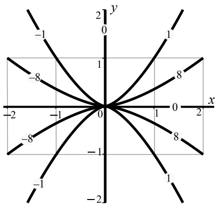
1. $\boxed{f(x,y)=e^{3x+x^4y^2}}$ $f_x=(3+4x^2y^2)\,e^{3x+x^4y^2}$, $f_y=2x^4y\,e^{3x+x^4y^2}$ $\forall(x,y)$.

$\boxed{g(x,y)=\log\left|y-x^2\right|}$ $g_x=\frac{2x}{x^2-y}$, $g_y=\frac{1}{y-x^2}$, si $y\neq x^2$ (en esos puntos ni está definida).

$\boxed{\begin{array}{l} h(x,y)=\frac{1}{xy}\,\text{sen}(xy) \\ h(x,0)=h(0,y)=1\end{array}}$ Si $x\neq 0$, $y\neq 0$, es $h_x=\frac{1}{x}\cos(xy)-\frac{1}{x^2y}\,\text{sen}(xy)$, $h_y=\frac{1}{y}\cos(xy)-\frac{1}{xy^2}\,\text{sen}(xy)$.
Obviamente es $h_x(a,0)=h_y(0,b)=0$ (son derivadas de la función constante 1).
En $(0,b)$ es $h_x=0$ $\big($derivada en $x=0$ de $\frac{1}{bx}\,\text{sen}(bx)=1-\frac{b^2x^2}{2}+\cdots\big)$. Igual, $h_y(a,0)=0$.

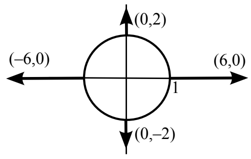
$\boxed{\begin{array}{l} k(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ k(0,0)=0\end{array}}$ Si $(x,y)\neq(0,0)$, $k_x=(x^2+y^2)^{-1/2}-x^2(x^2+y^2)^{-3/2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $k_y=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.
En $(0,0)$: $h(0,y)=0 \Rightarrow h_y(0,0)=0$; $h(x,0)=\frac{x}{|x|}$, $h(0,0)=0 \Rightarrow$ no existe $h_x(0,0)$.

2. $\boxed{f(x,y)=\frac{x^3}{y^2}\,,\ f(x,0)=0}$ Curvas de nivel: $y=\pm\big(x^3/C\big)^{1/2}$, $x=0$, $y=0$. Continua si $y\neq 0$ por ser cociente de campos continuos con denominador no nulo.



En $(a,0)$ es discontinua pues cerca toma f valores tan gordos o tan negativos como queramos.
En $(0,0)$ es discontinua, pero de la definición sale $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0 \Rightarrow \nabla f(0,0)=(0,0)$.
Para la derivada en $(0,0)$ se precisa la definción: $D_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})}f(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4h/5,3h/5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{64h^3}{45h^3}=\frac{64}{45}$.
$\nabla f(x,y)=\big(\frac{3x^2}{y^2},-\frac{2x^3}{y^3}\big)$ continuo en un entorno de $(1,1)$, $\nabla f(1,1)=(3,-2) \Rightarrow D_{(\frac{4}{5},\frac{3}{5})}f(1,1)=(3,-2)\cdot(\frac{4}{5},\frac{3}{5})=\frac{6}{5}$.

3. $\boxed{f(x,y)=3x^2+y^2}$ $\nabla f=(6x,2y)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{(sobre la circ.)}}}{=}\big(6x,\pm 2\sqrt{1-x^2}\,\big)$, $\|\nabla f\big(x,\pm\sqrt{1-x^2}\,\big)\|^2=32x^2+4$.
máximo si $x=\pm 1$ $\nearrow$

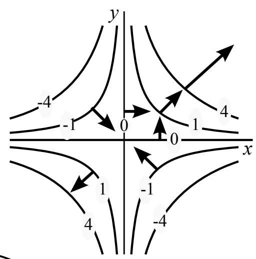


$D_{\mathbf{u}}f$ es máxima ($=6$) en los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$, en la dirección de los respectivos gradientes $(6,0)$ y $(-6,0)$ (o si se prefiere, de los vectores $\mathbf{i}$ y $-\mathbf{i}$).

4. a) $\boxed{f(x,y)=xy}$ $\nabla f=(y,x)$ $=(1,0)$ $(0,1)$ $(1,1)$ $(2,2)$ $(1,-1)$ $(-1,1)$ $(-1,-1)$
en $(0,1)$ $(1,0)$ $(1,1)$ $(2,2)$ $(-1,1)$ $(1,-1)$ $(-1,-1)$

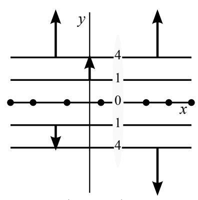
[silla de montar como Ej 4 de 1.2]

Plano tangente: $\boxed{z=x+y-1}$.



b) $\boxed{g(x,y)=y^2}$ $\nabla g=(0,2y)$ $\big[=(0,2)$ en $(1,1)\big]$.

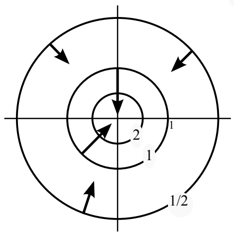
Plano tangente: $z=1+2(y-1)$, $\boxed{z=2y-1}$.



c) $\boxed{h(x,y)=(x^2+y^2)^{-1}}$ $\nabla h=-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y)$. $\nabla h(1,1)=\big(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\big)$.

[∇h apunta hacia el origen y es mayor cuanto más cerca estemos].

Plano tangente: $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)$, $\boxed{z=\frac{3-x-y}{2}}$.

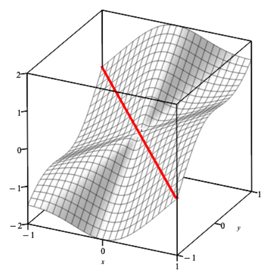


5. $\boxed{f(x,y)=\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}}$ $f(x,0)=x \Rightarrow f_x(0,0)=1$. $f(0,y)=2y \Rightarrow f_y(0,0)=2$.

$D_{(1,-1)}f(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,-h)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-h/2}{h}=-\frac{1}{2}$.

$f(r,\theta)=r\big(\cos^3\theta+2\,\text{sen}^3\theta\big)$, $\big|f(r,\theta)-0\big|\leq 3r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f$ continua en $(0,0)$.

Si f fuese diferenciable en el origen sería $D_{(1,-1)}f(0,0)=\nabla \overset{(1,2)}{f(0,0)}\cdot(1,-1)=-1$.
Como no es el caso, la f no puede ser diferenciable. [O utilizando la definición].



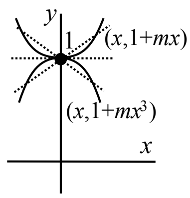
6. $\boxed{f(x,y)=y\ \text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}\,,\ f(0,0)=0}$ continua (y diferenciable) claramente si $(x,y)\neq(0,0)$. En $(0,0)$ es continua:

$|f(x,y)-f(0,0)|=|y|\big|\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}\big|\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$ si $\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$ [o "$0\cdot ac.$" o polares].

$f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h}\,\text{sen}\,\frac{1}{h^2}$ no existe $\Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

$f_x=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$, $f_y=\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ continuas en un entorno de $(1,0)$ $\Rightarrow$
$D_{\mathbf{v}}f(1,0)=\nabla f(1,0)\cdot\mathbf{v}=(0,\text{sen}\,1)\cdot\mathbf{v}=\frac{4}{5}\,\text{sen}\,1$.

7. $\boxed{f(x,y)=\frac{x^3}{y-1}\,,\ f(x,1)=0}$ Acercándonos por rectas: $f(x,1+mx)=\frac{x^2}{m}\xrightarrow[x\to 0]{}0$ pero no basta.



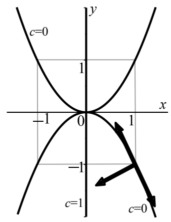
Sobre las curvas $y=1+mx^3$ es $f(x,1+mx^3)=\frac{1}{m}$ $\Rightarrow$ no continua $\Rightarrow$ no diferenciable en $(0,1)$.

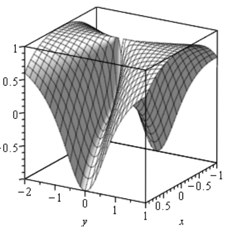
$f_x=\frac{3x^2}{y-1}$, $f_y=-\frac{x^3}{(y-1)^2}$, $\nabla f(1,0)=(-3,-1)$ $\Rightarrow$ derivada mínima en la dirección de $\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

Plano tangente $z=-1-3(x-1)-(y-0)=2-3x-y$.

8. $\boxed{f(x,y)=\frac{y^2-x^4}{x^2+y^2}}$ a) $f=0\to\ y^2=x^4$, $y=\pm x^2$ parábolas.

$f=1\to\ x^2(1+x^2)=0$, $x=0$.





b) i) $D_{\bar{u}}=0$ si $\bar{u}\perp\nabla f$ (y tangente a la curva nivel). $\bar{u}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\mp\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

O bien: $\nabla f=\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\left(-x^4-2x^2y^2-y^2,\,xy(x^2+1)\right)\xrightarrow[(1,-1)]{}-(2,1)$ ...

ii) No existe $\bar{u}$ porque el valor máximo de $D_{\bar{u}}$ es $\|\nabla f\|=\sqrt{5}<3$.

c) Lo cerca de $\mathbf{0}$ que queramos hay puntos con $f=0$ y $f=1$ $\Rightarrow$ f discontinua.

O bien, porque: $f(x,mx)=\frac{m^2-x^2}{1+m^2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{m^2}{1+m^2}$ distinto para distintos m. f discontinua $\Rightarrow$ f no diferenciable.

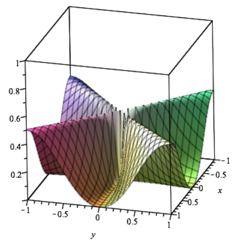
$f(x,0)=-x^2\Rightarrow f_x(0,0)=-2x\big|_{x=0}=0$. $f(0,y)=\begin{cases}1, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$ discontinua $\Rightarrow\ \nexists f_y(0,0)$. [Definiendo $f(0,0)=1$, la que no existiría sería f_x].

9. a) $\boxed{f(x,y)=(y-x^3)^{1/3}}$ continuo en $\mathbf{R}^2$ por ser composición del campo $y-x^3$ continuo y $z^{1/3}$ continua.

$f(x,0)=-x$, $f_x(0,0)=-1$, $f(0,y)=y^{1/3}$ $\Rightarrow$ $f_y(0,0)$ no existe $\Rightarrow$ no diferenciable.

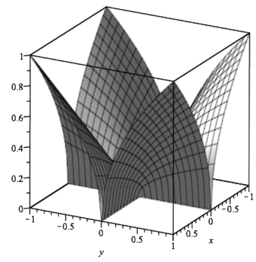
$\boxed{\begin{array}{l} g(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\\ g(0,0)=0\end{array}}$ Como $g(x,0)=0\ \forall x$, $g(0,y)=0\ \forall y$ es claro que $g_x(0,0)=g_y(0,0)=0$.

Pero no es diferenciable en el punto por no ser continua: $g(x,mx)=\frac{m^2}{1+m^4}$.



[Tan cerca como queramos del origen hay puntos en los que la g vale, por ejemplo, 0 (los ejes), otros en los que vale $\frac{1}{2}$ ($y=\pm x$), ...]. A la derecha, la gráfica de la función hecha con 'Maple':

$\boxed{r(x,y)=\sqrt{|xy|}}$ $r(x,0)=0\ \forall x$, $r(0,y)=0\ \forall y$ $\Rightarrow$ $r_x(0,0)=r_y(0,0)=0$.



Sí es continua por serlo el campo xy, el valor absoluto y la raíz para valores positivos.

Lo que no existe en este caso es ninguna derivada según vectores distintos de los ejes:

$r(x,mx)=|x|\sqrt{|m|}$. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r(h(1,m))-r(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|\sqrt{|m|}}{h}$ no existe si $m\neq 0$.

[Por ejemplo, el corte con $y=\pm x$ es la función real no derivable $y=|x|$].

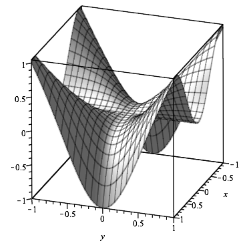
Por tanto, r no puede ser diferenciable ($\Rightarrow\exists D_{\mathbf{v}}$)

$\boxed{\begin{array}{l} h(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ h(0,0)=0\end{array}}$ $h(r,\theta)=r\cos^2\theta$, $|h(r,\theta)-h(0,0)|\le r\xrightarrow{r\to 0}0$ $\Rightarrow$ h continua en $(0,0)$.

$h(0,y)=0\Rightarrow h_y(0,0)=0$; $h(x,0)=\frac{x^2}{|x|}=|x|$ $\Rightarrow$ $h_x(0,0)$ no existe $\Rightarrow$ no diferenciable.

$\boxed{\begin{array}{l} k(x,y)=\frac{3x^2y^2-x^6}{x^2+y^2}\\ k(0,0)=0\end{array}}$ $|k(r,\theta)-0|=\left|3r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta-r^4\cos^6\theta\right|\le 3r^2+r^4\xrightarrow[r\to 0]{}0$ $\Rightarrow$ f continua.

$k(x,0)=-x^4$, $k(0,y)=0$ $\Rightarrow$ $k_x(0,0)=k_y(0,0)=0$.



Con la definición: $\dfrac{\frac{3x^2y^2-x^6}{x^2+y^2}-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=3r\underbrace{\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}_{\text{acotado}}-r^3\underbrace{\cos^6\theta}_{\text{acotado}}\xrightarrow[r\to 0]{}0$ $\Rightarrow$ f diferenciable.

[Se podría ver que k_x, k_y son continuas en $(0,0)$, o probar directamente la diferenciabilidad, pues diferenciable $\Rightarrow$ continua]. [La gráfica de Maple se ve suave en el origen].

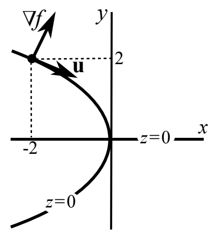
$\boxed{\begin{array}{l} l(x,y)=\frac{xe^{x^2+y^2}-x}{x^2+y^2}\\ l(0,0)=0\end{array}}$ En un entorno de $\mathbf{0}$: $e^{x^2+y^2}=1+x^2+y^2+o\left(x^2+y^2\right)$, luego $l(x,y)=x+\frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\xrightarrow[\mathbf{x}\to\mathbf{0}]{}0$.

$l(0,y)=0\to l_y(0,0)=0$. $l_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{h^2}\left(e^{h^2}-1\right)\right)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2+O(h^4)}{h^2}=1$.

Es diferenciable:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{l(h,k)-l(0,0)-(1,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h(e^{h^2+k^2}-1-h^2-k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}h\frac{O((h^2+k^2)^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}}=0.$$

10. $\boxed{f(x,y)=\frac{2xy+y^3}{x^2+y^2}}$ a) $y(2x+y^2)=0 \;\to\; y=0$ y la parábola $x=-\frac12 y^2$ [que pasa por $(-2,2)$].



b) $\begin{array}{l} f(x,0)=0\\ f(0,y)=y\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f_x(0,0)=0\\ f_y(0,0)=1\end{array}$. $f(x,mx)=\frac{2m+m^3x}{1+m^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow$ **discontinua** en $(0,0)$.

[En polares es casi lo mismo: $f(r,\theta)=2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta+r\,\mathrm{sen}^3\theta \xrightarrow[r\to 0]{} \mathrm{sen}\,2\theta$ dependiente de θ].

Por no ser f continua, deducimos que f **no es diferenciable** en ese punto.

c) $\nabla f=\left(\frac{2y(y^2-x^2-xy^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2x^3-2xy^2+3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)\Big|_{(-2,2)}=\left(\frac12,1\right)$, $(2,-1)$ perpendicular $\Rightarrow \bar u=\left(\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5}\right)$ [ó $-\bar u$].

[Más corto: $\bar u$ debe ser vector tangente a la curva de nivel, que tiene pendiente $-\frac12$ en el punto].

11. $\nabla f(2,1)=\big(f_x(1,2),f_y(1,2)\big)\equiv(c,d)$, $D_{(u,v)}f(2,1)=cu+dv \to \begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt2}c-\frac{1}{\sqrt2}d=-\sqrt2\\ \frac35 c+\frac45 d=3\end{array} \to f_x(1,2)=1,\ f_y(1,2)=3$.

Plano tangente: $z=2+(x-1)+3(y-2)$, $\boxed{x+3y-z=5}$. Recta normal a la superficie: $\boxed{\mathbf{x}=(1,2,2)+t(1,3,-1)}$.

12. $\boxed{f(x,y,z)=y\,e^{2x-z}}$ $\nabla f=\left(2y\,e^{2x-z},\ e^{2x-z},\ -y\,e^{2x-z}\right)\Big|_{(1,-1,2)}=\boxed{(-2,1,1)}$. $D_{(a,b,c)}f(1,-1,2))=b+c-2a$.

La $D_{\mathbf v}$ es nula, por ejemplo, según el vector $(1,1,1)$. Haciéndolo unitario: $\boxed{\mathbf u=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)}$ (perpendicular al gradiente).

13. $\boxed{f(x,y,z)=ax^2y+by^2z+cz^2x}$ $\nabla f=\left(2axy+cz^2,2byz+ax^2,2czx+by^2\right)\Big|_{(1,1,1)}=(2a+c,2b+a,2c+b)$.

La derivada es máxima si $\mathbf u$ tiene la dirección del gradiente y el valor máximo es $\|\nabla f\|=13$. Por tanto, debe ser:

$\nabla f(1,1,1)=k\mathbf u$, $\|\nabla f\|=k \Rightarrow \nabla f(1,1,1)=\frac{13}{\sqrt{26}}(1,5,0)$, $\begin{cases}2a+c=\sqrt{26}/2\\ 2b+a=5\sqrt{26}/2\\ 2c+b=0\end{cases}$, $a=\frac12\sqrt{26}$, $b=\sqrt{26}$, $c=-\frac12\sqrt{26}$.

14. $\boxed{f(x,y,z)=\arctan(xy)-zy}$ $\nabla f=\left(\frac{y}{1+x^2y^2},\frac{x}{1+x^2y^2}-z,-y\right)\Big|_{(0,1,1)}=(1,-1,-1)$ . .

El vector unitario con la dirección y sentido de $(3,0,4)$ es $\mathbf u=\left(\frac35,0,\frac45\right) \Rightarrow D_{\mathbf u}f(0,1,1)=(1,-1,-1)\cdot\mathbf u=\boxed{-\frac15}$.

Plano tangente: $(1,-1,-1)\cdot(x-0,y-1,z-1)=0$, $\boxed{z=x-y+2}$.

15. a) $\boxed{z=x^2+y^3}$ en $(3,1,10)$. $f_x=2x$, $f_y=3y^2 \;\to\; z=10+6(x-3)+3(y-1)$, $\boxed{z=6x+3y-11}$.

O bien: $F(x,y,z)=x^2+y^3-z$, $\nabla F(3,1,10)=(6,3,-1)$, $(6,3,-1)\cdot(x-3,y-1,z-10)=0$ $\uparrow$

b) $\boxed{x^2+(y-2)^2+2z^2=4}$ en $(1,3,-1)$. $\nabla F(1,3,-1)=(2,2,-4)$, $(1,1,-2)\cdot(x-1,y-3,z+1)=0$, $x+y-2z=6$.

Más largo: $z=-\sqrt{2-\frac12x^2-\frac12(y-2)^2}$. $z_x(1,3)=z_y(1,3)=\frac12$, $z=-1+\frac12(x-1)+\frac12(y-3)$, $\boxed{z=\frac{x+y}{2}-3}$ $\uparrow$

c) $\boxed{yz=\log(x+z)}$ en $(0,0,1)$. (Aquí no podemos despejar z). $F(x,y,z)=yz-\log(x+z)$, $\nabla F=\left(-\frac{1}{x+z},z,y-\frac{1}{x+z}\right)$.

$\nabla F(0,0,1)=(-1,1,-1)$, $(-1,1,-1)\cdot(x,y,z-1)=-x+y-z+1=0$, $\boxed{z=1-x+y}$.

16. $\boxed{f(x,y)=x^5y-x^2y^4}$ $f_x=5x^4y-2xy^4$, $f_y=x^5-4x^2y^3$. $f_{xx}=20x^3y-2y^4$, $f_{xy}=f_{yx}=5x^4-8xy^3$, $f_{yy}=-12x^2y^2$.

$\boxed{g(x,y)=x\,e^{x-y}}$ $g_x=(x+1)\,e^{x-y}$, $g_y=-x\,e^{x-y}$. $g_{xx}=(x+2)\,e^{x-y}$, $g_{xy}=g_{yx}=-(x+1)\,e^{x-y}$, $g_{yy}=x\,e^{x-y}$.

$\boxed{h(x,y)=\frac{\cos(xy)}{x}}$ $h_x=-\frac{1}{x^2}\cos(xy)-\frac{y}{x}\,\mathrm{sen}(xy)$, $h_y=-\,\mathrm{sen}(xy)$.
$h_{xx}=\left[\frac{2}{x^3}-\frac{y^2}{x}\right]\cos(xy)+\frac{2y}{x^2}\,\mathrm{sen}(xy)$, $h_{xy}=h_{yx}=-y\cos(xy)$, $h_{yy}=-x\cos(xy)$.

$\boxed{k(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ $k_x=(x^2+y^2)^{-1/2}-x^2(x^2+y^2)^{-3/2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $k_y=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ (prob 1).
$k_{xx}=-3x(x^2+y^2)^{-3/2}+3x^3(x^2+y^2)^{-5/2}=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $k_{xy}=k_{yx}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $k_{yy}=\frac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$.

17. $\boxed{f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}$. $f_x=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, si $(x,y)\neq(0,0)$. Además $f(x,0)=f(0,y)=0$ $\Rightarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

$f_x(0,y)=-y \Rightarrow (f_x)_y(0,0)=f_{xy}(0,0)=-1$. $f_y(x,0)=x \Rightarrow (f_y)_x(0,0)=f_{yx}(0,0)=1$. No coinciden.

Para que esto pueda ocurrir, no deben ser las derivadas segundas continuas. Y no lo son:

Si $(x,y)\neq(0,0)$ es $f_{xy}=f_{yx}=\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$ que no tiene límite en el origen. $\left[f(x,mx)=\frac{1+9m^2-9m^4-m^6}{(1+m^2)^3}\right]$.

18. $\boxed{u_{tt}-u_{xx}=0}$. a) $u=\operatorname{sen}(x-t)$, $u_t=-\cos(x-t)$, $u_x=\cos(x-t)$, $u_{tt}=-\operatorname{sen}(x-t)=u_{xx}$.

b) $u=\operatorname{sh}2t\operatorname{ch}2x$, $u_t=2\operatorname{ch}2t\operatorname{ch}2x$, $u_x=2\operatorname{sh}2t\operatorname{sh}2x$, $u_{tt}=4\operatorname{sh}2t\operatorname{ch}2x=u_{xx}$.

c) $u=\arctan(x+t)$, $u_t=\frac{1}{1+(x+t)^2}$, $u_x=\frac{1}{1+(x+t)^2}$, $u_{tt}=-\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}=u_{xx}$.

d) $u=\int_{x-t}^{x+t}e^{-s^2}ds$. Las derivadas primeras se calculan fácilmente con el teorema fundamental del cálculo:

$u_t=e^{-(x+t)^2}+e^{-(x-t)^2}$, $u_x=e^{-(x+t)^2}-e^{-(x-t)^2}$, $u_{tt}=2(x-t)\,e^{-(x+t)^2}-2(x+t)\,e^{-(x-t)^2}=u_{xx}$.

19. a) $\boxed{f(x,y)=(x-y)^2}$ en $(1,2)$. $f_x=2(x-y)$, $f_y=-2(x-y)$, $f_{xx}=2$, $f_{xy}=-2$, $f_{yy}=2$.

$f(1,2)=1$, $f_x(1,2)=-2$, $f_y(1,2)=2$, $f_{xx}(1,2)=2$, $f_{xy}(1,2)=-2$, $f_{yy}(1,2)=2$.

Por tanto: $\boxed{f(x,y)=1-2(x-1)+2(y-2)+(x-1)^2-2(x-1)(y-2)+(y-2)^2}$ (es exacto).

De otra forma: $f(x,y)=\big[(x-1)-(y-2)-1\big]^2$

b) $\boxed{g(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}}$ en $(0,0)$. Lo más corto es usar la serie geométrica: $\frac{1}{1-[-(x^2+y^2)]}=\boxed{1-x^2-y^2+\cdots}$

$g_x=-\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2}$, $g_y=-\frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2}$, $g_{xx}=-2(1+x^2+y^2)^{-2}+4x^2(1+x^2+y^2)^{-3}=2\frac{3x^2-y^2-1}{(1+x^2+y^2)^3}$, $g_{xy}=\frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3}$,

$g_{yy}=2\frac{3y^2-x^2-1}{(1+x^2+y^2)^2}$ (intercambiando papeles de x e y). $g(1,2)=1$, $g_x(0,0)=g_y(0,0)=g_{xy}(0,0)=0$, $g_{xx}(0,0)=g_{yy}(0,0)=-2\uparrow$

c) $\boxed{h(x,y)=e^{xy}\cos(x+y)}$ en $(0,\pi)$. $h_x=e^{xy}\big[y\cos(x+y)-\operatorname{sen}(x+y)\big]$, $h_y=e^{xy}\big[x\cos(x+y)-\operatorname{sen}(x+y)\big]$,

$h_{xx}=e^{xy}[(y^2-1)\cos(x+y)-2y\operatorname{sen}(x+y)]$,
$h_{xy}=e^{xy}[xy\cos(x+y)-(x+y)\operatorname{sen}(x+y)]$,
$h_{yy}=e^{xy}[(x^2-1)\cos(x+y)-2x\operatorname{sen}(x+y)]$.

$\boxed{h(x,y)=-1-\pi x+\frac{1-\pi^2}{2}x^2+\frac{1}{2}(y-\pi)^2+\cdots}$

$h(0,\pi)=-1$, $h_x(0,\pi)=-\pi$, $h_y(0,\pi)=h_{xy}(0,\pi)=0$, $h_{xx}(0,\pi)=1-\pi^2$, $h_{yy}(0,\pi)=1\uparrow$

Otra forma: $s=x$, $t=y-\pi \;\to\; h(s,t)=e^{s(t+\pi)}\cos(s+t+\pi)=-e^{\pi s}e^{st}\cos(s+t)$, desarrollando en $s=t=0$:

$h(s,t)=-\big[1+\pi s+\frac{1}{2}\pi^2s^2+\cdots\big]\big[1+st+\cdots\big]\big[1-\frac{1}{2}(s^2+2st+t^2)+\cdots\big]$

$=-\big[1+\pi s+\frac{1}{2}\pi^2s^2+\cdots\big]\big[1-\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}t^2+\cdots\big]=-1-\pi s+\frac{1-\pi^2}{2}s^2+\frac{1}{2}t^2+\overset{\uparrow}{\cdots}$

20. $\boxed{f(x,y)=\frac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{x^2+y^2}}$ a) $\underbrace{\cos(x+y)-\cos(x-y)}_{[=-2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y]}=1-\frac{1}{2}(x+y)^2+\cdots-\big[1-\frac{1}{2}(x-y)^2+\cdots\big]=\boxed{-2xy+o(x^2+y^2)}$.

$\cos z=1-\frac{z^2}{2}+\overset{\uparrow}{\cdots}$

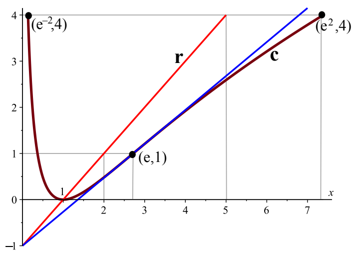
[Más largo derivar: $f_x=-s+s$, $f_y=-s-s$, $f_{xx}=f_{yy}=-c+c$, que se anulan en $(0,0)$, y $f_{xy}=-c-c\big|_{(0,0)}=-2$].

b) $f(x,x)=\frac{\cos 2x-1}{2x^2}=\frac{-2x^2+\cdots}{2x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}-1$ $\Big[f(x,mx)\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{-2m}{1+m^2}$ en general$\Big]$ $\Rightarrow$ **discontinua** $\Rightarrow$ **no diferenciable**.

$f(x,0)=f(0,y)=0$ [pues $\cos y=\cos(-y)$]. Por tanto, las parciales son $\boxed{f_x(0,0)=f_y(0,0)=0}$.

21. $\boxed{\mathbf{c}(t)=(e^t,\,t^2)}$, $t\in[-2,2]$. Pasa por los puntos $(e^{-2},4)$, $(1,0)$, $(e,1)$ y $(e^2,4)$.

[La curva es la gráfica de $y=(\log x)^2$, pues $t=\log x$ e $y=t^2$].



i) $\mathbf{c}'(t)=(e^t,\,2t)$, $\mathbf{c}'(1)=(e,2)$. Tangente $\mathbf{x}=(e,1)+t(e,2)=(e+t\,e,\,1+2t)$.

En cartesianas: $t=\frac{x}{e}-1=\frac{y-1}{2} \;\to\; y=\frac{2}{e}x-1$.

ii) Vectores normales $(\pm 1,\mp e)$. Los unitarios: $\frac{1}{\sqrt{e^2+1}}(\pm 1,\mp e)$.

iii) $\mathbf{c}''(t)=(e^t,\,2)$, $\mathbf{c}''(0)=(1,2)$. [$(1,0)$ componente tangencial, $(0,2)$ componente normal].

iv) La recta $\mathbf{r}(s)=(s,s-1)$ corta nuestra curva en $(1,0)$ (cuando $t=0$ y $s=1$) y en ningún punto más.

[$s=e^t$, $s-1=t^2 \Rightarrow 1+t^2=e^t$ y esto sólo se cumple si $t=0$, como muestran las gráficas de las funciones].

El ángulo entre los vectores tangentes $(1,0)$ y $\mathbf{r}'(1)=(1,1)$, es claramente $\frac{\pi}{4}$ $\big[=\arccos\frac{(1,0)\cdot(1,1)}{1\cdot\sqrt{2}}\big]$.

22. $\boxed{x^2+y^2+3z^2=16}$ $\nabla F=2(x,y,3z)\xrightarrow{(3,2,1)}2(3,2,3)$. Plano tangente: $3(x-3)+2(y-2)+3(z-1)=0$, $z=\frac{16}{3}-x-\frac{2y}{3}$.

$\boxed{\bar{c}(t)=(3e^t,2e^t,e^{3t})}$ la corta si $3e^{6t}+13e^{2t}=16$ lo que claramente sucede si $t=0$, que lleva al punto $(3,2,1)$.

[De hecho, es el único corte, pues primer el miembro crece, o $e^{2t}=s \to 3s^3+13s-16=(s-1)(3s^2+3s+16)=0$].

Un vector tangente a la curva es $\bar{c}'(0)=(3,2,3)$ normal al plano tangente.

Curva y superficie son, pues, perpendiculares. Es decir, se cortan formando un ángulo $\frac{\pi}{2}$.

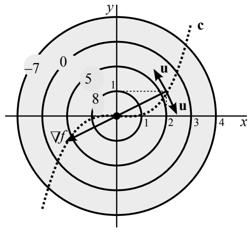
23. $\boxed{h(t)=f\left(e^t,\cos t\right)}$ $\quad h'=e^t f_x-\operatorname{sen} t\, f_y$,

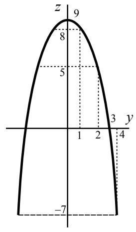
$h''=e^t(f_x)_t+e^t f_x-\operatorname{sen} t\,(f_y)_t-\cos t\, f_y=\boxed{e^{2t} f_{xx}-2\,e^t \operatorname{sen} t\, f_{xy}+\operatorname{sen}^2 t\, f_{yy}+e^t f_x-\cos t\, f_y}$

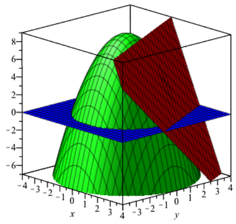
Si $f(x,y)=xy$, la expresión anterior nos da: $0-2\,e^t \operatorname{sen} t\cdot 1+0+e^t\cdot y\big|_{y=\cos t}-\cos t\cdot x\big|_{x=e^t}=-2\,e^t \operatorname{sen} t$.

Componiendo y derivando: $h(t)=e^t\cos t \to h'(t)=e^t(\cos t-\operatorname{sen} t)$, $h''(t)=e^t(\cos t-\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} t-\cos t)$

24. $\boxed{f(x,y)=9-x^2-y^2}$. a) $x^2+y^2=9-C$ circunferencias. $z=9-x^2$ parábola.







b) $\nabla f=(-2x,-2y)$. $\nabla f(2,1)=(-4,-2)$.

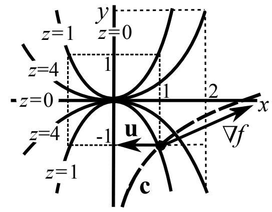
u perpendicular y $\|\mathbf{u}\|=1 \Rightarrow \mathbf{u}=\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{5}},\frac{\mp 2}{\sqrt{5}}\right)$.

c) $z=4-4(x-2)-2(y-1)=14-4x-2y$.

d) $\mathbf{c}(1)=(2,1)$, $\mathbf{c}'(t)=(2,3t^2)$, $\mathbf{c}'(1)=(2,3) \Rightarrow h'(1)=\nabla f(\mathbf{c}(1))\cdot\mathbf{c}'(1)=(-4,-2)\cdot(2,3)=-14$.

$\left[\text{O escrito en la forma: } \frac{df}{dt}\Big|_{t=1}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\mathbf{c}(1)}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=1}+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\mathbf{c}(1)}\frac{dy}{dt}\Big|_{t=1}\right]$. [Comprobando: $h(t)=9-4t^2-t^6 \to h'(1)=-8-6$].

25. $\boxed{f(x,y)=\frac{x^4}{y^2}}$ a) $f=0 \to x=0$ (e $y=0$), $f=1,4 \to y=\pm x^2$, $y=\pm\frac{1}{2}x^2$ (parábolas).



b) Las curvas de nivel muestran que f **no es continua en** $0 \Rightarrow f$ **no es diferenciable**.

[Cerca del origen hay puntos donde f vale $1,4,\dots$, o bien, $f(x,mx^2)=\frac{1}{m^2}$].

$f(x,0)=f(0,y)=0 \Rightarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. **Existen las parciales**.

c) $\nabla f=\left(\frac{4x^3}{y^2},-\frac{2x^4}{y^3}\right)$, $\nabla f(1,-1)=(4,2)$. Nos vale $\boxed{\bar{u}=(-1,0)}=-\mathbf{i}$, pues 4 es la $D_{\bar{u}}$ en la dirección de $\mathbf{i}$.

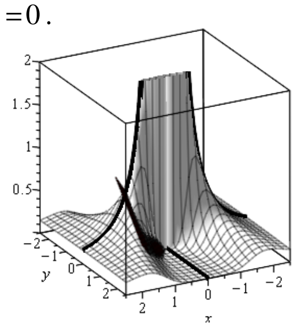
[Con más trabajo $\bar{u}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \to D_{\bar{u}}f(1,-1)=\frac{4a+2b}{\sqrt{a^2+b^2}}=-4 \Rightarrow b=0$ ó $b=\frac{4a}{3} \to \left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$].

d) $\bar{c}(0)=(1,-1)$, $\bar{c}'(0)=(1,1)$, $h'(0)=\nabla f(\bar{c}(0))\cdot\bar{c}'(0)=\boxed{6}$.

O bien: $h(t)=f\left(e^t,t-1\right) \to h'(t)=f_x\left(e^t,t-1\right)e^t+f_y\left(e^t,t-1\right) \xrightarrow{t=0} h'(0)=f_x(1,-1)+f_y(1,-1)=6$.

[Componiendo y derivando: $h(t)=\frac{e^{4t}}{(t-1)^2} \to h'(t)=\frac{2\,e^{4t}(2t-3)}{(t-1)^3} \xrightarrow{t=0} 6$].

26. $\boxed{f(x,y)=\frac{x^4}{3y^2+x^6}}$ a) $f(x,0)=\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0 \Rightarrow f_x(0,0)$ **no existe**. $f(0,y)=0 \Rightarrow f_y(0,0)=0$.



Como sobre $y=0$ la $f \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$, es **discontinua** en el origen.

[O bien: $f(x,mx^2)=\frac{1}{3m^2+x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3m^2}$ o $f(x,mx^3)=\frac{1}{(3m^2+1)x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$.

De acercarse por rectas no se saca nada: $f(x,mx)=\frac{x^2}{3m^2+x^4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$].

Por no existir una parcial o no ser continua, f **no es diferenciable** en $(0,0)$.

b) $\nabla f=\left(\frac{2x^3(6y^2-x^6)}{(3y^2+x^6)^2},-\frac{6x^4y}{(3y^2+x^6)^2}\right)$, $\nabla f(1,1)=\frac{1}{8}(5,-3)$. $\boxed{\bar{u}=\left(-\frac{5}{\sqrt{34}},\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}$ (opuesto a ∇f y unitario).

c) Plano tangente: $f(1,1)=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{4}+\frac{5}{8}(x-1)-\frac{3}{8}(y-1)$, o mejor, $\boxed{z=\frac{5x-3y}{8}}$.

d) $\bar{c}(0)=(1,1)$, $\bar{c}'(t)=\left(e^t,3e^{3t}\right)$, $\bar{c}'(0)=(1,3)$, $h'(0)=\nabla f\left(\bar{c}(0)\right)\cdot\bar{c}'(0)=\boxed{-\frac{1}{2}}$.

[Comprobando: $h(t)=\frac{e^{4t}}{3e^{6t}+e^{6t}}=\frac{1}{4}e^{-2t}$ $\to h'(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t} \underset{t=0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$].

27. $\boxed{f(x,y)=\cos(x+2y)+e^{x-y}}$ a) $\nabla f(0,0)=\left(-\operatorname{sen}(x+2y)+e^{x-y},-2\operatorname{sen}(x+2y)-e^{x-y}\right)\big|_{(0,0)}=(1,-1)$.

Plano tangente: $\boxed{z=2+x-y}$.

b) Vector unitario en la dirección de $\bar{v}$: $\bar{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $D_{\bar{u}}f(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\bar{u}=\boxed{\sqrt{2}}$.

En la dirección de ningún $\bar{u}$ puede valer 2 pues la derivada direccional máxima es $\|\nabla f\|$ que ha sido $\sqrt{2}$.

c) $f\left(\bar{c}(t)\right)=\cos(-2t+2t)-e^{-2t-t}=1+e^{-3t}$ y es $\bar{c}(0)=(0,0,2)$. $\bar{c}'(0)=\left(-2,1,-3e^{-3t}\right)\big|_{t=0}=(-2,1,-3)$.

Como la gráfica de f es una curva de nivel de g donde está $\bar{c}$ serán ortogonales: $\nabla g(0,0,1)=(-1,1,1)$.

28. $\boxed{x^3-x^2y+y^2-xz+z^2=1}$ a) $\nabla=\left(3x^2-2xy-x,\,2y-x^2,\,2z-x\right)\xrightarrow{(1,0,1)}(2,-1,1)$. $2(x-1)-y+z-1=0$, $z=3-2x+y$.

b) Por estar la curva en la superfice, $\mathbf{u}$ será $\perp$ a $\nabla=(2,-1,1)$ y a $\mathbf{v}=(1,1,0)$. $\nabla\times\mathbf{v}=(1,-1,-3)$, $\mathbf{u}=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}(1,-1,-3)$.

Como para $F(x,y,z)=xyz$ es $\nabla F=(yz,xz,zy)$, $\nabla F(\mathbf{a})=(1,0,1)$, $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}(1,-1,-3)\cdot(1,0,1)=\mp\frac{1}{\sqrt{11}}$.

29. $\boxed{\mathbf{g}(x,y,z)=\left(2x^2-y+3z^3,\,2y-x^2\right)}$ $\mathbf{Dg}=\begin{pmatrix}4x&-1&9z^2\\-2x&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{Dg}\,(2,-1,1)=\begin{pmatrix}8&-1&9\\-4&2&0\end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{f}(u,v)=\left(e^{u+2v},\,2u+v\right)}$ $\mathbf{Df}=\begin{pmatrix}e^{u+2v}&2e^{u+2v}\\2&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(2,-1,1)=(12,-6)\Rightarrow\mathbf{Df}(12,-6)=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$.

$\mathbf{Df}\ \mathbf{Dg}=\begin{pmatrix}0&3&9\\12&0&18\end{pmatrix}$.

$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y,z)=\left(e^{3y+3z^3},\,3x^2+6z^3\right)$, $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})=\begin{pmatrix}0&3e^{-}&9z^2e^{-}\\6x&0&18z^2\end{pmatrix}$, que en $(2,-1,1)$ $\nearrow$

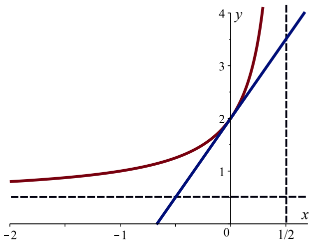
30. $\boxed{f(x,y)=\frac{x+y}{1+xy}}$ a) $f_x=\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$, $f_y=\frac{1-x^2}{(1+xy)^2}$, $\nabla f(0,2)=(-3,1)$.

Plano tangente: $z=2-3x+y-2=y-3x$.

Recta tangente, perpendicular al gradiente: $(x,y-2)\cdot(-3,1)=0\ \rightarrow\ y=3x+2$.

O directamente: $\frac{x+y}{1+xy}=2\ \rightarrow\ y=\frac{2-x}{1-2x}\ \rightarrow\ y'(0)=\frac{3}{(1-2x)^2}\Big|_{x=0}=3\ \rightarrow\ y=2+3x$.

O derivadas implícitas: $\frac{(1+y')(1+xy)-(x+y)(y+xy')}{(1+xy)^2}\Big|_{x=2,y=0}=1+y'-4=0\rightarrow y'(0)\overset{\uparrow}{=}3$.



b) Si $h(u,v)=f(u^3+v^2-1,\,e^v+1)$, es

$\mathbf{D}h(1,0)=\nabla h(1,0)=\nabla f(0,2)\mathbf{Dg}(1,0)=(-3,1)\begin{pmatrix}3\cdot1^2&2\cdot0\\0&e^0\end{pmatrix}=(-9,1)\ \Rightarrow\ D_{\mathbf{u}}h(1,0)=(-9,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)=-5\sqrt2$.

31. $\boxed{(y-2)u_y-xu_x=x^2y}$ $\begin{cases}s=xy-2x\\t=x\end{cases}$ $\begin{cases}u_y=xu_s\\u_x=(y-2)u_s+u_t\end{cases}\rightarrow u_t=-xy$, $\boxed{u_t=-2t-s}$ [De aquí sale la solución $u(s,t)=f(s)-t^2-st$].

Es solución $u(x,y)=f(xy-2x)+x^2-x^2y$: $u_x=(y-2)f'(xy-2x)+2x-2xy$, $u_y=xf'(xy-2x)-x^2\ \rightarrow$

$(y-2)u_y-xu_x=0-(y-2)x^2-x(2x-2xy)=x^2y$.

32. $\boxed{y^2u_{yy}-x^2u_{xx}=0}$ $\begin{cases}s=xy\\t=\frac{x}{y}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u_x=yu_s+\frac1y u_t\\u_y=xu_s-\frac{x}{y^2}u_t\end{cases}$, $\begin{cases}u_{xx}=y^2u_{ss}+2u_{st}+\frac{1}{y^2}u_{tt}\\u_{yy}=x^2u_{ss}-\frac{2x^2}{y^2}u_{st}+\frac{x^2}{y^4}u_{tt}+\frac{2x}{y^3}u_t\end{cases}$, $-4x^2u_{st}+\frac{2x}{y}u_t=0$, $u_{st}=\frac{1}{2xy}u_t$

EDP que se puede resolver y cuya solución se puede escribir en la forma que se pide comprobar $\rightarrow$ $\boxed{u_{st}-\frac{1}{2s}u_t=0}$.

$u(x,y)=f(xy)+x\,g\left(\frac{x}{y}\right)\ \rightarrow\ u_x=yf'(xy)+g\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}g'\left(\frac{x}{y}\right)$, $u_y=xf'(xy)-\frac{x^2}{y^2}g'\left(\frac{x}{y}\right)\ \rightarrow$

$u_{xx}=y^2f''(xy)+\frac1y g'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac1y g'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}g''\left(\frac{x}{y}\right)$, $u_{yy}=x^2f''(xy)+\frac{2x^2}{y^3}g'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^3}{y^4}g''\left(\frac{x}{y}\right)\rightarrow$

$y^2u_{yy}-x^2u_{xx}=x^2y^2f''(xy)-x^2y^2f''(xy)+\frac{2x^2}{y}g'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^3}{y^2}g''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{2x^2}{y}g'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x^3}{y^2}g''\left(\frac{x}{y}\right)=0$.

33. $\boxed{h(x,y,z)=g\left(u(x,y,z),v(x,y,z)\right)}$, con $u(x,y,z)=x^2+2yz$, $v(x,y,z)=y^2+2xz$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}&=\frac{\partial g}{\partial u}2x+\frac{\partial g}{\partial v}2z\\ \frac{\partial h}{\partial y}&=\frac{\partial g}{\partial u}2z+\frac{\partial g}{\partial v}2y\\ \frac{\partial h}{\partial z}&=\frac{\partial g}{\partial u}2y+\frac{\partial g}{\partial v}2x\end{aligned}\ \rightarrow\ \begin{aligned}&(y^2-xz)\frac{\partial h}{\partial x}+(x^2-yz)\frac{\partial h}{\partial y}+(z^2-xy)\frac{\partial h}{\partial z}\\&=2\left(xy^2-x^2z+x^2z-yz^2+yz^2-xy^2\right)\frac{\partial g}{\partial u}+2\left(y^2z-x^2z+x^2y-y^2z+x^2z-x^2y\right)\frac{\partial g}{\partial v}=\boxed{0}.\end{aligned}$$

34. $\boxed{u=f(x,y,z),\ x=s^2+t^2,\ y=s^2-t^2,\ z=2st}$ $F_s=2sf_x+2sf_y+2tf_z$, $F_t=2tf_x-2tf_y+2sf_z$.

$F_{ss}=4s^2f_{xx}+4s^2f_{yy}+4t^2f_{zz}+8s^2f_{xy}+8stf_{xz}+8stf_{yz}+2f_x+2f_y$,

$F_{st}=4stf_{xx}-4stf_{yy}+4stf_{zz}+4(s^2+t^2)f_{xz}+4(s^2-t^2)f_{yz}+2f_z$,

$F_{tt}=4t^2f_{xx}+4t^2f_{yy}+4s^2f_{zz}-8t^2f_{xy}+8stf_{xz}-8stf_{yz}+2f_x-2f_y$.

35. $\boxed{\mathbf{a}=(-1,0,3)}$, $\boxed{\mathbf{f}(x,y,z)=\left(xz,y^2,x\right)}$. a) i) $\mathbf{a}\times\mathbf{f}(\mathbf{a})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&0&3\\-3&0&-1\end{vmatrix}=(0,-10,0)$. ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{a})=0$, ángulo $\frac{\pi}{2}$.

iii) $\operatorname{div}\mathbf{f}=z+2y$. iv) $\nabla\left(\operatorname{div}\mathbf{f}\right)=(0,2,1)$. v) $\operatorname{rot}\mathbf{f}=(0,x-1,0)$. vi) $\mathbf{f}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{f}=(x-1)y^2$.

b) $z+2y=3$ es un plano (al que pertenece $\mathbf{a}$), con vector perpendicular $(0,2,1)$. La recta perpendicular será:

$\mathbf{x}=(-1,0,3)+t\,(0,2,1)=(-1,2t,3+t)$ que corta $z=5$ para $t=2\ \rightarrow$ punto $\boxed{(-1,4,5)}$.

36. $\boxed{\mathbf{f}(x,y,z)=\left(x^2,1,y^2\right),\ g(x,y,z)=z}$ a) $\operatorname{div}\mathbf{f}=2x$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ x^2&1&y^2\end{vmatrix}=(2y,0,0)$. $\nabla g=(0,0,1)$. $\Delta g=0$.

$\operatorname{rot}(\nabla g)=\mathbf{0}$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=0$ (sin necesidad de calcular nada). $\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g)=\nabla(y^2)=(0,2y,0)$.

$\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g)=\operatorname{rot}(1,-x^2,0)=(0,0,-2x)$. $\operatorname{rot}\left(\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g)\right)=\mathbf{0}$, $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g)\right)=0$ (de nuevo sin calcular).

b) $\operatorname{div}(g\,\mathbf{f})=g_xf_1+gf_{1x}+g_yf_2+gf_{2y}+g_zf_3+gf_{3z}=g(f_{1x}+f_{2y}+f_{3z})+(g_x,g_y,g_z)\cdot(g_1,g_2,g_3)=g\operatorname{div}\mathbf{f}+\nabla g\cdot\mathbf{f}$.

$\operatorname{rot}(g\,\mathbf{f})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ gf_1&gf_2&gf_3\end{vmatrix}=(g_yf_3+gf_{3x}-g_zf_2-gf_{2z},\,g_zf_1+gf_{1z}-g_xf_3-gf_{3x},\,g_xf_2+gf_{2x}-g_yf_1-gf_{1y})$

$=g(f_{3x}-f_{2z},f_{1z}-f_{3x},f_{2x}-f_{1y})+(g_x,g_y,g_z)\times(f_1,f_2,f_3)=g\operatorname{rot}\mathbf{f}+\nabla g\times\mathbf{f}$.

Comprobando:

$\operatorname{div}(g\,\mathbf{f})=2xz+y^2=z\,2x+(0,0,1)\cdot(x^2,1,y^2)$. $\operatorname{rot}(g\,\mathbf{f})=(2yz-1,\,x^2,0)=(2yz,0,0)+\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&0&1\\x^2&1&y^2\end{vmatrix}$.

37. $\boxed{\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=\left(xz^2,-x^2y,-y^2z\right)}$ $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}=z^2-y^2-x^2$ [$=0$ **cono**]. $\nabla\left(\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}\right)=(-2x,-2y,2z)\xrightarrow{(3,4,5)}2(-3,-4,5)$.

$\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}=(-2yz,2xz,-2xy)$.

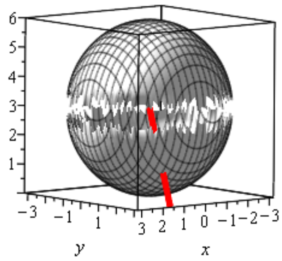
b) Plano tangente: $-3(x-3)-4(y-3)+5(z-5)=0$, $5z=3x+4y$ (pasa por el origen como en todo cono) $\left[\text{ó } z=\sqrt{x^2+y^2}\dots\right]$.

Recta normal: $\left(3(1-t),4(1-t),5(1+t)\right)$, que para $t=1$ corta el eje z (esperable en cono) en $(0,0,10)$.

c) $\bar{\mathrm{c}}\,'(1)=(0,-2,5)$. $\bar{\mathrm{c}}(1)=(3,4,5)$. $\mathbf{D}\bar{\mathrm{f}}=\begin{pmatrix}z^2&0&2xz\\-2xy&-x^2&0\\0&-2yz&-y^2\end{pmatrix}$. $\bar{\mathrm{c}}\,'(1)=\mathbf{D}\bar{\mathrm{f}}(\bar{\mathrm{c}}(1))\,\bar{\mathrm{c}}'(1)=(150,18,0)$.

38. $\boxed{\bar{\mathrm{f}}(x,y,z)=\left(xz^2,yx^2,zy^2-3z^2\right)}$ a) i) $\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}=z^2+x^2+y^2-6z$. ii) $\nabla\left(\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}\right)=2(x,y,z-3)$.

iii) $\operatorname{rot}\bar{\mathrm{f}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ xz^2&yx^2&zy^2-3z^2\end{vmatrix}=2(yz,xz,xy)$. iv) $\Delta\left(\operatorname{div}\bar{\mathrm{f}}\right)=6$.



b) $x^2+y^2+(z-3)^2=9$ es la superficie esférica de centro $(0,0,3)$ y radio 3, y la recta perpendicular a ella en cualquier punto pasará por su centro.

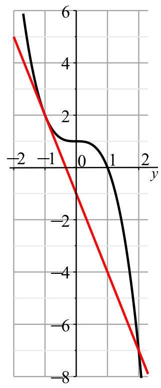
Un vector normal a la superficie se obtiene de ii): $(1,2,-2)$.

$\mathbf{x}=(1,2,1)+t\,(1,2,-2)=(1+t,2+2t,1-2t)$ que corta $x=0$ para $t=-1$

$\to$ punto de corte $\boxed{(0,0,3)}$ que habíamos anticipado.

39. $\boxed{\mathbf{f}(x,y,z)=\left(xz,y^2,2xz\right)}$ y $\boxed{\mathbf{c}(t)=\left(1,t,1-t^3\right)}$ a) i) $\operatorname{div}\mathbf{f}=\boxed{2x+2y+z}$, ii) $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\boxed{(0,x-2z,0)}$,

iii) $\mathbf{Df}=\boxed{\begin{pmatrix}z&0&x\\0&2y&0\\2z&0&2x\end{pmatrix}}$, iv) $J\mathbf{f}=\boxed{0}$, v) $\mathbf{c}'(t)=\left(0,1,-3t^2\right)$, $\boxed{\mathbf{c}'(-1)=(0,1,-3)}$.



b) $\mathbf{c}(-1)=(1,-1,2)$. $\mathbf{c}'(-1)=\mathbf{Df}\left(\mathbf{c}(-1)\right)\mathbf{c}'(-1)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-2&0\\4&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-3\\-2\\-6\end{pmatrix}}$ [se suele escribir como vector fila].

c) Recta tangente (si $t=-1$): $\boxed{(1,s-1,2-3s)}$. Corta otra vez si $t=s-1$, $1-t^3=2-3s$.

$\to t^3-3t-2=0 \to t=2$ $\left[\text{y } t=-1 \text{ doble}\right]$. El otro punto es $\boxed{(1,2,-7)}$.

[A la derecha, el dibujo de la curva y la tangente $\left(z=1-y^3,\ z=-1-3y\right)$, sobre el plano $x=1$].

40. a) $\boxed{u=x^3-3xy^2}$ $u_x=3x^2-3y^2$, $u_{xx}=6x$, $u_y=3x^2-6xy$, $u_{yy}=-6x$, $\Delta u=6x-6x=0$.

b) $\boxed{u=\operatorname{sen}x\operatorname{ch}y}$ $u_x=\cos x\operatorname{ch}y$, $u_{xx}=-\operatorname{sen}x\operatorname{ch}y$, $u_y=\operatorname{sen}x\operatorname{sh}y$, $u_{yy}=\operatorname{sen}x\operatorname{ch}y$, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$.

c) $\boxed{u=\arctan\frac{y}{x}}$ $u_x=\frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $u_{xx}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $u_y=\frac{1/x}{1+(y/x)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$, $u_{yy}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\Delta u=0$.

Pero en polares la función es $f(r,\theta)=\theta$ $\left[\text{o } f(r,\theta)=\theta+\pi\right]$ con lo que $\Delta f=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=0$.

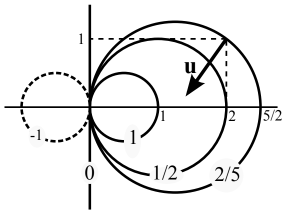
d) $\boxed{u=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}$ Pide usar polares: $f(r,\theta)=\frac{r^2(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)}{r^4}=r^{-2}\cos 2\theta$, En cartesianas bastante más largo:

$\Delta f=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=\left(6r^{-4}-2r^{-4}-4r^{-4}\right)\cos 2\theta=0$.

$u_x=\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $u_{xx}=\frac{6(x^4-6x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^4}$, $u_y=\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $u_{yy}=-\frac{6(x^4-6x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^4}$, $\Delta u=0$.

41. $\boxed{f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}}$ $C=0\ \to\ x=0$. $\frac{x}{x^2+y^2}=C\ \to\ x^2+y^2=\frac{x}{C}$, $\big(x-\frac{1}{2C}\big)^2+y^2=\frac{1}{4C^2}$ si $C\neq 0$,

circunferencias de centro $\big(\frac{1}{2C},0\big)$ que pasan por $(0,0)$ y $\big(\frac{1}{C},0\big)$.



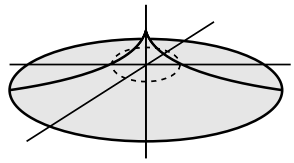
$\nabla f(x,y)=\big(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\big)$, $\nabla f(2,1)=\big(-\frac{3}{25},-\frac{4}{25}\big)$, de $\|\ \|=\frac{1}{5}$. $\boxed{\mathbf{u}=\big(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\big)}$.

$\Delta f=-2x\big(x^2+y^2\big)^{-2}+4x\big(x^2-y^2\big)\big(x^2+y^2\big)^{-3}-2x\big(x^2+y^2\big)^{-2}+8xy^2\big(x^2+y^2\big)^{-3}$

$=4x\big(x^2+y^2\big)^{-3}\big[-x^2-y^2+x^2-y^2+2y^2\big]=\boxed{0}$.

O en polares: $f(r,\theta)=\frac{\cos\theta}{r}$, $f_r=-\frac{\cos\theta}{r^2}$, $f_{rr}=\frac{2\cos\theta}{r^3}$, $f_{\theta\theta}=-\frac{\cos\theta}{r}$, $\Delta f=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=0$.

42. $\boxed{f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/4}}=1-r^{1/2}$. De revolución. $x=0\ \to\ z=1-y^{1/2}$.

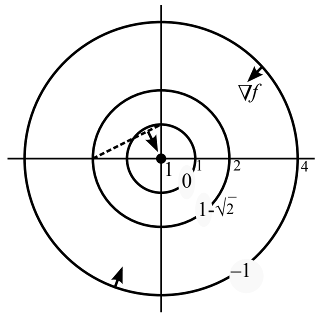


$\nabla f=\big(-\frac{x}{2}(x^2+y^2)^{-3/4},-\frac{y}{2}(x^2+y^2)^{-3/4}\big)$

$=f_r\,\mathbf{e}_r=-\frac{1}{2}r^{-1/2}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/4}(x,y)$.

∇f continuo en $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}\ \Rightarrow\ f$ diferenciable en $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$.

No diferenciable en $(0,0)$. Por ejemplo, no existe $f_x(0,0)=\frac{d}{dx}(1-x^{1/2})\big|_{x=0}$.



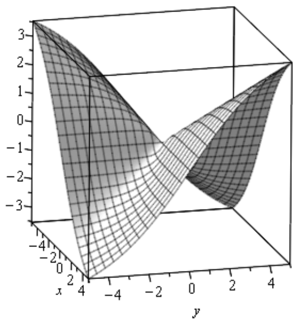
$\Delta f=f_{rr}+\frac{f_r}{r}=\frac{1}{4}r^{-3/2}-\frac{1}{2}\frac{r^{-1/2}}{r}=-\frac{1}{4}r^{-3/2}\ \Rightarrow\ \Delta f(0,1)\underset{r=1}{=}-\frac{1}{4}$.

Como $\|\nabla f\|=\frac{1}{2}r^{-1/2}$ el máximo de la derivada direccional será en el punto del segmento (de la recta $y=1+\frac{x}{2}$) más próximo al origen:

$x^2+y^2=\frac{5x^2}{4}+x+1$ es mínimo si $\frac{5x}{2}+1=0\ \to\ x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{4}{5}\ \Rightarrow$

máximo crecimiento en $\big(-\frac{2}{5},\frac{4}{5}\big)$ en la dirección de $\big(\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5}\big)$.

43. $\boxed{g(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ a) $g(r,\theta)=r\cos\theta\operatorname{sen}\theta$, $\big|g(r,\theta)-0\big|\le r\underset{r\to0}{\longrightarrow}0$, g **continua** en $\mathbf{0}$.



O bien: $\big|g(x,y)-0\big|=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$, si $\|(x,y)\|<\delta=\varepsilon$.

Existen las parciales: $g(x,0)=g(0,y)=0\ \Rightarrow\ g_x(0,0)=g_y(0,0)=0$.

Podemos ver que g **no es diferenciable** en ese punto de varias formas:

$g(x,x)=\frac{x^2}{|x|\sqrt2}=\frac{|x|}{\sqrt2}$ no derivable en $x=0\ \Rightarrow$ no existe $D_{(1,1)}g(0,0)$.

$\frac{g(\mathbf{x})-0-\mathbf{0}\cdot\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}=\frac{xy}{x^2+y^2}$ no tiene límite en $\mathbf{0}$, pues sobre $y=mx$ vale $\frac{m}{1+m^2}$.

b) $g_x(x,y)=y(x^2+y^2)^{-1/2}-x^2y(x^2+y^2)^{-3/2}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $g_y(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ (cambiando papeles).

$g_{xx}=-\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $g_{yy}=-\frac{3x^2y}{(x^2+y^2)^{5/2}}\ \Rightarrow\ \Delta g=-\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. En polares:

$g(r,\theta)=\frac{r}{2}\operatorname{sen}2\theta$, $g_r=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta$, $g_{rr}=0$, $g_{rr}=-2r\operatorname{sen}2\theta$, $\Delta g=\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}=-\frac{3}{2r}\operatorname{sen}2\theta=-\frac{3\,r\operatorname{sen}\theta\,r\cos\theta}{r^3}$.

c) $\nabla g(4,3)=\big(\frac{27}{125},\frac{64}{125}\big)$. $D_{\mathbf{v}}g(4,3)=\big(\frac{27}{125},\frac{64}{125}\big)\cdot(2,-1)=-\frac{2}{25}<0\ \Rightarrow\ g$ **decrece** en esa dirección.

Como la recta ha de ser perpendicular al gradiente: $(27,64)\cdot(x-4,y-3)=0\ \to\ \boxed{y=\frac{75}{16}-\frac{27}{64}x}$.

$\Big[$Es la curva con $C=\frac{12}{5}\ \to\ 25x^2y^2=144(x^2+y^2)$. Derivando implícitamente: $y'(4)=\frac{x(144-25y^2)}{y(25x^2-144)}\Big|_{(4,3)}=-\frac{27}{64}$ ... $\Big]$.

d) $\bar c(2)=(4,3)$, $\bar c'(t)=(2t,3)$, $\bar c'(2)=(4,3)$, $h'(2)=\nabla g\big(\bar c(2)\big)\cdot\bar c'(2)=\big(\frac{27}{125},\frac{64}{125}\big)\cdot(4,3)=\frac{300}{125}=\boxed{\frac{12}{5}}$.

[Componiendo y derivando las cuentas son bastante más largas].

44. Si $\boxed{\bar r(x,y)=(x,y),\ r=\|\bar r\|}$, $\nabla\big(\frac{1}{r}\big)=f_r\,\mathbf{e}_r=-\frac{1}{r^2}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)=-\frac{\bar r}{r^3}$, $\nabla\big(\log r\big)=\frac{1}{r}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)=\frac{\bar r}{r^2}$.

$\Delta\big(\frac{1}{r}\big)=f_{rr}+\frac{f_r}{r}=\frac{2}{r^3}-\frac{1}{r^3}=\frac{1}{r^3}$, $\Delta\big(\log r\big)=-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}=0$.

En cartesianas más largo: $\nabla\big([x^2+y^2]^{-1/2}\big)=-[x^2+y^2]^{-3/2}(x,y)$. $\nabla\big(-\frac{1}{2}\log[x^2+y^2]\big)=[x^2+y^2]^{-1}(x,y)$.

$\Delta\big([x^2+y^2]^{-1/2}\big)=\frac{2x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}+\frac{2y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}=\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. $\Delta\big(-\frac{1}{2}\log[x^2+y^2]\big)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$.

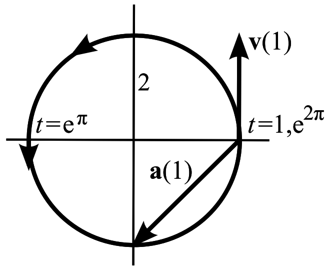
45. En apuntes $\mathbf{c}(t)=\big(r(t)\cos\theta(t), r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\big)=r(t)\,\mathbf{e}_r(t)$, $\mathbf{c}'(t)=\mathbf{v}(t)=r'\,\mathbf{e}_r+r\,\theta'\,\mathbf{e}_\theta$. Derivando de nuevo:

$$\mathbf{c}''(t)=\mathbf{a}(t)=r''\,\mathbf{e}_r+r'\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\theta'+r'\theta'\mathbf{e}_\theta+r\theta''\mathbf{e}_\theta+r'\theta'\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dr}\theta' \underset{\uparrow}{=} \boxed{\big(r''-r(\theta')^2\big)\,\mathbf{e}_r+(r\theta''+2r'\theta')\,\mathbf{e}_\theta}\,.$$

pues $\frac{d}{d\theta}\mathbf{e}_r=\mathbf{e}_\theta$, $\frac{d}{d\theta}\mathbf{e}_\theta=\frac{d}{d\theta}(-\mathrm{sen},\cos)=-(\cos,\mathrm{sen})=-\mathbf{e}_\theta$

Si $\boxed{r(t)=2\,,\ \theta(t)=\log t}$, $t\in[1,\mathrm{e}^{2\pi}]$, nos movemos sobre la circunferencia de radio 2, dando 1 vuelta.

En este caso nos queda: $\boxed{\mathbf{v}(t)=\frac{2}{t}\,\mathbf{e}_\theta\,,\ \ \mathbf{a}(t)=-\frac{2}{t^2}\big(\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_\theta\big)}$ $\to$



$\mathbf{v}(1)=2\,\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{v}(\mathrm{e}^{\pi})\approx 0.09\,\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{v}(\mathrm{e}^{2\pi})\approx 0.004\,\mathbf{e}_\theta$

$\mathbf{a}(1)=2\big(\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_\theta\big)$, $\mathbf{a}(\mathrm{e}^{\pi})\approx 0.004\big(\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_\theta\big)$, $\mathbf{a}(\mathrm{e}^{2\pi})\approx 0.0.000007\big(\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_\theta\big)$

[movimiento circular claramente desacelerado]

En cartesianas: $\mathbf{c}(t)=\big(2\cos(\log t), 2\,\mathrm{sen}(\log t)\big)$.

$\mathbf{v}(t)=\big(-\frac{2}{t}\cos(\log t), \frac{2}{t}\,\mathrm{sen}(\log t)\big)=-\frac{2}{t}(-\,\mathrm{sen}\,\theta,\cos\theta)$.

$\mathbf{a}(t)=\big(\frac{2}{t^2}\,\mathrm{sen}(\log t)-\frac{2}{t^2}\cos(\log t), -\frac{2}{t^2}\cos(\log t)-\frac{2}{t^2}\,\mathrm{sen}(\log t)\big)=-\frac{2}{t^2}\big[(\cos,\mathrm{sen})+(-\,\mathrm{sen},\cos)\big]$.