}\,n\theta]\ \to$

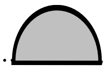
$$\frac{ra_0''+a_0'}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{r^2a_n''+ra_n'-n^2a_n}{r^2}\cos n\theta+\frac{r^2b_n''+rb_n'-n^2b_n}{r^2}\,\text{sen}\,n\theta\Big]=\cos\theta\,.$$

Del dato de contorno: $a_n(2)=0$; $b_n(2)=0\,,\ n\neq 2$; $b_2(2)=1$ y todas acotadas $\Rightarrow\ a_{n\neq1},b_{n\neq2}\equiv 0$ (hay unicidad).

Y además: $\begin{cases}r^2a_1''+ra_1'-a_1=r^2\\ \text{acotada y }\ a_1(2)=0\end{cases}\underset{2A+2A-A=1}{\overset{a_{1p}=Ar^2}{\longrightarrow}}\ a_1=c_1r+c_2r^{-1}+\frac{r^2}{3}\ \to\ \begin{array}{c}c_2=0\\ 2c_1+\frac{4}{3}=0\end{array}\to\ a_1(r)=\frac{r^2}{3}-\frac{2r}{3}\,;$

$\begin{cases}r^2b_2''+rb_2'-4b_2=0\\ \text{acotada y }\ b_2(2)=1\end{cases}\to\ b_2=c_1r^2+c_2r^{-2}\ \to\ \begin{array}{c}c_2=0\\ 4c_1=1\end{array}\ \to\ b_2(r)=\frac{r^2}{4}\ \to\ \boxed{u(r,\theta)=\tfrac{1}{3}r(r-2)\cos\theta+\tfrac{1}{4}r^2\,\text{sen}\,2\theta}\,.$

c) $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u=0\,,\ r<4\,,\ 0<\theta<\pi\\ u(4,\theta)=2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0\end{array}}$ $\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}\,,\ \Theta_n=\Big\{\text{sen}\,\frac{(2n-1)\theta}{2}\Big\}\,,\ n=1,\dots$



$$r^2R''+rR'-\lambda R=0\overset{\lambda=\lambda_n}{\longrightarrow}\ \mu=\pm\frac{(2n-1)}{2}\,,\ R=c_1r^{(2n-1)/2}+c_2r^{-(2n-1)/2}\overset{R\text{ acotado en }r=0}{\longrightarrow}R_n=\big\{r^{(2n-1)/2}\big\}\,,\ n=1,2,\dots.$$

Probamos, pues, $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{(2n-1)/2}\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)\theta}{2}$, y para calcular los c_n imponemos el dato que falta:

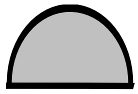
$$u(4,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}4^{(2n-1)/2}c_n\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)\theta}{2}=2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\ \to\ 4^{1/2}c_1=2\,,\ c_1=1\ \text{ y el resto }0\,.\ \boxed{u(r,\theta)=r^{1/2}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}\,.$$

29. a] $\boxed{r^2R''+rR'-\frac{1}{4}R=7r^3}$ Euler. $\mu(\mu-1)+\mu-\frac{1}{4}=0\ \to\ \mu=\pm\frac{1}{2}\,,\ R=c_1r^{1/2}+c_2r^{-1/2}+R_p\,.$

Con la **fvc**: $\begin{vmatrix}r^{1/2} & r^{-1/2}\\ r^{-1/2}/2 & -r^{-3/2}/2\end{vmatrix}=-\frac{1}{r}\,,\ R_p=-r^{-1/2}\int\frac{r^{1/2}\cdot 7r}{1/r}+r^{1/2}\int\frac{r^{-1/2}\cdot 7r}{1/r}=-2r^3+\frac{14}{5}r^3\,.\ \boxed{R=c_1r^{1/2}+c_2r^{-1/2}+\tfrac{4}{5}r^3}\,.$

O mejor, $R_p=Ar^3$ $\big(R_p=Ae^{3s}$ en la de coeficientes constantes$\big)\to\ 6A+3A-\frac{A}{4}=7\,,\ A=\frac{4}{5}\ \nearrow$

b] $\boxed{\begin{array}{l}u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=7r\cos\frac{\theta}{2}\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi\\ u(1,\theta)=u_\theta(r,0)=u(r,\pi)=0\end{array}}$ $u=R\Theta\ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta(\pi)=0\end{cases}\to$ $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4},\ \Theta_n=\Big\{\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}\Big\},\ n=1,2,\dots$



Llevando $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}$, a la EDP queda: $\sum_{n=1}^{\infty}\Big[R_n''+\frac{1}{r}R_n'-\frac{(2n-1)^2}{4r^2}R_n\Big]\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}=7r\cos\frac{\theta}{2}$.
(ya desarrollada)

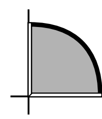
Del dato otro de contorno $u(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(1)\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}=0$ deducimos que $R_n(1)=0\ \forall n$.

Y además las soluciones han de estar acotadas en $r=0$. Sólo será no nula la R_1, solución de:

$\begin{cases}r^2R_1''+rR_1'-\frac{1}{4}R_1=7r^3\\ R_1\text{ acotada, }R_1(1)=0\end{cases}\underset{\mathbf{a}],\,ac.}{\longrightarrow}\ R_1=c_1r^{1/2}+\frac{4}{5}r^3\overset{R_1(1)=0}{\longrightarrow}\ c_1=-\frac{4}{5}\,.$ La solución es: $\boxed{u(r,\theta)=\tfrac{4}{5}\big[r^3-r^{1/2}\big]\cos\tfrac{\theta}{2}}$.

30. $\boxed{\begin{cases}\Delta u=0\,,\ r<2\,,\ \theta\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\\ u_r(2,\theta)+ku(2,\theta)=8\cos 2\theta\\ u_\theta(r,0)=u_\theta\big(r,\frac{\pi}{2}\big)=0\end{cases}}$ $u=R\Theta\ \to\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta'(0)=\Theta'\big(\frac{\pi}{2}\big)=0\end{cases},\ \lambda_n=4n^2\,,\ \Theta_n=\{\cos 2n\theta\}\,,\ n=0,1,2,\dots$

Y además: $r^2R''+rR'-\lambda R=0\,,\ R$ acotado $\to\ R_n=\{r^{2n}\}$.



Imponiendo a $u=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\,r^{2n}\cos 2n\theta$ el último dato: $k\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\big[2n2^{2n-1}+k2^{2n}\big]\cos 2n\theta=8\cos 2\theta\,.$

i) Si $k=1$, todos los $a_{2n}=0$, excepto $a_2[4+4]=8$, y la solución (única) es: $\boxed{u=r^2\cos 2\theta}$.

ii) Si $k=0$ (Neumann), a_0 queda libre, $a_2[4+0]=8$, y demás $a_{2n}=0$. Infinitas soluciones: $\boxed{u=C+2r^2\cos 2\theta}$.