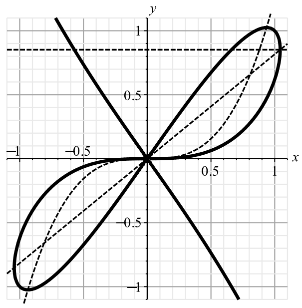
Soluciones de problemas de Cálculo (23/24) 3. Funciones implícitas. Máximos y mínimos.

1. a) $F(x,y)=\boxed{2x^2y-y^3-x^5=0}$. $F_x=x(4y-5x^3)$, $F_y=2x^2-3y^2$. $F_y(1,1)=-1$.



Por tanto, define función $y(x)\in C^1$ cerca de $(1,1)$. Derivando impícitamente:

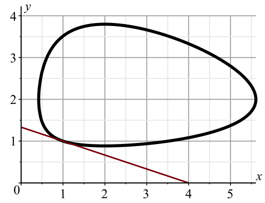
$(4xy-5x^4)+(2x^2-3y^2)y'=0$, $y'(1)=\frac{4xy-5x^4}{3y^2-2x^2}\Big|_{(1,1)}=-1 \to y=1-(1-x)=2-x$.

Otra derivada: $0=4(y+xy'-5x^3)+(4x-6yy')y'+(2x^2-3y^2)y'' \xrightarrow[y'=-1]{(1,1)} y''(1)=-30$.

Problemas con $y(x)$ si $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x \to (0,0)$ y $\pm\left(\frac23 6^{1/4},\frac29 6^{3/4}\right)\approx\pm(1.04,0.85)$.

Problemas con $x(y)$ si $x=0\to(0,0)$ ó $y=\frac54x^3 \to \pm\left(\frac25 30^{1/4},\frac{2}{25}30^{3/4}\right)\approx\pm(0.94,1.03)$.

b) $G(x,y)=\boxed{x-2\log x+3y-6\log y=4}$. $G_x=\frac{x-2}{x}$, $G_y=\frac{3(y-2)}{y}\xrightarrow{(1,1)}-3\neq0$, $y(x)\in C^1$.

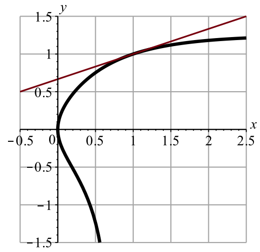


$(1-\frac2x)+(3-\frac6y)y'=0$, $y'(1)=-\frac13 \to y=\frac{4-x}{3}$. $\frac{2}{x^2}+\frac{6}{y^2}(y')^2+(3-\frac6y)y''=0\to y''(1)=\frac89$.

Problemas con $y(x)$ si $y=2\to x-2\log x=6\log 2-2$. Con ordenador: $x\approx0.42$, 5.61 .

Problemas con $x(y)$ si $x=2 \to y-2\log y=\frac23(\log 2+1)$. Con ordenador: $y\approx0.89$, 3.80 .

c) $H(x,y)=\boxed{y^2-x\,e^{x-xy}=0}$. $H_x=(xy-x-1)\,e^{x-xy}$, $H_y=2y+x^2e^{x-xy}\xrightarrow{(1,1)}3$, $y(x)\in C^1$.



$(xy-x-1)\,e^{x-xy}+(2y+x^2e^{x-xy})y'=0$, $y'(1)=\frac13\to y=\frac{x+2}{3}$ recta tangente.

$\big[(y+xy'-1)+(xy-x-1)(1-y-xy')\big]e^{x-xy}+\big[2y'+\big(2x+x^2(1-y-xy')\big)e^{x-xy}\big]y'$

$+(2y+x^2e^{x-xy})y''=0 \to y''(1)=-\frac{13}{27}$.

$(0,0)$ es un punto claro de la curva donde no se aplica el teorema, pues $H_y(0,0)=0$.

Otros son complicados. Para $y(x)$: $e^{x-xy}=-\frac{2y}{x^2}\to y^2+\frac{2y}{x}=0$, $y=-\frac2x$, $x^3e^{x+2}=4$ (y ordenador).

Para $x(y)$ si $y=1+\frac1x \to$ e$-1x^3-x^2-2x-1$ (que de nuevo exige ordenador) .

2. a) $\boxed{F(x,y)=e^{x+y}-2y}=1+(x+y)+\frac12(x+y)^2+\cdots-2y=\boxed{1+x-y+\frac12x^2+xy+\frac12y^2+\cdots}$ (derivar también sería fácil: $F_{xx}=F_{xy}=F_{yy}=e^{x+y}$).

b) $(u,v)=(1,1)\to(x,y)=(0,0)$, $F_u=F_x+F_y \xrightarrow{(0,0)} 1-1=0$, $F_v=-3v^2F_x+F_y \longrightarrow -3\cdot1-1=-4$.

O en forma matricial: $\nabla h(1,1)=\nabla F(0,0)\begin{pmatrix}1&-3v^2\\1&1\end{pmatrix}_{(1,1)}=(1,-1)\begin{pmatrix}1&-3\\1&1\end{pmatrix}=\boxed{(0,-4)}$.

c) $F_y=e^{x+y}-2$, $F_y(0,0)=-1\neq0 \Rightarrow$ define $y(x)$. $e^{x+y}(1+y')-2y'=0 \to y'=\frac{e^{x+y}}{2-e^{x+y}}\xrightarrow{(0,0)}1\to\boxed{y=x}$.

$F(0,0)=1$ (es de la curva) $F_x=e^{x+y}$, $y'=-\frac{F_x}{F_y}$ lleva a lo mismo ↗

Problemas si $e^{x+y}=2$, que llevado a $F=1$ nos da $2-2y=1$, $\boxed{y=\frac12}$. $e^{x+1/2}=2$, $\boxed{x=\ln 2-\frac12}$.

[Como $F_x\neq0$ La x siempre se puede poner siempre como función derivable de y , e incluso es calculable].

3. $\boxed{x^2-3y^2+2z^2-yz+y=0}$. $F_z=4z-y$. Cuando $y=4z$ el teorema de la función implícita no garantiza $z(x,y)$.

Se puede resolver, $z=\frac y4\pm\frac14\sqrt{25y^2-8x^2-8y}$, y sobre ese plano están las $\pm\sqrt{\ }$.

Derivando implícitamente: $2x+4zz_x-yz_x=0\to z_x=\frac{2x}{y-4z}$. $-6y+4zz_y-z-yz_y+1=0\to z_y=\frac{1-6y-z}{y-4z}$.

En $(1,1,1)$ estas parciales valen: $z_x(1,1,1)=-\frac23$, $z_y(1,1,1)=2$. Plano tangente: $z=1-\frac23(x-1)+2(y-1)$.

Plano que también se puede hallar: $\nabla F=(2x,1-6y-z,4z-y)\xrightarrow{(1,1,1)}(2,-6,3)$. $(2,-6,3)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$.

4. $\boxed{F(x,y,z)=x^3-2yz+e^xz^2}$ a) $\nabla F=\big(3x^2+z^2e^x,-2z,2ze^x-2y\big)\xrightarrow{(0,1,2)}2(2,-2,1)$.

Plano tangente: $(2,-2,1)\cdot(x,y-1,z-2)=0$. $\boxed{z=2y-2x}$.

b) $F\in C^1$, $F(0,1,2)=0$, $F_z(0,1,2)=2\neq0 \Rightarrow \exists z(x,y)$ por el teorema de la función implícita.

Derivando implícitamente: $3x^2-2yz_x+e^xz^2+2e^xzz_x=0$, $z_x=\frac{3x^2+z^2e^x}{2(y-ze^x)}\Big|_{(0,1,2)}=\boxed{-2}$ [o bien $z_x=-\frac{F_x}{F_z}$].

[Coincide con **a**). Más largo es derivar $z=e^{-x}\big(y+\sqrt{y^2-x^3e^x}\big)$].

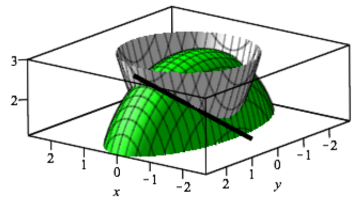
c) Perpendicular al vector y al gradiente en el punto es $(1,0,1)\times(2,-2,1)=(2,1,-2)\to\boxed{\bar u=\left(\frac23,\frac13,-\frac23\right)}$ [o $-\bar u$].

[O resolviendo $\begin{matrix}a+c=0&\to&c=-a\\2a-2b+c=0&&a=2b\end{matrix}$, vector de la forma $(2b,b,-2b)$ de módulo $9|b|$].

[hasta aquí para el control 1]

5. a) $\boxed{\begin{array}{l} F=x^2+y^2-z=0 \\ G=4x^2+y^2+z^2=9 \end{array}}$ $\Delta=\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix}=2y(2z+1)\neq 0 \ \Rightarrow$

en $(-1,1,2)$ define $\mathbf{c}(x)=\big(x,y(x),z(x)\big)$, $y,z\in C^1$.



$$\begin{array}{l} 2x+2yy'-z'=0 \\ 2(4x+yy'+zz')=0 \end{array} \xrightarrow{(-1,1,2)} \begin{array}{l} -2+2y'-z'=0 \\ -4+y'+2z'=0 \end{array} \rightarrow \ \mathbf{c}'(-1)=\tfrac{1}{5}(5,8,6)\,.$$

Recta tangente: $(5t-1,8t+1,6t+2)$.

Vector tangente de otra forma: $\nabla F\times\nabla G=(2x,2y,-1)\times 2(4x,y,z)\big|_{(-1,1,2)}=(-2,2,-1)\times 2(-4,1,2)=2(5,8,6)$.

b) $\boxed{\begin{array}{l} F=y^2+2xzu+u^2=4 \\ G=yzu+x-uv=1 \end{array}}$ $\Delta=\begin{vmatrix} \partial F/\partial u & \partial F/\partial v \\ \partial G/\partial u & \partial G/\partial v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2(xz+u) & 0 \\ yz-v & -u \end{vmatrix}=-2u(xz+u)\big|_{(1,1,1,1,1,)}=-6\neq 0 \ \Rightarrow$

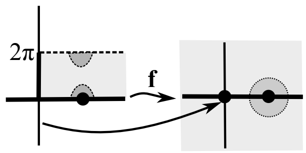
define $u(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$ de C^1 cerca de $(1,1,1,1,1)$.

Para hallar $v_y(1,1,1)$ derivamos ambas expresiones implícitamente respecto a y :

$$\begin{array}{l} 2y+2xzu_y+2uu_y=0 \\ zu+yzu_y-vu_y-uv_y=0 \end{array} \xrightarrow{(1,1,1,1,1)} \begin{array}{l} 2+2u_y+2u_y=0 \\ 1+u_y-u_y-v_y=0 \end{array} \rightarrow \ u_y(1,1,1)=1 \ \big[\text{y } v_y(1,1,1)=\tfrac{1}{2}\big].$$

[Se pueden despejar en este caso u y v explícitamente. De la primera: $u=-xz\pm\sqrt{x^2z^2-y^2+4}$,
que llevada a la segunda: $v=yz+\frac{x-1}{u}=yz+\frac{x-1}{-xz\pm\sqrt{x^2z^2-y^2+4}}$].

6. a) $\boxed{\begin{array}{l} x=u\cos v \\ y=u\operatorname{sen} v \end{array}}$ cambio a polares $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=u=0$ cuando $u=0$. ¿Por qué? Toda la recta $u=0$ se convierte en $(0,0)$ (para cualquier ángulo v).



Para el resto de puntos hay inversa local. Claramente no hay inversa global, hay muchos puntos con la misma imagen: $\mathbf{f}(u,v)=\mathbf{f}(u,v+2k\pi)=\mathbf{f}\big(-u,v+[2k+1]\pi\big)$.

Si nos limitamos a $u>0$, $v\in[0,2\pi)$, la imagen es $\mathbf{R}^2$ y sólo falla la inyectividad en $u=0$. Pero la $\mathbf{f}^{-1}$ no es continua en $u=0$ (puntos no interiores). [Para todo intervalo de ángulos que escojamos se tiene el mismo problema].

Calculando u_x : $\begin{array}{l} 1=\cos v\, u_x-u\operatorname{sen} v\, v_x \\ 0=\operatorname{sen} v\, u_x+\cos v\, v_x \end{array} \xrightarrow[1^a\times c+2^a\times s]{} \cos v=u_x$. [Claro, $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $u_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos v$].

b) $\boxed{\begin{array}{l} x=u \\ y=v+u^2 \end{array}}$ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. Hay inversa local en cada punto, y la inversa global se calcula fácimente y queda definida de forma única: $u=x \ \rightarrow \ v=y-x^2$.

[Podemos ver que es inyectiva directamente a partir de la definición (no hay los atajos de derivadas de $\mathbf{R}$).
De $(x,y)=(x_*,y_*)$ se debe deducir que $(u,v)=(u_*,v_*)$: $x=x_* \Leftrightarrow u=u_*$; entonces: $v+u^2=v_*+u_*^2 \Rightarrow v=v_*$].

Para hallar u_x : $\begin{array}{l} 1=u_x \\ 0=v_x+2uu_x \end{array} \rightarrow \ u_x=1$ (y además $v_x=-2u$). [Comprobando, $u_x=1$, $v_x=-2x=-2u$].

c) $\boxed{\begin{array}{l} x=v^2-u^2 \\ y=uv \end{array}}$ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -2u & 2v \\ v & u \end{vmatrix}=-2(u^2+v^2)\neq 0$ si $(u,v)\neq(0,0)$. En el resto de los puntos hay inversa local.

No hay inversa global, pues, por ejemplo, $\mathbf{f}(u,v)=\mathbf{f}(-u,-v)$.

$$\begin{array}{l} 1=2vv_x-2uu_x \\ 0=v\,u_x+u\,v_x \ \rightarrow \ v_x=-\frac{v}{u}u_x \nearrow \end{array} \ \tfrac{1}{2}=-\tfrac{v^2}{u}u_x-uu_x \searrow \ u_x=-\frac{u}{2(u^2+v^2)} \quad \Big(\text{y } v_x=\frac{v}{2(u^2+v^2)}\Big).$$

[Se podrían dar expresiones de u y v resolviendo ecuaciones bicuadradas y discutiendo casos].

d) $\boxed{\begin{array}{l} x=\frac{u^2}{u^2+v^2} \\ y=\frac{v^2}{u^2+v^2} \end{array}}$ $x_u=\frac{2uv^2}{(u^2+v^2)^2}$, $x_v=\frac{-2u^2v}{(u^2+v^2)^2}$, $y_u=\frac{-2uv^2}{(u^2+v^2)^2}$, $y_v=\frac{2u^2v}{(u^2+v^2)^2}$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{4u^2v^2}{(u^2+v^2)^4}\begin{vmatrix} v & -u \\ -v & u \end{vmatrix}=0$.

Nunca hay inversa local. $\mathbf{f}$ lleva cada recta a un solo punto: $\mathbf{f}(u,mu)=\big(\frac{1}{1+m^2},\frac{m^2}{1+m^2}\big)$.

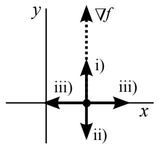
[Como no hay inversa, no tiene sentido hallar u_x].

e) $\boxed{\begin{array}{l} x=e^{v+w} \\ y=u-w \\ z=u-v \end{array}}$ $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} 0 & e^{v+w} & e^{v+w} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-2e^{v+w}\neq 0$. Inversa local en cada punto. Calculamos la inversa global:

$w=u-y$, $v=u-z \ \rightarrow \ x=e^{2u-y-z}$, $u=\frac{1}{2}(\ln x+y+z)$, $v=\frac{1}{2}(\ln x+y-z)$, $w=\frac{1}{2}(\ln x-y+z)$.

Entonces: $u_x=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2e^{v+w}}$, pero lo hacemos también directamente: $\begin{array}{l} 1=e^{v+w}(v_x+w_x) \\ 0=u_x-w_x \\ 0=u_x-v_x \end{array} \rightarrow \ 1=2u_xe^{v+w}$, $u_x=\frac{1}{2e^{v+w}}$.

7. $\boxed{f(x,y)=x\,\mathrm{sen}\,2y}$ $\nabla f=(\mathrm{sen}\,2y,\,2x\cos 2y)$. $\nabla f(1,0)=(0,2)$. $D_{\mathbf{v}}f(1,0)=(0,2)\cdot\mathbf{v}$.



i) Es máxima en la dirección y sentido del gradiente: $\mathbf{v}=(0,1)$ (y es $D_{\mathbf{v}}=2$).

ii) Es mínima en sentido opuesto: $\mathbf{v}=(0,-1)$ (y entonces $D_{\mathbf{v}}=-2$).

iii) Es 0 en sentido perpendicular al gradiente: $\mathbf{v}=(1,0)$ o $\mathbf{v}=(-1,0)$.

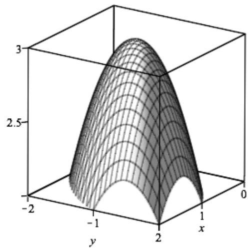
iv) $(0,2)(u,v)=2v=1 \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{2}$. $u^2+v^2=1 \;\Rightarrow\; u^2=\frac{3}{4}$. Dos posibles vectores: $\mathbf{v}=\big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\big)$ o $\mathbf{v}=\big(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\big)$.

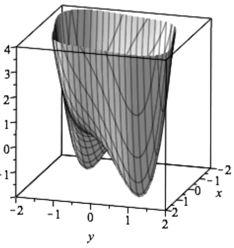
Para hallar su desarrollo de Taylor lo mejor es desarrollar el seno: $f(x,y)=x\big[2y-\frac{8}{6}y^3+\cdots\big]=\boxed{2xy+\cdots}$.

$\big[$Mucho más largo: $f_x=\mathrm{sen}\,2y\big|_{(0,0)}=0$, $f_y=2x\cos 2y\big|_{(0,0)}=0$, $f_{xx}=0$, $f_{xy}=2\cos 2y\big|_{(0,0)}=2$, $f_{yy}=4x\cos 2y\big|_{(0,0)}=0\big]$.

f se parece cerca de (0,0) a $g(x,y)=2xy$ (silla de montar), y no tiene ni máximo ni mínimo local en ese punto.

8. a) $\boxed{f(x,y)=3x-3y-x^2+xy-y^2}$ $\begin{array}{l} f_x=3-2x+y=0 \\ f_y=-3+x-2y=0 \end{array} \to (1,-1)$.





Máximo: $f_{xx}=-2<0$, $f_{yy}=-2$, $f_{xy}=1$, $Hf=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}>0$.

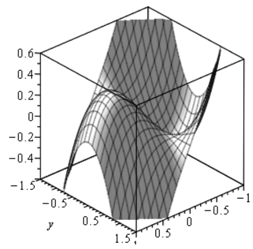
b) $\boxed{g(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2}$ $\begin{array}{l} g_x=4x^3-2(x+y)=0 \\ g_y=4y^3-2(x+y)=0 \end{array} \to 4x^3=4y^3$,

$y=x$, $4x^3-4x=0 \to (0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$ puntos críticos.

$g_{xx}=12x^2-2$, $g_{yy}=12y^2-2$, $g_{xy}=-2$. En $(\pm1,\pm1)$ es $g_{xx}=10>0$, $Hg=\begin{vmatrix}10 & -2\\ -2 & 10\end{vmatrix}>0$. Mínimos locales.

En $(0,0)$ es $Hg=0$ y hay que verlo directamente. $g(x,x)=2x^4-4x^2$, $g(x,-x)=2x^4$. Punto silla.

c) $\boxed{h(x,y)=x-x^3-xy^2}$ $\begin{array}{l} h_x=1-3x^2-y^2=0,\ y=\pm1,\ x=\pm1/\sqrt{3} \\ h_y=-2xy=0,\ x=0\nearrow,\ y=0\nearrow \end{array} \to (0,\pm1)$, $\big(\frac{\pm1}{\sqrt{3}},0\big)$.



$Hh=\begin{vmatrix}-6x & -2y\\ -2y & -2x\end{vmatrix}=4(x^2-3y^2)$ es negativo en $\boxed{(0,\pm1)}$ y son **sillas** (y la h vale 0).

Los otros serán máximos o mínimos. Viendo el signo de h_{xx} :

$\boxed{(1/\sqrt{3},0)}$ es **máximo** y $\boxed{(-1/\sqrt{3},0)}$ es **mínimo** (sólo locales).

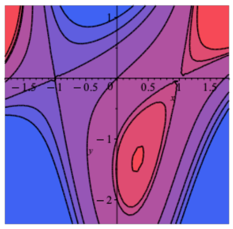
d) $\boxed{k(x,y)=2y^3+3x^2y^2-6xy-6y}$ $\begin{array}{l} k_x=6y(xy-1)=0,\ y=0,\ xy=1\searrow \\ k_y=6(y^2+x^2y-x-1)=0\quad x=-1,\ y=\pm1 \end{array}$, $(-1,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

$H=36\begin{vmatrix}y^2 & 2xy-1\\ 2xy-1 & 2y+x^2\end{vmatrix}$. $H(-1,0)=\begin{vmatrix}0 & -6\\ -6 & 6\end{vmatrix}$ silla. $H(1,1)=\begin{vmatrix}6 & 6\\ 6 & 18\end{vmatrix}$ mínimo. $H(-1,-1)=\begin{vmatrix}6 & 6\\ 6 & -6\end{vmatrix}$ silla.

e) $\boxed{e(x,y)=y(y-x)\,\mathrm{e}^{x+y}}$ $\begin{array}{l} e_x=y(y-x-1)\,\mathrm{e}^{x+y}=0 \to y=0,\ y=x+1 \searrow \\ e_y=\big(2y-x+y(y-x)\big)\,\mathrm{e}^{x+y}=0 \end{array}$ $(0,0)$ o $\big(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\big)$.

$H(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ silla. $H\big(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\big)=\mathrm{e}^{-2}\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 5/2\end{pmatrix}$. $|H|>0$ y $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}>0$. Mínimo.

f) $\boxed{l(x,y)=x^3-3x-3x^2y+y^2+3y}$ $\begin{array}{l} l_x=3x^2-3-6xy=0 \\ l_y=-3x^2+2y+3=0 \end{array} \to 2y(1-3x)=0$,



$\begin{array}{l} y=0 \to x=\pm1 , \\ x=\frac{1}{3} \to 2y=\frac{1}{3}-3,\ y=-\frac{4}{3} . \end{array}$ $(\pm1,0)$, $\big(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\big)$. $H(x,y)=\begin{pmatrix}6x-6y & -6x\\ -6x & 2\end{pmatrix}$.

$H(\pm1,0)=\begin{pmatrix}\pm6 & \mp6\\ \mp6 & 2\end{pmatrix}$, $\pm12-36<0$. Sillas. $H\big(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\big)=\begin{pmatrix}10 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$. $|H|>0$ y $10>0$. Mínimo (local).

g) $\boxed{G(x,y,z)=x^4+2x^2+y^2+3z^2-2y}$ $\begin{array}{l} G_x=4x^3+4x=0 \to x=0 \\ G_y=2y-2=0 \to y=1 \\ G_z=6z=0 \to z=0 \end{array} \to (0,1,0)$ punto crítico con $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$. Mínimo.

Claro, poniendo $G(x,y,z)=x^4+2x^2+(y-1)^2+3z^2-1\geq-1$.

h) $\boxed{H(x,y,z)=x^3-3y^2-z^2-6xy-9x+2z}$ $\begin{array}{l} H_x=3x^2-6y-9=0 \to x^2+2x-3=0 \searrow \\ H_y=-6y-6x=0 \to y=-x \nearrow \\ H_z=2-2z=0 \to z=1 \end{array}$ $\begin{array}{c}(1,-1,1)\\ (-3,3,1)\\ \text{puntos críticos.}\end{array}$ $H=\begin{pmatrix}6x & -6 & 0\\ -6 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

En $(1,-1,1)$ los menores son $+,-,+$ y es silla. En $(-3,3,1)$ son $-,+,-$ y hay un máximo.

9. $\boxed{f(x,y)=x^3+x^2y+y^2+2y+p}$ $\begin{array}{l} f_x=x(3x+2y)=0 \to x=0,\ y=-\frac{3}{2}x \\ f_y=x^2+2y+2=0\quad y=-1,\ x^2-3x+2=0 \end{array} \to (0,-1)$, $\big(1,-\frac{3}{2}\big)$, $(2,-3)$.

$f_{xx}=6x+2y$, $f_{yy}=2$, $f_{xy}=2x$. $Hf=\begin{vmatrix}6x+2y & 2x\\ 2x & 2\end{vmatrix}=4(3x+y-x^2)$. $Hf(0,-1)=Hf(2,-3)=-4<0$ sillas.

$f_{xx}\big(1,-\frac{3}{2}\big)=3$, $Hf\big(1,-\frac{3}{2}\big)=2>0$ mínimo. $f\big(1,-\frac{3}{2}\big)=p-\frac{5}{4}$. Será 0 si $\boxed{p=\frac{5}{4}}$.

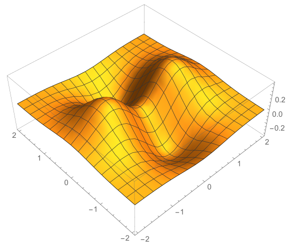
10. a) $\boxed{f(x,y)=(x-1)^3+(y-x)^2-3x}$ $\quad \begin{array}{l} f_x=3(x-1)^2-2(y-x)-3=0\,,\ (x-1)^2=1 \\ f_y=2(y-x)=0 \quad \to \qquad y=x \nearrow \end{array} \to (0,0) \text{ y } (2,2)\,.$

$H=\begin{vmatrix} 6(x-1)+2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=6(x-1)\,.$ $\begin{array}{l}(0,0) \text{ silla,} \\ (2,2) \text{ mínimo.}\end{array}$ El valor mínimo $f(2,2)=-5$ no es absoluto, pues, por ejemplo, sobre $y=x$ es $f(x,x)=x^3-3x^2-1 \to -\infty$ si $x\to-\infty$.

$\big[$O basta encontrar un punto donde valga menos, tanteando un poco: $f(-2,-2)=-21<-5\big]$.

b) $\boxed{g(x,y)=\left(x^2-y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}$ $\quad \begin{array}{l} g_x=2x(1-x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}=0 \\ g_y=-2y(1+x^2-y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}=0 \end{array} \to (0,0)\,,\ (0,1)\,,\ (0,-1)\,,\ (1,0)\,,\ (-1,0)\,.$

El Hessiano es $H(x,y)=\begin{vmatrix} 2(2x^4-2x^2y^2-5x^2+y^2+1) & 4xy(x^2-y^2) \\ 4xy(x^2-y^2) & 2(-2y^4+2x^2y^2+5y^2-x^2-1) \end{vmatrix}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,.$



$H(0,0)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}<0 \Rightarrow (0,0)$ es punto silla.

$H(\pm1,0)=\begin{vmatrix} -4 & \\ & -4 \end{vmatrix}\mathrm{e}^{-1}>0$ y máximos. $H(0,\pm1)=\begin{vmatrix} 4 & \\ & 4 \end{vmatrix}\mathrm{e}^{-1}>0$ y mínimos.

Los valores de la función en esos puntos son: $g(\pm1,0)=\frac{1}{\mathrm{e}}$, $g(0,\pm1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

La $g\to0$ cuando x,y tienden a infinito. Son máximos y mínimos absolutos.

11. $\boxed{F(x,y,z)\equiv 3x^2+2xz+2y^2+3z^2=24}$ a) $F\in C^1$, $F(-1,0,3)=3-6+27=24$, $F_z=2(x+3z)\xrightarrow{(-1,0,3)}16\neq0$

$\Rightarrow$ define función implícita de C^1 cerca de P.

b) $6x+2z+2xz_x+6zz_x=0 \to z_x=-\frac{3x+z}{x+3z}$, $2xz_y+4y+6zz_y=0 \to z_y=-\frac{2y}{x+3z}$. Ambas se anulan en $(-1,0,3)$.

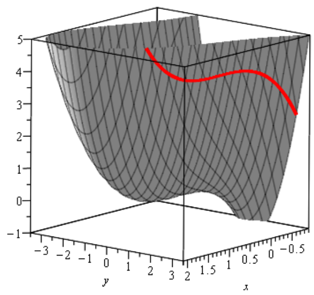
c) Derivando de nuevo implícitamente para hallar z_{xy}: $2z_y+2xz_{xy}+6z_xz_y+6zz_{xy}=0 \to z_{xy}=-\frac{z_y+3z_xz_y}{x+3z}\Big|_P=0$.

Como la matriz Hessiana es $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $a,b<0$, se trata de un máximo.

$\big[$Se podría despejar explícitamente: $z=\frac{1}{3}\left(-x\pm\sqrt{72-8x^2-6y^2}\right) \to z_x(-1,0)=z_y(-1,0)=0\big]$.

12. $\boxed{f(x,y)=x^3+2xy+y^2}$ a) $\begin{array}{l} f_x=3x^2+2y=0 \\ f_y=2x+2y=0\,,\ y=-x \end{array} \to (0,0)$ silla, $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ mínimo,

pues $H=\begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$. Como $f(x,0)=x^3 \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, no hay extremos absolutos.



b) $f(x,2-x)=x^3-x^2+4 \xrightarrow{d/dx} x(3x-2) \to \begin{array}{l} (0,2) \text{ máximo (con valor } 4) \\ \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) \text{ mínimo } \left(\text{valor } \frac{104}{27}\right) \end{array}$

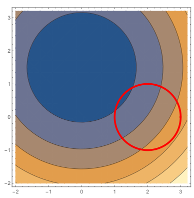
Lagrange: $\begin{array}{l} 3x^2+2y=\lambda \\ 2x+2y=\lambda \\ x+y=2 \end{array} \to 3x^2=2x\,,\ x=0,2/3 \nearrow (0,2) \text{ y } \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.
$\downarrow$

13. a) $\boxed{f(x,y)=6x^2+6y^2-18y+17}$ $\quad L(x,y)=6x^2+6y^2-18y+17-\lambda\left((x-2)^2+y^2-1\right) \to \begin{array}{l} 12x-2\lambda(x-2)=0\,,\ x=\frac{2\lambda}{\lambda-6} \\ 12y-18-2\lambda y=0\,,\ y=\frac{9}{\lambda-6} \\ (x-2)^2+y^2-1=0 \end{array}$

$\to \left(\frac{2\lambda}{\lambda-6}-2\right)^2+\left(\frac{9}{\lambda-6}\right)^2=1$, $\frac{225}{(\lambda-6)^2}=1$, $(\lambda-6)^2=225$, $\lambda=-9\,,21 \to \left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{14}{5},-\frac{3}{5}\right)$, respectivamente.

f es continua en curva C compacto. Como: $f\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)=17$, $f\left(\frac{14}{5},-\frac{3}{5}\right)=77$, primero mínimo y segundo máximo.

O bien, $f(x,y)=\frac{7}{2}+6\left[x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\right]$, y los extremos se darán en los puntos de $(x-2)^2+y^2=1$ que distan más y menos de $(0,3/2)$. Serán los extremos del diámetro de la circunferencia que llega a ese punto. La recta por los centros es $y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$, que corta la circunferencia si



$$(x-2)^2+\left(-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{2}\right)^2=1\,,\quad 25x^2-100x+84=0\,,\quad x=\tfrac{1}{5}(10\pm4)=\tfrac{14}{5}\,,\ \tfrac{6}{5}\,.$$

$\big[$Son los puntos de tangencia de las curvas de nivel de $f(x,y)$ con la circunferencia de la ligadura$\big]$.

b) $\boxed{g(x,y.z)=x+y+z}$ con $x^2+y^2+z^2+x-y+z=\frac{9}{4}$.

$F(x,y,z)=(x+y+z)-\lambda\left(x^2+y^2+z^2+x-y+z\right) \to \begin{cases} F_x=1-\lambda(2x+1)=0 \\ F_y=1-\lambda(2y-1)=0 \\ F_z=1-\lambda(2z+1)=0 \\ x^2+y^2+z^2+x-y+z-\frac{9}{4}=0 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} 1^a-3^a:\ 2\lambda(z-x) \to z=x \\ 1^a-2^a:\ 2\lambda(y-x-1) \to y=x+1 \\ \quad \text{pues } \lambda=0 \text{ es imposible.} \end{array}$

$x^2+x^2+2x+1+x^2+x-x-1+x-\frac{9}{4}=3\left(x^2+x+\frac{3}{4}\right)=0$. $x=\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$. $f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$ máx. $f\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}$ mín.

14. $\boxed{h(x,y)=3y^2-x^3}$ Los extremos han de existir por ser h continua en el conjunto compacto (el círculo).
Localizamos los puntos críticos en el interior (claramente no hay 'picos', pues $h\in C^\infty$):

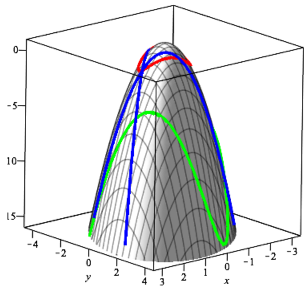
$$\begin{cases} h_x=-3x^2=0 \\ h_y=6y=0 \end{cases} \to (0,0)\,. \quad H=\begin{vmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}=36x\,. \quad H(0,0)=0 \text{ y el Hessiano no decide.}$$

$\big[$Aunque no se necesita (basta comparar $f(0,0)=0$ con el resto), como $f(x,0)=-x^3$ es una silla$\big]$.
Para encontrar los extremos el borde $g(x,y)=x^2+y^2=4$ podemos usar mulltiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -3x^2=2\lambda x & x=-2\,,\,0 \to y=\pm 2 \\ 6y=2\lambda y \to y=0\,,\ \lambda\overset{\uparrow}{=}3 & \\ x^2+y^2=4 & x\overset{\downarrow}{=}\pm 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} f(0,\pm 2)=\boxed{12} \text{ valor máximo.} \\ f(2,0)=\boxed{-8} \text{ valor mínimo.} \end{array} \qquad f(-2,0)=8\,.$$

También se podría parametrizar la circunferencia $(2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t\in[-\pi,\pi]$ $\to$ $h\big|_C=12\operatorname{sen}^2 t-8\cos^3 t\equiv s(t)$
$\to$ $s'(t)=24\operatorname{sen} t\cos t(1+\cos t)=0$ $\to$ $t=0,\pm\frac{\pi}{2},\pi$, que nos vuelve a dar los puntos de arriba.
O, incluso, es sencillo aquí $y^2=4-x^2$ $\to$ $h\big|_C=12-3x^2-x^3$, hallar sus extremos en $[-2,2]$ y deducir los y.

15. $\boxed{f(x,y)=1-2x^2+xy-y^2}$ i) $\boxed{x^2+y^2\le 1}$ En el interior (apuntes) sólo hay máximo (en el origen) con $f(0,0)=1$.



En ∂A: $(-4x+y\,,\,x-2y)=\lambda(2x,2y)$, $x^2+y^2=1$ $\to \begin{cases} 2\lambda x+4x-y=0 \\ 2\lambda y-x+2y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \to \begin{array}{l} y^2-2xy-x^2=0\,, \\ y=(1\pm\sqrt{2})x \ \to \end{array}$

$x^2=\frac{1}{4\pm 2\sqrt{2}}$, $x=\pm\frac{\sqrt{2\mp\sqrt{2}}}{2}$ $\to$ y similares cambiando signos mas por menos.

O bien: $(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$, $f|_{\partial A}\equiv h(t)=\cos t(\operatorname{sen} t-\cos t)=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2t-\cos 2t-1)$,
$h'(t)=\operatorname{sen} 2t+\cos 2t$ $\to$ $t=\frac{3\pi}{8},\frac{11\pi}{8}$ con h (y f) mínima $[\,=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx -1.2\,]$,
y $t=\frac{7\pi}{8},\frac{15\pi}{8}$ con máximos locales de f (absolutos en ∂A).

ii) $\boxed{y+x^2=4}$ $(-4x+y\,,\,x-2y)=\lambda(2x,1)$ $\to \begin{cases} 2\lambda x+4x=y \\ \lambda=x-2y \\ y=4-x^2 \ \nearrow \end{cases} \to \begin{array}{l} 2x^2-4xy+4x=y\,, \\ 4x^3+3x^2-12x-4=(x+2)(4x^2+5x-2)=0 \ \to \end{array}$

$x=-2$, $y=0$, $f(-2,0)=7$; $x_\pm=\frac{5\pm\sqrt{57}}{8}\approx \begin{array}{c} 1.56 \\ -0.31 \end{array}$, $y_\pm=\frac{87\mp 5\sqrt{57}}{32}\approx \begin{array}{c} 1.54 \\ 3.90 \end{array}$. $f(x_+,y_+)\approx -3.88$ valor máximo.

O más corto: $f(x,4-x^2)=-\big(x^4+x^3-6x^2-4x+15\big)\overset{\prime}{\to} -\big(4x^3+3x^2-12x-4\big)=0\nearrow$, claramente sin mínimo.

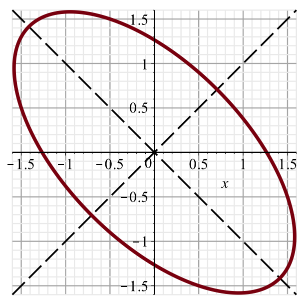
iii) $\boxed{y^2-x^2+2x=1}$ $\Leftrightarrow y^2=(x-1)^2$, $y=x-1$ ó $y=1-x$. $\begin{array}{l} f(x,x-1)=x-2x^2\text{, con máximo si } x=\frac{1}{4} \to f=\frac{1}{8}\,. \\ f(x,1-x)=3x-4x^2\text{, con máximo si } x=\frac{3}{8} \to f=\frac{9}{16}\,. \end{array}$

El valor máximo es $\frac{9}{16}$ y el mínimo no existe. Ahora con multiplicadores:

$$\underset{\text{se anula en }(1,0)}{(-4x+y\,,\,x-2y)=\lambda(2-2x,2y)} \to \begin{cases} 2\lambda(x-1)=4x-y & 2\lambda(x-1)=3x+1 \text{ ó } 2\lambda(x-1)=5x-1 \\ 2\lambda y=x-2y & 2\lambda(x-1)=2-x \text{ ó } 2\lambda(1-x)=3x-2 \\ y^2=(x-1)^2\,,\ y=\pm(x-1) \ \nearrow & \end{cases} \to \begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \text{ ó } x=\frac{3}{8}\,, \\ y=-\frac{3}{4} \text{ ó } y=\frac{5}{8} \end{array}$$

$$f\big(\tfrac{1}{4},-\tfrac{3}{4}\big)=\tfrac{1}{8}\,,\ f\big(\tfrac{3}{8},\tfrac{5}{8}\big)=\tfrac{9}{16}\,,\ f(1,0)=-1\,.$$

16. $\boxed{5x^2+6xy+5y^2=8}$ Mucho se puede hacer con técnicas de **R**, despejando y:
$y=\frac{-3x\pm 2\sqrt{10-4x^2}}{5}$. Por ejemplo, definida si $|x|\le\frac{\sqrt{10}}{2}$.



a) Maximizando $\boxed{x}$ con la restricción de la elipse: $F=x-\lambda\big(5x^2+6xy+5y^2-8\big)$ $\to$

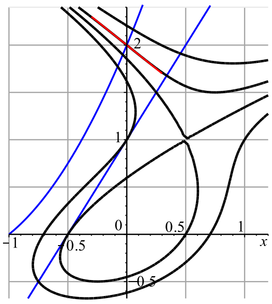
$$\begin{cases} 1=\lambda(10x+6y) \\ 0=\lambda(6x+10y) \to y=-3x/5\downarrow \\ 5x^2+6xy+5y^2=8 \qquad x^2\big(5-\frac{18}{5}+\frac{9}{5}\big)=\frac{16}{5}x^2=8\,,\ x=\pm\sqrt{5/2} \text{ como arriba.} \end{cases}$$

b) Extremos de $\boxed{d(x,y)=x^2+y^2}$ sobre la elipse: $\begin{cases} 2x=\lambda(10x+6y) \\ 2y=\lambda(6x+10y) \\ 5x^2+6xy+5y^2=8 \end{cases} \to \begin{array}{l} \lambda=\frac{x}{5x+3y}=\frac{y}{3x+5y}\,, \\ 3x^2=3y^2\,,\ y=\pm x \ \to\ x^2=1/2 \text{ ó } x^2=2\,. \end{array}$

Candidatos: $\Big(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ con $d=1$ (más cercanos), $\big(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2}\big)$ con $d=4$ (más lejanos),

c) $\boxed{f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}}$ Además de los puntos de ∂A $\big[$los de b) pues $d=f^2\big]$ miramos $(0,0)$ $[\,f$ no diferenciable$]$:
$f(0,0)=0$ (mínimo absoluto), $f\big(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2}\big)=2$ (máximo absoluto). En los otros $f=1$.

17. $\boxed{g(x,y)=y^3-2x^2+2xy-2y^2}$ a) $\begin{array}{l} g_x=2y-4x=0\,,\ y=2x \searrow \\ g_y=3y^2+2x-4y=0\,,\ \ 6x(2x-1)=0 \end{array}$ [Curvas de nivel $g=-1,-\frac{1}{2},0,1$] $\to$



$Hg=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 6y-4 \end{vmatrix}=12(1-2y) \to \left(\frac{1}{2},1\right)$ silla, $(0,0)$ máximo local $\left[\,g\left(\frac{1}{2},1\right)=-\frac{1}{2}\,,\ g(0,0)=0\,\right]$.

$g(0,y)=y^3-2y^2 \underset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \Rightarrow$ no tiene extremos absolutos.

b) $\begin{array}{l} y-2x=-\lambda \\ 3y^2+2x-4y=\lambda \\ y-2x=1 \end{array}$ $\begin{array}{l} \searrow \\ \downarrow 3y(y-1)=0 \\ x=-1/2,0 \end{array} \to \left(-\frac{1}{2},0\right),\ (0,1)$. [La recta $y=2x+1$ es tangente a las curvas de nivel $g=-\frac{1}{2}$ y $g=-1$].

c) $g(0,2)=0$, $g_y(0,2)=4\neq 0 \Rightarrow$ existe $y(x)\in C^1$ cerca de $(0,2)$, $g_x(0,2)=4$,
$y'(0)=-\frac{4}{4}=-1$. Recta tangente $y=y(0)+y'(0)(x-0)=2-x$. [En rojo].

d) $\bar{c}(1)=(0,2)$, $\bar{c}\,'(1)=(1,3)$, $h'(1)=\nabla g(\bar{c}(1))\cdot\bar{c}\,'(1)=(4,4)\cdot(1,3)=16$. [Se ve que $h'(1)>0$].

18. $\boxed{f(x,y,z)=x-y+2z}$ en $\boxed{x^2+y^2+2z^2\leq 2}$ (limitado por un elipsoide, es conjunto compacto).

Como $f_x=1$, $f_y=-1$, $f_z=2$, no tiene f extremos en el interior. En la frontera del conjunto:

$\left\{\begin{array}{ll} 1=2x\lambda\,, & x=1/2\lambda \\ -1=2y\lambda\,, & y=-1/2\lambda \\ 2=4z\lambda\,, & z=1/2\lambda \\ x^2+y^2+2z^2=2 & \end{array}\right. \to \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{2\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}=2 \to \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2} \text{ máximo,} \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{2} \text{ mínimo.} \end{array}$

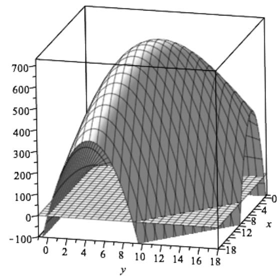
19. Queremos maximizar $f(x,y,z)=xyz$ (positivos), con la condición $x+y+z=27$.

Convirtiéndolo en problema de 2 variables: maximizar $h(x,y)=xy(27-x-y) \to$

$h_x=27y-2xy-y^2=0 \to 27(y-x)=y^2-x^2 \to y=x$ ó $y+x=27$ (no válido, $z=0$)

$h_y=27x-2xy-x^2=0 \nearrow \qquad 27x^2-3x=0\,,\ x=y=9 \to$

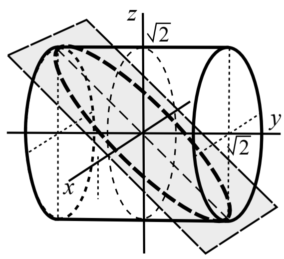
producto máximo $=81\cdot 9=\boxed{729}$.



Lagrange: $F=xyz-\lambda(x+y+z-27) \to \left\{\begin{array}{l} yz=\lambda\,,\ yz=xz\,,\ y=x \\ xz=\lambda\,,\ xy=xz\,,\ y=z \\ xy=\lambda \\ x+y+z=27 \end{array}\right. \to x=y=z=9$.

20. Extremos de $\boxed{f(x,y,z)=2x+3y+z}$ sobre la curva $\boxed{x^2+z^2=2}$, $\boxed{y+z=0}$.

[Intersección de un cilindro y de un plano inclinado, la curva será una elipse].



Con Lagrange. Hallamos los extremos de $F=2x+3y+z-\lambda(x^2+z^2-2)-\mu(y+z)$.

$\left\{\begin{array}{ll} 2=2x\lambda & \\ 3=\mu & x=\frac{1}{\lambda}=-z\downarrow \\ 1=2z\lambda+\mu & \\ x^2+z^2=2 & \frac{2}{\lambda^2}=2\,,\ \lambda=\pm 1 \\ y+z=0 & \end{array}\right. \to \begin{array}{l} (1,1,-1) \text{ con } f=4 \text{ máximo ó} \\ (-1,-1,1) \text{ con } f=-4 \text{ mínimo.} \end{array}$

O podemos parametrizar la elipse: $\left(\sqrt{2}\cos t,-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$, $t\in[-\pi,\pi]$. Llevándola a f:

$h(t)=2\sqrt{2}\,(\cos t-\mathrm{sen}\,t)$, $h'(t)=-2\sqrt{2}\,(\mathrm{sen}\,t+\cos t)=0 \to t=-\frac{\pi}{4}$ máximo ó $t=\frac{3\pi}{4}$ mínimo.

[hasta aquí para el parcial]