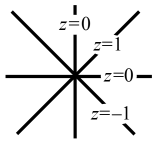
Soluciones del control t12 de Cálculo C (24 de febrero de 2025)

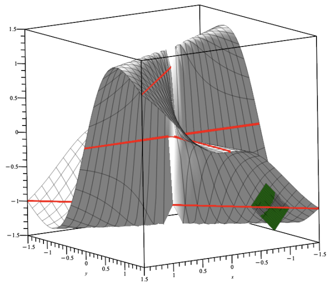
1. Sea $f(x,y)=\frac{4x^3y}{(y^2+x^2)^2}$, $f(0,0)=0$. **a]** Precisar si es continua, si existen f_x , f_y y si es diferenciable en $(0,0)$.
b] Calcular, trabajando en cartesianas y en polares, $\nabla f(-1,1)$.
c] Escribir la ecuación del plano tangente en el punto $(-1,1)$.
[.6+.6+.3 =1.5 ptos]

a] $f(x,mx)=\frac{4m}{(m^2+1)^2}$, distinto sobre cada recta $\Rightarrow$ **discontinua**.

$f(x,0)=0\ \forall x \Rightarrow \boxed{f_x(0,0)=0}$. $f(0,y)=0\ \forall y \Rightarrow \boxed{f_y(0,0)=0}$.

Por no ser f continua, f **no es diferenciable** en $(0,0)$.





b] $\nabla f=\left(\frac{12x^2y}{(y^2+x^2)^2}-\frac{16x^4y}{(y^2+x^2)^3},\frac{4x^3}{(y^2+x^2)^2}-\frac{16x^3y^2}{(y^2+x^2)^3}\right)=\frac{4x^2(3y^2-x^2)}{(y^2+x^2)^3}(y,-x)\xrightarrow{(-1,1)}\boxed{(1,1)}$.

En polares es $f(r,\theta)=4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$ (otra prueba de la discontinuidad).

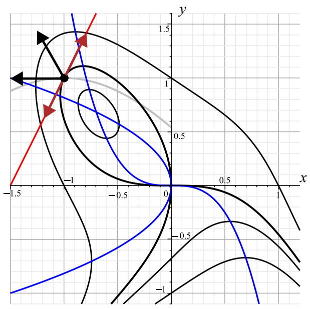
$$\nabla f=\tfrac{1}{r}f_\theta\,\bar{e}_\theta=\frac{4(c^4-3c^2s^2)}{r}(-s,c)\underset{r=\sqrt{2},\ \theta=3\pi/4,\ s=-c=1/\sqrt{2}}{\uparrow}=\frac{-2}{\sqrt{2}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=(1,1)\ .$$

c] El plano tangente será entonces: $z=-1+1(x+1)+1(y-1)$, $\boxed{z=x+y-1}$.

2. Sean $F(x,y)=y^3+2xy+x^4$, la curva C dada por $F=0$ y el punto $\bar{p}=(-1,1)\in C$. **a]** Calcular dos $\bar{u}$ unitarios tales que $D_{\bar{u}}F(\bar{p})$ sea: i) 0 , ii) 2 . **b]** Hallar ΔF y el desarrollo de Taylor de orden 2 de F en torno a $(-1,1)$.
Elegir entre **c]** y **d]**: **c]** Si $\bar{c}(t)=(t-1,\cos t)$ y $h(t)=F(\bar{c}(t))$, calcular $h'(0)$ con la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$.
d] Probar que el teorema de la función implícita asegura que $F=0$ define cerca de $\bar{p}$ una $y(x)$ de C^1 y hallar $y'(-1)$ derivando implícitamente. Hallar la recta tangente a C en el punto $\bar{p}$. [.7+.4+.4 1.5 ptos]

$\nabla F=(2y+4x^3,3y^2+2x)$. $\nabla F(-1,1)=(-2,1)$. $D_{(a,b)}F(\bar{p})=b-2a$.

dibujo con Maple $\to$



a] Será $D_{\bar{u}}=0$ en dirección perpendicular: $\boxed{\bar{u}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$.

Con $D_{\bar{u}}=2$ hay uno obvio: $\boxed{\bar{u}=(-1,0)}$, pero el otro exige cálculos:

$\begin{cases} b=2a+2 \searrow \\ a^2+b^2=1 \quad 5a^2+8a+3=0,\ a=-1^{\uparrow} \text{ o } a=-3/5 \nearrow \end{cases}$ $\boxed{\bar{u}=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)}$.

b] $\Delta F=F_{xx}+F_{yy}=\boxed{12x^2+6y}$. $F_{xy}=2$, $F(-1,1)=0$. Taylor:

$F(x,y)=-2(x+1)+(y-1)+6(x+1)^2+2(x+1)(y-1)+3(y-1)^2+\cdots$ [O escribiendo $[(y-1)+1]^3$, $[(x+1)-1]^4$, ...].

[Deben aparecer los $\cdots$ o escribir $\approx$. Y no se deben desarrollar los paréntesis, pues aproximamos cerca de $(-1,1)$].

c] $\bar{c}(0)=(-1,1)$, $\bar{c}'(t)=(1,-\mathrm{sen}\,t)\xrightarrow{t=0}(1,0)$, $h'(0)=\nabla F(\bar{c}(0))\cdot\bar{c}'(0)=\boxed{-2}$.

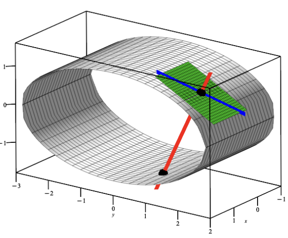
d] $F(-1,1)=0$, $F_y(-1,1)=1\neq 0$, $F\in C^\infty \Rightarrow$ existe $y(x)$. $3y^2y'+2xy'+2y+4x^3=0$, $y'(-1)=-\frac{2y+4x^3}{3y^2+2x}\Big|_{\bar{p}}=\boxed{2}$.

La recta tangente: $y=1+2(x+1)=2x+3$. [O utilizando que es perpendicular a $\nabla F(-1,1)$].

3. Sean el campo $\bar{g}(x,y,z)=(xy^2,yz^2,z^3)$, el punto $\bar{a}=(1,2,1)$ y la recta R dada por $\bar{x}=(1+t,2-2t,1+t)$.
a] Calcular $\mathrm{div}\,\bar{g}$, $\nabla(\mathrm{div}\,\bar{g})$, $\mathrm{rot}\,\bar{g}$ y el determinante jacobiano $|D\bar{g}|$. **b]** Dibujar la superficie S dada por $\mathrm{div}\,\bar{g}=8$, hallar en $\bar{a}$ el plano tangente y la recta normal a S , y encontrar el punto en que esta recta vuelve a cortar a S .
c] Comprobar que la recta normal y la recta R se cortan perpendicularmente en $\bar{a}$. $\sqrt{2}\approx 1.41$ [.6+.9+.3 =1.8 ptos]

a] $\mathrm{div}\,\bar{g}=y^2+4z^2$. $\mathrm{rot}\,\bar{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ xy^2&yz^2&z^3\end{vmatrix}=(-2yz,0,-2xy)$. $|D\bar{g}|=\begin{vmatrix}y^2&2xy&0\\0&z^2&2yz\\0&0&3z^2\end{vmatrix}=3y^2z^4$.

$\nabla(\mathrm{div}\,\bar{g})=(0,2y,8z)$.

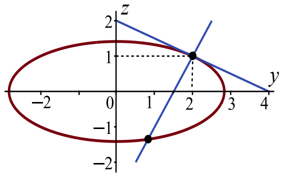


dibujo de S , recta normal recta R y plano tangente.

b] La gráfica de $y^2+4z^2=8$ es la elipse de semiejes $\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$, trasladada horizontalmente a largo del eje x .

Como el gradiente es $4(0,1,2)$ el plano tangente es

$(0,1,2)\cdot(x-1,y-2,z-1)=0 \longrightarrow \boxed{y+2z=4}$.



Y la recta normal será: $\bar{n}(s)=(1,2,1)+s(0,1,2)=\boxed{(1,2+s,1+2s)}$, que volverá a cortar S si:

$4+4s+s^2+4+16s+16s^2=8$, $s(17s+20)=0$. Sustituyendo $s=-\frac{20}{17}$: $\boxed{\left(1,\frac{14}{17},-\frac{23}{17}\right)}$ punto de corte.

c] Basta observar que $\bar{a}\in R$ y que esta recta está contenida en el plano tangente: $(2-2t)+2(1+t)=4$,
o comprobar que el producto escalar de sus vectores directores es nulo: $(1,-2,1)\cdot(0,1,2)=0$.