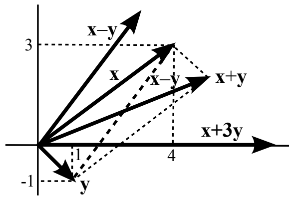
1. $\mathbf{x}=(4,3)$, $\mathbf{y}=(1,-1)$. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(5,2)$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}=(3,4)$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}=(7,0)$,
$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|=\sqrt{29}\leq 6\leq 5+\sqrt{2}=\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$. $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=5=$ distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.
$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|=1\leq 5\sqrt{2}=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}>0 \Rightarrow$ ángulo agudo. $\|\mathbf{x}+3\mathbf{y}\|=7$.
$\frac{(\mathbf{x}+3\mathbf{y})\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}+3\mathbf{y}\|\|\mathbf{y}\|}=\frac{7}{7\sqrt{2}}=\cos\phi \rightarrow \mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$ forman un ángulo $\frac{\pi}{4}$ (claro en dibujo).



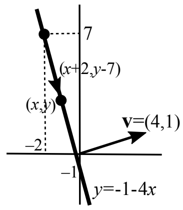
2. $\mathbf{x}=(2,0,-3)$, $\mathbf{y}=(0,1,3)$. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=-9$, $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&0&-3\\0&1&3\end{vmatrix}=(0+3)\,\mathbf{i}-(6-0)\,\mathbf{j}+(2-0)\,\mathbf{k}=(3,-6,2)=-\mathbf{y}\times\mathbf{x}$.

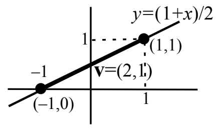
Un posible $\mathbf{u}$ es $\frac{\mathbf{x}\times\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|}=\left(\frac{3}{7},-\frac{6}{7},\frac{2}{7}\right)$. Otro obvio es $\mathbf{v}=(0,1,0)$. $\left[\text{Todos son de la forma } \frac{1}{\|\ \|}(3a,b,2a)\right]$.

3. $\boxed{\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{k},\ \mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{j},\ \mathbf{c}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}}$, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(2,3,1)\cdot(2,-1,1)=2$, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(1,0,1)\cdot(3,-1,-7)=-4$,
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=(1,0,1)\times(-1,4,-1)=(-4,0,4)$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(1,0,1)\times(3,-1,-7)=(1,10,-1)$,
$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(-3,1,3)\times(2,-1,1)=(4,9,1)$.

4. a) $(x+2,y-7)\cdot(4,1)=0 \rightarrow \boxed{y=-1-4x}$ (lo más corto).

b) $y=\frac{x+1}{2}$ de pendiente $\frac{1}{2}$ pasando por $\left(0,\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(t,\frac{t+1}{2}\right)$, $t\in(-1,1)$.
$(-1,0)+t(2,1)=(2t-1,t)$, $t\in(0,1)$ (recorrida en el mismo sentido).
$(1,1)+t(-2,-1)=(1-2t,1-t)$, $t\in(0,1)$ (en sentido opuesto).





5. a) $\mathbf{p}=(1,3,2)$, $\mathbf{q}=(4,-1,1)$, $\mathbf{r}=(3,0,2)$. $(\mathbf{q}-\mathbf{p})\times(\mathbf{r}-\mathbf{p})=(3,-4,-1)\times(2,-3,0)=(-3,-2,-1) \rightarrow$
Plano: $-3(x-1)-2(y-3)-(z-2)=0 \rightarrow \boxed{3x+2y+z=11}$. [O eliminando t y s de $\mathbf{x}=t(\mathbf{q}-\mathbf{p})+s(\mathbf{r}-\mathbf{p})+\mathbf{p}$].

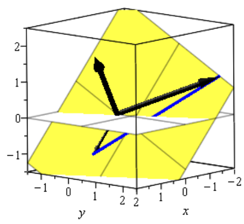
b) Perpendicular a la recta $(3,0,2)\,t+(3,-1,1) \Rightarrow (3,0,2)$ perpendicular al plano.
Como pasa por $(5,-1,0)$, nuestro plano es: $3(x-5)+0(y+1)+2(z-0)=0 \rightarrow \boxed{3x+2z=15}$.

c) El vector $(2,1,-3)$ es perpendicular a $2x+y-3z+4=0$ y $(-1,1,2)$ tiene la dirección de $(-1,1,2)\,t+(3,2,4)$.
El vector $(2,1,-3)\times(-1,1,2)=(5,-1,3)$ es pependicular a nuesto plano, que debe contener el punto $(3,2,4)$.
El plano pedido es $5(x-3)-(y-2)+3(z-4)=0 \rightarrow \boxed{5x-y+3z=25}$.

6. $\boxed{\mathbf{p}=(1,0,-1),\ \mathbf{q}=(-2,2,1)}$ a) $\mathbf{p}-\mathbf{q}=(3,-2,-2)$, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=-3$, $\mathbf{p}\times\mathbf{q}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&-1\\-2&2&1\end{vmatrix}=2\,\mathbf{i}+1\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}=(2,1,2)$,
$\underbrace{(\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=0}_{\text{perpendiculares}}$. $\|\mathbf{p}+\mathbf{q}\|=\|(-1,2,0)\|=\sqrt{5}\leq\sqrt{2}+3=\|\mathbf{p}\|+\|\mathbf{q}\|$, pues $\sqrt{5}<3$. $|\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}|=3\leq 3\sqrt{2}=\|\mathbf{q}\|\|\mathbf{p}\|$.
$\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|=\sqrt{17}=$ distancia de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$. $\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\phi \rightarrow \mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ forman un ángulo $\frac{3\pi}{4}$.

b) Plano que contiene a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$: $\mathbf{x}=t(1,0,-1)+s(-2,2,1)$, $\begin{cases}x=t-2s\\y=2s\\z=s-t\end{cases} \rightarrow \boxed{z=-x-\frac{y}{2}}$.
O como $\overline{p}\times\overline{q}$ es perpendicular a este plano: $(2,1,2)\cdot(x,y,z)=0$ $\nearrow$

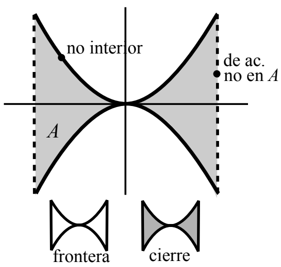
c) Podemos escoger $\mathbf{c}(t)=\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ y $\mathbf{d}(t)=\mathbf{q}+t(\mathbf{p}-\mathbf{q})$, con $t\in[0,1]$. Es decir:
$\mathbf{c}(t)=(1,0,-1)+t(-3,2,2)=(1-3t,2t,2t-1)$, $\mathbf{d}(t)=(-2,2,1)+t(3,-2,-2)=(3t-2,2-2t,1-2t)$.

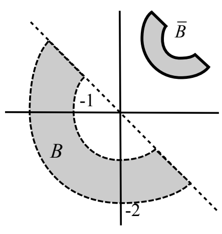


7. $A=\{(x,y):|x|<1,|y|\leq x^2\}$ ni abierto ni cerrado

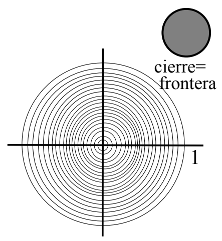
$B=\{\mathbf{x}:1<\|\mathbf{x}\|<2,\ \mathbf{x}\cdot(1,1)<0\}$ abierto, no cerrado

$C=\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|=q,\ q\in\mathbf{Q},\ q\leq 1\}$ ni abierto ni cerrado





puntos a distancia >1 y <2 del origen que forman con el vector $(1,1)$ ángulo obtuso.
Todos sus puntos son interiores. Los de ∂B son de acumulción y no son de B.



Ningún punto es interior y los de $\overline{C}=\{\|\mathbf{x}\|\leq 1\}$ son de ∂C y son de acumulación.

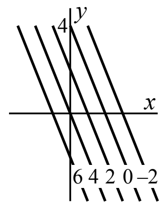
Los tres son acotados, pero ninguno es compacto, porque ninguno es cerrado.

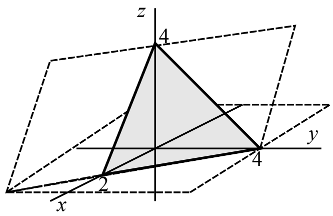
8. A,B **abiertos**, $\mathbf{p}\in A\cup B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathbf{p}\in A \;\Rightarrow\; \exists B_r(\mathbf{p})\subset A\subset A\cup B \\ \quad\text{ó}\qquad\qquad\qquad\;\;\text{ó} \\ \mathbf{p}\in B \;\Rightarrow\; \exists B_r(\mathbf{p})\subset B\subset A\cup B\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{p}$ interior a $A\cup B \Rightarrow A\cup B$ abierto.

$$\mathbf{p}\in A\cap B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathbf{p}\in A \;\Rightarrow\; \exists B_{r_1}(\mathbf{p})\subset A \\ \quad\text{y}\qquad\qquad\quad\;\;\text{y} \\ \mathbf{p}\in B \;\Rightarrow\; \exists B_{r_2}(\mathbf{p})\subset B\end{array}\right\}.\ \text{Si } r=\text{mín}\{r_1,r_2\} \Rightarrow B_r(\mathbf{p})\subset A\cap B \text{ y es abierto.}$$

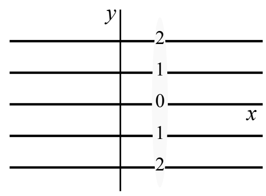
Si $\{A_n\}$ **abiertos**, se ve igual que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ es **abierto**. Pero falla la demostración para la $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$, pues el $\text{mín}\{r_1,r_2,\dots\}$ podría no existir. **La intersección de infinitos abiertos puede no serlo**. Por ejemplo, $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_{1/n}(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$ no lo es.

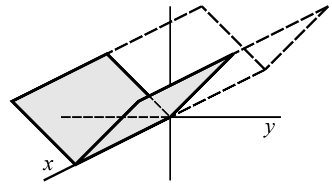
9. a) $\boxed{z=4-2x-y}$ $\quad x=0 \to z=4-y$, $\; y=0 \to z=4-2x$ $\quad$ curvas de nivel: $y=4-C-2x$





b) $\boxed{z=|y|}$ $\quad$ corte con todo plano $x=cte \to z=|y|$ $\quad$ curvas de nivel: $|y|=C$

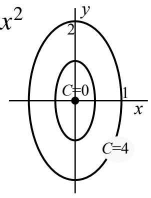


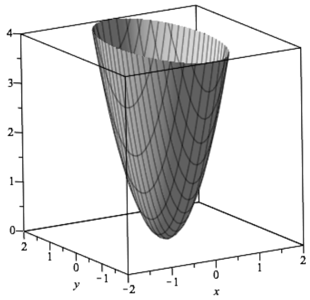


c) $\boxed{z=4x^2+y^2}=C$ elipses.

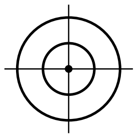
$x=0 \to z=y^2$

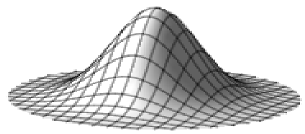
$y=0 \to z=4x^2$

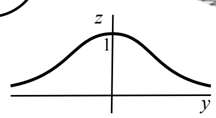




d) $\boxed{z=e^{-x^2-y^2}}$ De revolución. $x=0 \to z=e^{-y^2}$.

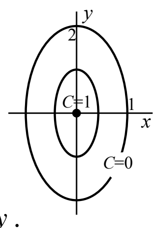


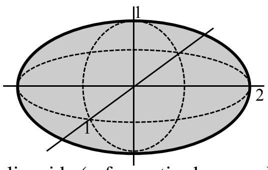




10. a) $\boxed{4x^2+y^2+4z^2=4}$ $\quad z=C \to 4x^2+y^2=4-4C^2$ elipses

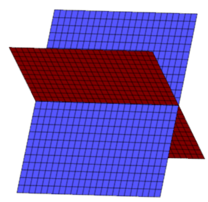
$x=0 \to \frac{y^2}{2^2}+z^2=1$ elipse, $\; y=0 \to x^2+z^2=1$.





elipsoide (esfera estirada ← →)

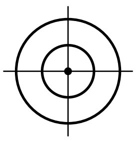
b) $\boxed{z^2=x^2}$ $\Leftrightarrow z=\pm x$, dos planos, independientes de y.

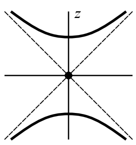


Entre las cuádricas (todas las de este problema lo son) se esconden cosas mas sencillas como planos, puntos, el vacío...).

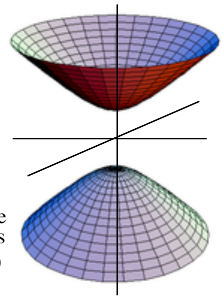
c) $\boxed{z^2=1+x^2+y^2}$ De revolución.

$x=0 \to z^2-y^2=1$
$y=0 \to z^2-x^2=1$ $\quad$ hipérbolas



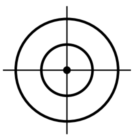


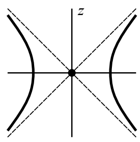
hiperboloide de dos hojas (wikipedia)



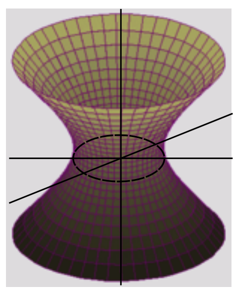
d) $\boxed{z^2=x^2+y^2-1}$ De revolución.

$x=0 \to y^2-z^2=1$
$y=0 \to x^2-z^2=1$ $\quad$ hipérbolas

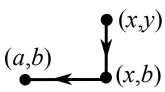




hiperboloide de una hoja (wikipedia)



11. Probemos que $f(x,y)\to L$ cuando $(x,y)\to(a,b) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\big(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\big)=L$ (el otro parecido).



Sea $L_b(x)=\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$. Sabemos que $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que $\|(x,y)-(a,b)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$. También que $\exists\delta_x$ tal que si $|x-a|<\delta_x$ entonces $|f(x,y)-L_b(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Llamemos $\delta^*=\text{mín}\big\{\frac{\delta}{\sqrt{2}},\delta_x\big\}$. Entonces si $|y-b|<\delta^*$ es $|L_b(x)-L|\le|f(x,y)-L_b(x)|+|f(x,y)-L|<\varepsilon$, pues $|x-a|<\delta_x$, $\|(x-a,y-b)\|<\sqrt{\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^2}{2}}=\delta$.

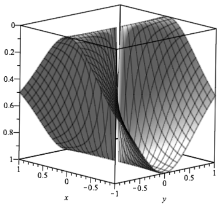
$\boxed{f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\big)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$. $\lim\limits_{y\to 0}\big(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\big)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1 \Rightarrow$ no existe límite.

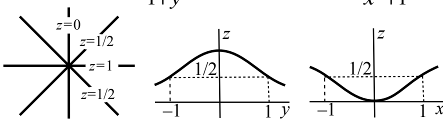
$\boxed{f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\big)=0=\lim\limits_{y\to 0}\big(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\big)$ pero no hay límite, pues $f(x,0)=0$, $f(x,x)=1$.

12. a) $\boxed{f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}}=C \to y=\pm x\frac{\sqrt{1-C}}{\sqrt{C}}$ (rectas pasando por el origen).

O mejor, $y=mx \to f(x,mx)=\frac{1}{1+m^2}$
$\Rightarrow$ sin límite en el origen.

$x=1 \to z=\frac{1}{1+y^2}$, $y=1 \to z=\frac{x^2}{x^2+1}$.



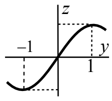


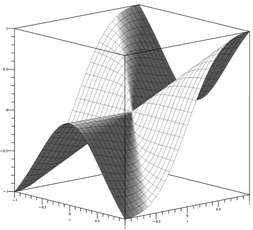
b) $\boxed{f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^2+y^2}}=0 \to \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

(resto de curvas nivel complicadas)

$x=\pm 1 \to z=\frac{2y}{1+y^2}$

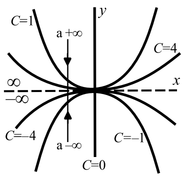
$y=\pm 1 \to z=\pm\frac{2x^2}{x^2+1}$





Polares: $|f(r,\theta)|=|2r\cos^2\theta \,\mathrm{sen}\,\theta|\le 2r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$
$\Rightarrow$ es continua en $(0,0)$.

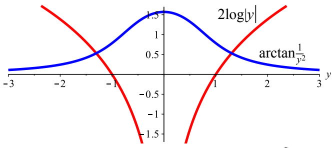
c) $\boxed{f(x,y)=\frac{x^2}{y}}$ $=C \to y=\frac{x^2}{C}$, $\frac{a^2}{y}\overset{y\to 0^\pm}{\longrightarrow}\pm\infty \Rightarrow$ continua en (a,b) , $b\neq 0$, y no límite en $(a,0)$.

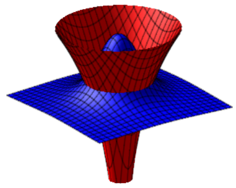


Engañan: $f(x,mx)=\frac{x}{m}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, $f(r,\theta)=r\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\underset{r\to 0}{\longrightarrow}0$.

d) $\boxed{f(x,y)=\log(x^2+y^2)}$ Revolución. Continua en $\mathbf{R}^2-\{\mathbf{0}\}$.

e) $\boxed{f(x,y)=\arctan\frac{1}{x^2+y^2}}$ Revolución. Continua en todo $\mathbf{R}^2$
(definiendo $f(0,0)=\pi/2$).

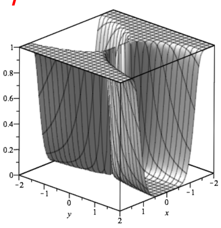




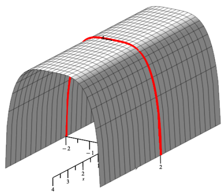
f) $\boxed{f(x,y)=\mathrm{th}\frac{x^6}{y^2}}$ $f(x,mx^3)=\mathrm{th}\frac{1}{m^2}$ ($y=mx^3$ de nivel) $\Rightarrow f$ sin límite en $(0,0)$.

Podría no tenerlo en $(a,0)$, $a\neq 0$, pero $f(x,y)\to 1$, porque $\mathrm{th}\frac{+}{+0}=1$.

En el resto de puntos, las f son continuas, por ser suma, composición, cocientes con denominador no nulo... de continuas.

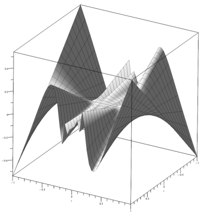


13. a) $\boxed{f(x,y)=\sqrt{16-y^4}}$ Gráfica trasladada de una función real continua en $|y|\le 2$.
Es continua en todo su dominio $D=\{(x,y):|y|\le 2\}$.
(Usando la definición de continuidad válida también para los puntos de ∂D).



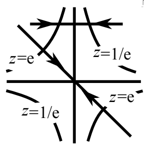
b) $\boxed{g(x,y)=\frac{x^2y\,\mathrm{e}^{-y}}{x^4+4y^2}}$ Discontinua en $(0,0)$ pues no tiene límite en: $g(x,mx^2)=\frac{m\,\mathrm{e}^{-mx^2}}{1+4m^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{m}{1+4m^2}$.
En el resto de $\mathbf{R}^2$ es claramente continua.

c) $\boxed{\begin{matrix} h(x,y)=xy\cos\frac{1}{y} \\ h(x,0)=0 \end{matrix}}$ Obviamente continua si $y\neq 0$. Y también es continua en ese eje por ser el producto de un campo acotado ($\cos\frac{1}{y}$) por otro que tiende a 0 (xy).

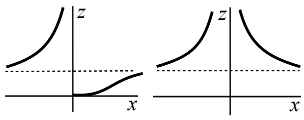


d) $\boxed{\begin{matrix} k(x,y)=\mathrm{e}^{-1/xy} \\ k(x,0)=g(0,y)=0 \end{matrix}}$ Claramente continua si $x,y\neq 0$ pues es $-\frac{1}{xy}$ continua compuesta con la función continua e^x .

$k=C \to$
$xy=-\frac{1}{\ln C}$
hipérbolas



Nos acercamos a $(0,b)$, $b>0$ por $y=b$: $\mathrm{e}^{-1/bx}\to 0,\infty$ si $x\to 0^{+,-}$. Discontinua.
Análogamente se ve que es discontinua en $(0,b)$, $b<0$ y $(a,0)$, $a\neq 0$.
Tampoco continua en el origen: $k(x,mx)=\mathrm{e}^{-1/mx^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\begin{cases} 0, & m>0 \\ \infty, & m<0 \end{cases}$. cortes con $y=1$, $y=-x$:

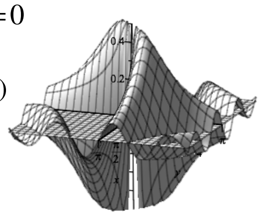


14. a) $\boxed{f(x,y)=\frac{\mathrm{sen}\,xy}{x^2+y^2}}=0 \to \begin{matrix} x=0\,,\ y=0 \\ xy=k\pi \end{matrix}$

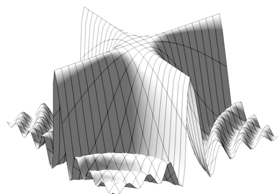
(demás curvas nivel y cortes difíciles)

$f(x,mx)=\frac{\mathrm{sen}\,mx^2}{(1+m^2)x^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{\mathrm{sen}\,m}{1+m^2}$

$\Rightarrow f$ sin límite en $(0,0)$.
Y continua en el resto.



b) $\boxed{h(x,y)=\frac{\mathrm{sen}(xy)}{xy}}$ $g(x)=\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$, $g(0)=1$, continua $\forall x$.
$f(x,y)=xy$ continua en $\mathbf{R}^2$.
Definiendo $h(x,0)=h(0,y)=1$ sería h continua en todo $\mathbf{R}^2$.
En ambos ejes $h\to 1$.



15. a) $\boxed{f(x,y,z)=yz\frac{1-\mathrm{e}^{xyz}}{xyz}}$ con $f^*(x,y,z)=\frac{1-\mathrm{e}^{xyz}}{xyz}$ continua en $\mathbf{R}^3$, por serlo $h(x)=\frac{1-\mathrm{e}^x}{x}$, $h(0)=-1$ en $\mathbf{R}$.
i) si $\mathbf{x}\to(0,0,0)$, $f\to 0\cdot(-1)=0$. ii) si $\mathbf{x}\to(0,1,0)$, $f\to 0\cdot(-1)=0$.
Inmediatos son: iii) si $\mathbf{x}\to(1,1,1)$, $f\to 1-\mathrm{e}$. iv) si $\mathbf{x}\to(1,1,0)$, $f\to 0$.

b) $\boxed{g(x,y,z)=\frac{x^2-1}{y+z-1}}$ es continua seguro si $y+z\neq 1$. i) si $\mathbf{x}\to(0,0,0)$, $g\to 1$. iii) si $\mathbf{x}\to(1,1,1)$, $g\to 0$.
ii) si $\mathbf{x}\to(0,1,0)$, sale $\frac{-1}{0}$ y no tendrá límite. Nos acercamos por una recta: $f(0,1+h,0)=-\frac{1}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\pm\infty$.
iv) si $\mathbf{x}\to(1,1,0)$, sale $\frac{0}{0}$. Nos acercamos por rectas $g(1+h,1+mh,0)=\frac{2h+h^2}{mh}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\frac{2}{m}$. No hay límite.