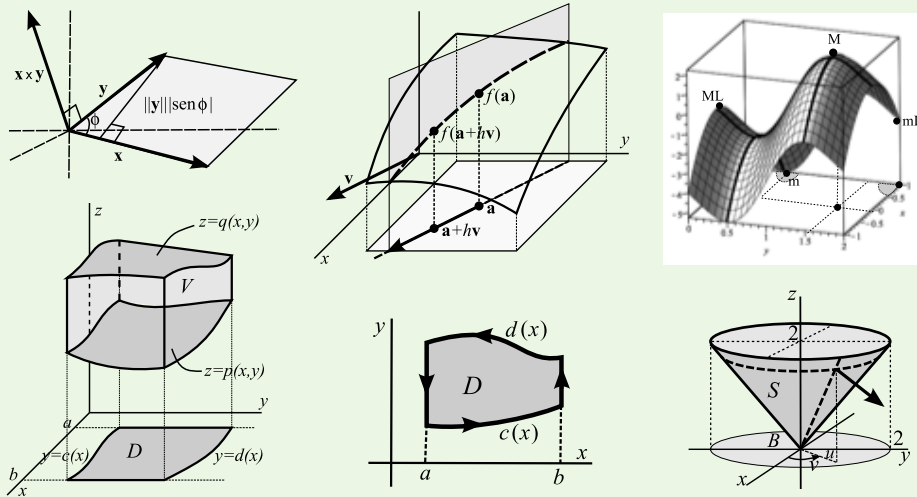


# APUNTES DE CÁLCULO (en varias variables)



**Pepe Aranda**

**pparanda@ucm.es**

**<https://teorica.fis.ucm.es/pparanda>**

**Departamento de Física Teórica  
Facultad de Físicas. UCM**

**<https://www.ucm.es/ft2mm>**

Índice	ii
Bibliografía	iii
Sobre el contenido de estos apuntes	iii
Sobre las versiones de los apuntes	iv
<b>1. Conceptos básicos</b>	
1.1 El espacio $\mathbf{R}^n$ . Rectas y planos. Abiertos y cerrados.	5
1.2 Gráficas de funciones escalares	9
1.3 Límites y continuidad en $\mathbf{R}^n$	12
<b>2. Cálculo diferencial en <math>\mathbf{R}^n</math></b>	
2.1 Derivadas de campos escalares	15
2.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena	21
<b>3. Funciones implícitas. Máximos y mínimos.</b>	
3.1 Funciones implícitas e inversas	27
3.2 Extremos de funciones escalares	31
<b>4. Integrales múltiples</b>	
4.1 Integrales dobles	37
4.2 Integrales triples	44
<b>5. Integrales de línea</b>	
5.1 Integrales de campos escalares sobre curvas	49
5.2 Integrales de campos vectoriales y de gradientes	52
5.3 Teoremas de Green y de la divergencia en el plano	58
<b>6. Integrales de superficie</b>	
6.1 Definiciones y cálculo	61
6.2 Teoremas de la divergencia y Stokes	65
<b>Problemas</b>	I-XII

## Bibliografía

[MT] J. E. Marsden y A. J. Tromba. Cálculo Vectorial. Ed. Addison-Wesley

[R] J. Rogawski. Cálculo Varias Variables. Ed. Reverte

[St] S. Stein. Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill

[LHE] Larson-Hostetler-Edwards. Cálculo II (7a ed). Ed. Pirámide, 2003.

[A] T. Apostol. Calculus. Ed. Reverté

En todas las asignaturas que imparto suelo elaborar apuntes. Esto tiene la ventaja de precisar qué se va a explicar durante el curso. Además permite a quien está en clase no estar todo el rato pendiente de copiar lo que se escribe en la pizarra y permite al profesor remitirse a ellos cuando no hay tiempo (ni se cree adecuado) entrar en detalles de demostraciones. Pero tiene sus desventajas. La existencia de apuntes incita a no utilizar casi otros libros, que tratan los diferentes temas con más extensión y rigor, o con más ejemplos, o más aplicaciones. Tampoco se ven otras notaciones distintas que pueden sorprender en otros cursos.

Recomiendo, pues, consultar varios libros. Esta asignatura (a diferencia de otras para las que he escrito apuntes) sí tiene un gran texto al que remitirse y del que he extraído buena parte de varios temas: el Marsden-Tromba. Un libro serio, pero también con muchos ejemplos y aplicaciones. Algunos quizás prefieran libros algo más elementales, como los tres siguientes [R], [St] o [LHE]. Me gustan en ese orden, pero el [R] no está en la biblioteca de Físicas de la UCM (aunque es fácil de encontrar en librerías). Del [St] hay un par de ejemplares (pero ya está descatalogado). Del [LHE] hay bastantes en la biblioteca (aunque las ediciones posteriores a la venta cada vez tienen más colores y lo que me parece más ‘paja’). Y no puede faltar en una bibliografía de esta asignatura un clásico como el [A].

## Sobre el contenido de estos apuntes

Los apuntes tienen dos grandes bloques de tamaño similar: el cálculo diferencial en  $\mathbf{R}^n$ , formado por los capítulos 1, 2 y 3 (los preguntados en el parcial), y el cálculo integral en  $\mathbf{R}^n$  de los 4, 5 y 6.

En concreto, en el 1 se introducen los conceptos básicos (vectores y sus operaciones), se repasan las rectas y planos, se presentan las gráficas de funciones de dos variables y se estudia la continuidad.

En la sección 2.1 se presentan las derivadas de los campos escalares, la diferencial y Taylor de orden 2. En la 2.2 se introducen ya las funciones y campos vectoriales (y sus operadores) y la regla de la cadena.

Se tratan en 3.1 los más sutiles teoremas de la función inversa e implícita. Y se acaba el cálculo diferencial en 3.2 con el estudio de los extremos (y de los multiplicadores de Lagrange).

La sección 4.1 está dedicada a las integrales dobles y sus cambios de variable. En la 4.2 se ven las triples y se introducen las coordenadas cilíndricas y esféricas.

5.1 trata las integrales de línea de campos escalares y 5.2 las de campos vectoriales y, en particular, las de conservativos. El 5.3 se estudian teoremas como el de Green (que en otros textos se ve junto con Stokes).

En el último capítulo (el 6) se presentan las integrales de superficie (de campos escalares y vectoriales) y se terminan los apuntes con los teoremas de Gauss y de Stokes de 6.2.

Las aproximadamente 60 horas reales de clase de un curso las distribuyo más o menos así entre los 6 capítulos: 9 para el 1, 12 para el 2, 9 para el 3, 10 para el 4, 12 para el 5 y 8 para el 6.

La base necesaria para seguir estos apuntes es simplemente dominar un buen Cálculo en una variable: tener claro los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, manejar bien los máximos y mínimos, conocer los desarrollos de Taylor, saber calcular primitivas no muy complicadas (las trigonométricas en particular), dominar las coordenadas polares... No se suponen conocimientos algebraicos, que se estudian en el grado en Física de la UCM al tiempo que esta asignatura (segundo cuatrimestre de 1º), aunque se citen en letra pequeña términos como base o aplicación lineal que luego se irán controlando en Álgebra.

Casi todos los ejemplos son en  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$ , principalmente en  $\mathbf{R}^2$ . El salto conceptual se da al pasar de 1 a 2, más variables plantean, sobre todo, complicaciones técnicas. Más de una vez aparecen gráficas hechas con el programa Maple (con licencia universal en la UCM) para incitar a los estudiantes a su uso. Los dibujos los hago con el programa libre Inkscape. Las fuentes del texto (más sólidas que las habituales de  $\text{\LaTeX}$ ) aparecen utilizando el paquete `{newtxtext,newtxmath}`.

## Sobre las versiones de los apuntes

**versión 2025 final:** Nuevos ejemplos para la última versión antes de jubilarme. Dos de continuidad y gráficas en el tema 1. Poco cambio en el 2. Crece cada sección del 3 en una página. Ejemplo nuevo y leves modificaciones en 4.2. Reajustado el tema 5 uniendo las integrales de campos vectoriales y conservativos en 5.2 y dejando para Green y divergencia el 5.3 (con páginas nuevas ambos a base de ejemplos). Sólo detalles en el 6.

La versión tiene 68 páginas de teoría (las iv iniciales, 32 de cálculo diferencial y otras tantas de integral) y 12 de problemas, cambiados como cada curso por viajes a páginas teóricas y entrada de nuevos de exámenes del 2024 (se mantienen los 80+80 problemas de diferencial e integral, alguno con más apartados).

**versión 2024:** Por el cuatrimestre sabático se retocaron bastante, incluyendo, sobre todo, más ejemplos. Cambió la portada y el índice (con enlaces llevando a cada sección). El capítulo 1 ganó dos páginas con más gráficas y ejemplos de continuidad. El 2 tuvo bastantes ligeros cambios. En el 3, un ejemplo de extremos de función definida implícitamente. 4.1 y 4.2 crecieron en una página. 5.1 y 5.3 con una más a base de problemas del curso anterior o examen. Y el 6 creció en otra. 64 páginas de teoría en total y 12 de problemas.

**versión 2023:** El anterior largo capítulo 2 se dividió en los 2 y 3. Con nuevos ejemplos crecieron una página las secciones 2.2 y (ahora) 3.2, temas no impartidos por mí ese curso. También ganó una página cada sección del capítulo 4 de las integrales múltiples. Y otra más la 6.1. Otras secciones también incluyeron más ejemplos y todas tuvieron aclaraciones de teoría y cambios estéticos. En total eran 53 páginas de teoría. En los problemas (160 en la versión) incluí casi todos mis exámenes del 2016 y algunos del 21 o 22 de otros profesores.

**versión 2016:** Por problemas con impresoras, cambiada la letra a otra tipo ‘times’ más moderna (paquete `{newtxtext, newtxmath}` de LaTeX en vez de `{mathptmx}`), lo que implicó múltiples retoques estéticos. Algún ejemplo nuevo y leves modificaciones en 1.2 y 1.3. Más cambios en 2.1, sobre todo en la diferenciabilidad. Un ejemplo más en 2.2. La sección de inversas e implícitas adelantó a la de máximos y mínimos. Un ejemplo más en 3.1 y casi igual 3.2. Sólo un ejemplo nuevo en el capítulo 4 (de Green) y tres nuevos en el 5 (que vienen de exámenes). Y en todos, modificaciones estéticas. Como cada curso, metí en los problemas los de exámenes del anterior. Por eso, los del tema 2 pasaron de 45 a 50 y los del 3 y 4 de 25 a 30. Total, 140 problemas.

**versión 2015:** Primera vez que impartí completa la asignatura ‘Cálculo’ del grado en Física, y, por lo tanto, fue la primera versión de estos ‘**APUNTES DE CÁLCULO (en varias variables)**’.

Tenía apuntes manuscritos de gran parte del temario (del Análisis I de los años 80 cuyo segundo parcial era cálculo en varias variables, pero, al existir Análisis II, los extremos, las inversas e implícitas y las integrales de superficie se daban en esa asignatura). En 2011 di dos meses de Cálculo en un curso compartido y publiqué sus primeros apuntes. Una versión corta de gran parte del curso la escribí en 2012 para los Métodos de la Ingeniería de Materiales. A lo largo del 2015 tuve que extender bastante los apuntes de 1, 2.1 y 2.2 de ingenieros, escribir a ordenador las implícitas y los extremos, retocar los capítulos 3 y 4 y expandir el 5. Y transcribir problemas de los hechos con máquina de escribir e inventar bastantes nuevos.

**2012.** Nacen las ‘**Notas de Métodos Matemáticos (ingeniería de materiales)**’, asignatura (de ecuaciones diferenciales sobre todo) que comienza con 2 capítulos (5 semanas) de Cálculo en varias variables. Su capítulo 2 (cálculo integral) incluyó resumidos los apuntes elaborados para Cálculo en 2011. Escribí por primera vez en ordenador su capítulo 1 de cálculo diferencial y su sección 2.3 de integrales de superficie.

**2011.** Primera versión a LaTeX de los temas 3 y 4 (que actualmente son los 4 y 5), ‘**Integrales múltiples**’ e ‘**Integrales de línea**’, transcribiendo los apuntes a mano.

**años 80** (del siglo XX). Comencé a dar clases en el curso 1978-79 (de Análisis I). Unos tres años después empezaría a pasar a mis estudiantes mis apuntes hechos a mano. Los que tengo en papel y escaneados deben ser del 85-86. Pasé la parte de cálculo en una variable hace ya muchos años a ordenador (primero a Word y luego a LaTeX). Pero la de varias variables estuvo mucho tiempo en el archivador.

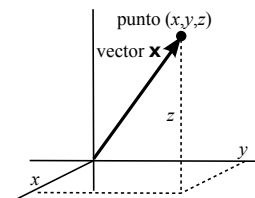
# 1. Conceptos básicos

## 1.1 El espacio $\mathbf{R}^n$ . Rectas y planos. Abiertos y cerrados.

El conjunto  $\mathbf{R}^n$  se define como  $\mathbf{R}^n \equiv \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_k \in \mathbf{R} \}$ .

[Otras notaciones para los elementos de  $\mathbf{R}^n$  son  $\bar{x}$  o  $\vec{x}$ ].

A cada elemento de  $\mathbf{R}^n$  le llamaremos indistintamente **punto** o **vector** de  $\mathbf{R}^n$ . Casi todos nuestros ejemplos serán en  $\mathbf{R}^2$  o  $\mathbf{R}^3$  donde llamaremos  $\mathbf{x} = (x, y)$  o  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Un  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  se puede ver como el punto de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  o como el vector que une el origen  $(0, 0)$  con  $(x, y)$  [análogo en  $\mathbf{R}^3$ ].  $\mathbf{R}$  es caso particular de  $\mathbf{R}^n$  y a los números reales se les llama a veces **escalares**.

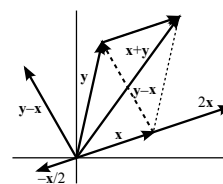


La **suma de vectores**  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  se define:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

que tiene las mismas propiedades que la suma de números reales: es conmutativa, asociativa, existe el elemento  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  con  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \forall \mathbf{x}$  y el opuesto  $-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$  con  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . La diferencia de vectores se define entonces como  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$ .

El **producto de un escalar**  $k \in \mathbf{R}$  por un vector  $\mathbf{x}$  es el vector  $k\mathbf{x} = (kx_1, \dots, kx_n)$ , que tiene las propiedades:  $k(m\mathbf{x}) = (km)\mathbf{x}$ ,  $(k+m)\mathbf{x} = k\mathbf{x} + m\mathbf{x}$ ,  $k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}$ ,  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ,  $0\mathbf{x} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

En  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$  estas dos definiciones tienen claro significado geométrico. Suma es el vector diagonal del paralelogramo de lados  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . O lo que es lo mismo, es el vector cuya punta es el punto en el que acaba  $\mathbf{x}$  si llevamos paralelamente su base al extremo de  $\mathbf{y}$ . La diferencia la da la otra diagonal.  $k\mathbf{x}$  es otro vector que tiene la misma dirección que  $\mathbf{x}$  y que tiene mismo o distinto sentido que él. Su longitud, además, se ve modificada por el factor  $|k|$ .



Todas las propiedades anteriores eran inmediatas de demostrar a partir de las propiedades de  $\mathbf{R}$ .

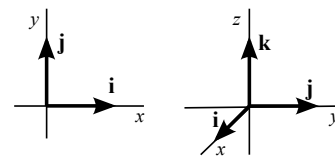
Un conjunto en el que haya dos operaciones con esas propiedades se llama **espacio vectorial** (estos conjuntos se tratan extensamente en el álgebra).

Son importantes los vectores de  $\mathbf{R}^n$ :  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ , pues todo vector se puede escribir como una suma de escalares por esos vectores:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ .

[En idioma algebraico:  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es la 'base canónica' del espacio vectorial de 'dimensión  $n$ ' (número de elementos de la base) y cualquier vector se puede escribir como 'combinación lineal' (suma de escalares por vectores) de esos  $n$  elementos].

En  $\mathbf{R}^2$  se suele escribir  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = (1, 0)$  y  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = (0, 1)$ .

Y en  $\mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .



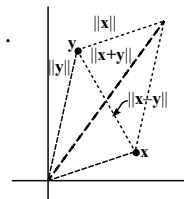
Otras definiciones que describen longitudes de vectores:

La **norma** o **módulo** de  $\mathbf{x}$  es  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . La **distancia** de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  es  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ .

[Ambas son reales  $\geq 0$ . En  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$ ,  $\|\mathbf{x}\|$  es su longitud y  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  la distancia entre los puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ].

Propiedades de la norma:  $\|k\mathbf{x}\| = |k|\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

La última, **desigualdad triangular**, geoméricamente afirma que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Las dos primeras son de demostración inmediata y se probará la segunda después de definir el producto escalar].



Un vector se dice **unitario** cuando tiene norma 1. Los vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  son unitarios.

Dado cualquier  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  es muy fácil dar un vector unitario con su misma dirección y sentido:  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ .

Definamos dos importantes productos de vectores: el escalar y el vectorial.

Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$  se define el **producto escalar** de dos vectores como  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .

[Obsérvese que  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}$  y que, por tanto,  $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ ].

[El producto escalar de dos vectores es un **número real** que perfectamente puede ser negativo].

[En el caso particular de  $\mathbf{R}$ , el producto escalar es el producto y  $\|x\|$  pasa a ser el valor absoluto  $|x|$ ].

Las siguientes propiedades (menos la última, que demostramos) son fáciles de probar:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}, (k\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (k\mathbf{y}), \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

↑  
desigualdad de Cauchy-Schwartz

C-S: Si  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  es trivial. Sea  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  y sea el número real  $k = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}$ . Entonces:

$$0 \leq (\mathbf{x} - k\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - k\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2k\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + k^2\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \Rightarrow |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \Rightarrow |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

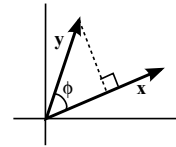
Probemos ahora la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \Rightarrow \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Hay una forma alternativa de expresar un producto escalar, en términos de la norma de los vectores y del ángulo formado por ellos, que a veces resulta ser más útil que la inicial.

Del teorema del coseno se deduce (ver Marsden-Tromba):

En  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$  es  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi$ , con  $\phi \in [0, \pi]$  ángulo entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ .



Deducimos que  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$  si son **perpendiculares** y que  $\phi = \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$ . (Y aquí es clara C-S).

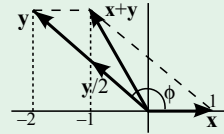
[ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  es, por tanto, el producto de la norma de un vector por la norma de la proyección del otro sobre él].

**Ej 1.** Sean  $\mathbf{x} = (1, 0) = \mathbf{i}$  e  $\mathbf{y} = (-2, 2) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ . Entonces es:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-1, 2). \quad \frac{1}{2}\mathbf{y} = (-1, 1). \quad \|\mathbf{x}\| = 1, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{5}.$$

El vector unitario con la dirección y sentido de  $\mathbf{y}$  es  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -2$ .

[Como  $\phi > \frac{\pi}{2}$  debía ser  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi < 0$ ; es  $\phi = \arccos \frac{-2}{\sqrt{8}} = \frac{3\pi}{4}$ ].  $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 2 \leq \sqrt{8} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ .

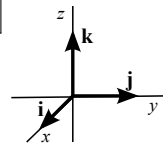


Para  $n = 3$ , se define el **producto vectorial** de  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  como el vector:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} - (x_1y_3 - x_3y_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Propiedades inmediatas de este producto son:  $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ .

Y para los vectores de la base canónica:  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ .



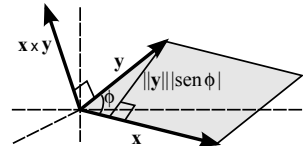
Lo que pasa con estos vectores ocurre en general. El vector  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  es **perpendicular** a  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  (ver M-T) y tiene el sentido que sugieren esos ejemplos. [El que dice la 'ley de la mano derecha': si los dedos apuntan de  $\mathbf{x}$  hacia  $\mathbf{y}$ , su producto vectorial tiene el sentido del pulgar]. Además, se tiene:

$$(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 \stackrel{\uparrow}{=} \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 (1 - \cos^2 \phi)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| |\sin \phi| \Rightarrow$$

La **longitud** de  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  es el **área del paralelogramo** que tiene por lados adyacentes a los vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .



**Ej 2.** Si  $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$ ,  $\mathbf{y} = (-2, 1, 3)$  Su producto escalar es  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 4$ .  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{5}$ ,  $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{14}$ .

$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(3, -1, -1)\| = \sqrt{11}$  nos proporciona la distancia entre los dos puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (0-2)\mathbf{i} - (3+4)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = (-2, -7, 1). \text{ Que es perpendicular a } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y}:$$

$$(1, 0, 2) \cdot (-2, -7, 1) = 0, \quad (-2, 1, 3) \cdot (-2, -7, 1) = 0.$$

$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = 3\sqrt{6}$  nos da el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores.

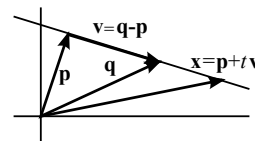
## Rectas y planos

En Cálculo en una variable, una **recta del plano** se suele escribir  $y = mx + b$  ó  $y = y_0 + m(x - x_0)$ , fijándonos en la pendiente  $m$ , la ordenada en el origen  $b$  o un punto  $(x_0, y_0)$  por el que pasa.

Veamos otras expresiones ahora utilizando vectores. La recta que pasa por los puntos  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  y  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  se puede escribir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \quad \text{o} \quad \mathbf{x} = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

[Para  $t \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$  describe el segmento que une esos puntos].



O dado  $\mathbf{p}$  y el vector dirección  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ :  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ , o en coordenadas:  $\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases}$ .

**Ej 3.** Describamos paramétricamente de diferentes formas el segmento que une  $\mathbf{p} = (-2, 3)$  y  $\mathbf{q} = (1, 0)$ .

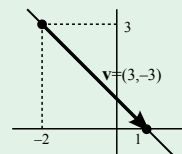
En coordenadas cartesianas la recta es  $y = 1 - x$ . De aquí:  $(t, 1 - t)$ ,  $t \in [-2, 1]$ .

Usando las expresiones de arriba, como  $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (3, -3)$ , obtenemos:

$$\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (-2 + 3t, 3 - 3t), \quad t \in [0, 1].$$

O cambiando los papeles de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ :  $\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = (1 - 3t, 3t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

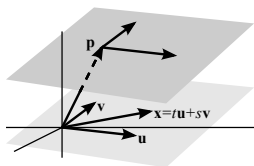
[Las 2 primeras expresiones describen el segmento, al crecer  $t$ , en el mismo sentido y la tercera en el opuesto].



Las ecuaciones vectoriales de las **rectas en el espacio** son las mismas, pero con 3 coordenadas:

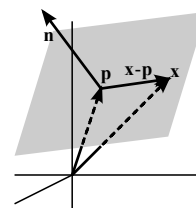
$$\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \\ z = p_3 + tv_3 \end{cases} \quad \text{Eliminando la } t: \quad \frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3} \quad \text{[interpretando que el numerador es 0 si se anula su denominador].}$$

La ecuación general de un **plano en el espacio** es  $ax + by + cz = d$  [con  $a, b, c$  no las tres cero] [si  $d=0$ , pasa por el origen]



Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son dos vectores (no múltiplo uno de otro),  $\mathbf{x} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ ,  $t, s \in \mathbf{R}$  describe el plano que contiene esos vectores y pasa por el origen.

$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$  es otro plano, paralelo al otro y que pasa por  $\mathbf{p}$  y los puntos  $\mathbf{p} + \mathbf{u}$  y  $\mathbf{p} + \mathbf{v}$ .



Un plano queda también determinado conocidos un punto  $\mathbf{p}$  suyo y un vector  $\mathbf{n}$  normal (perpendicular) al plano pues:  $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Si es  $\mathbf{n} = (a, b, c)$ , desarrollando:  $a(x - p_1) + b(y - p_2) + c(z - p_3) = 0$ , que podemos poner  $ax + by + cz = -ap_1 - bp_2 - cp_3$ . Comparando con la ecuación escrita arriba, concluimos que un **vector normal a un plano**  $ax + by + cz = d$  es el vector  $(a, b, c)$ .

**Ej 4.** Demos varias expresiones para la recta que pasa por los puntos  $\mathbf{p} = (1, 2, -8)$  y  $\mathbf{q} = (7, 5, 1)$ .

Un vector dirección es  $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (6, 3, 9)$ , y la recta es:  $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + 6t, 2 + 3t, -8 + 9t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

O con un vector más bonito  $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$  y  $\mathbf{q}$  en vez de  $\mathbf{p}$ :  $\mathbf{q} + t\mathbf{u} = (7 + 2t, 5 + t, 1 + 3t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

Eliminando  $t$ , por ejemplo, de la segunda:  $\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \rightarrow \frac{x-7}{2} = y-5 = \frac{z-1}{3}$ .

Y eligiendo dos pares de términos (nosotros los primero = tercero y segundo = tercero) obtenemos la recta como intersección de dos planos:

$$3x - 21 = 2z - 2, \quad 3y - 15 = z - 1, \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} 3x - 2z = 19 \\ 3y - z = 14 \end{cases}$$

**Ej 5.** Halleemos la ecuación del plano que pasa por  $\mathbf{p} = (3, 2, -1)$ ,  $\mathbf{q} = (1, -1, 3)$  y  $\mathbf{r} = (3, -2, 4)$ .

Es perpendicular al plano, por ejemplo,  $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = (-2, -3, 4) \times (0, -4, 5) = (1, 10, 8)$ .

El plano es, por tanto:  $1(x - 3) + 10(y - 2) + 8(z + 1) = 0$ , o sea,  $x + 10y + 8z = 15$ .

Más largo es eliminar  $t$  y  $s$  de  $\mathbf{x} = t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + s(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - 3t - 4s \\ z = -1 + 4t + 5s \end{cases} \rightarrow t = \frac{3-x}{2} \rightarrow s = \frac{3x}{8} - \frac{y}{8} - \frac{5}{8} \dots$

O, aún peor, resolver el sistema  $\begin{cases} 3a + 2b - c = d \\ a - b + 3c = d \\ 3a - 2b + 4c = d \end{cases}$  [imponiendo que pase por los puntos]  $\rightarrow a = \frac{d}{15}, b = \frac{10d}{15}, c = \frac{8d}{15}$ .

## Conjuntos abiertos y cerrados

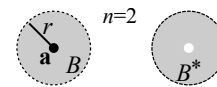
**Entorno** de centro  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  y radio  $r > 0$  es  $B_r(\mathbf{a}) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$

[A veces se le llama **disco** o **bola**].

Es un círculo en el plano y una esfera en el espacio, en ambos casos sin borde.

[Para  $n=1$  era un intervalo abierto centrado en el punto].

Llamaremos **entorno perforado** o **reducido** al conjunto  $B_r^*(\mathbf{a}) = B_r(\mathbf{a}) - \{\mathbf{a}\}$ .



El punto  $\mathbf{a} \in A$  es **interior** al conjunto  $A \subset \mathbf{R}^n$  si hay algún  $r$  tal que el entorno  $B_r(\mathbf{a}) \subset A$ .  
 $A$  es **abierto** si todos sus puntos son interiores, es decir, si  $A = \text{int } A \equiv \{\mathbf{x} \text{ interiores a } A\}$ .

$\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$  es **punto de acumulación** de  $A$  si en todo entorno de  $\mathbf{p}$  hay infinitos puntos de  $A$ .

$A$  es **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación  $\Leftrightarrow \mathbf{R}^n - A$  es abierto (teorema).

La **frontera** o **borde** de  $A$  es  $\partial A \equiv \{\mathbf{x} : \forall r, B_r(\mathbf{x}) \text{ contiene puntos de } A \text{ y de } \mathbf{R}^n - A\}$ .

El **cierre** de  $A$  es el conjunto  $\bar{A} = \text{int } A \cup \partial A$ .  $\bar{A}$  es un conjunto cerrado (teorema).

$A$  es **acotado** si existe  $M \in \mathbf{R}$  con  $\|\mathbf{x}\| < M \forall \mathbf{x} \in A$ .  $A$  es **compacto** si es cerrado y acotado.

[La demostración del primer teorema es la misma que quizás se vió en  $\mathbf{R}$ :

$A$  cerrado,  $a \in \mathbf{R} - A \Leftrightarrow a \notin A \Rightarrow a$  no de acumulación de  $A \Rightarrow \exists B(a, r) \cap A = \emptyset, B(a, r) \subset \mathbf{R} - A$ .

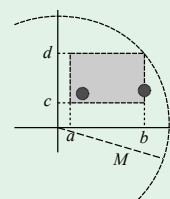
Si  $\mathbf{R} - A$  abierto, demostremos que  $A$  es cerrado probando: ' $a \notin A \Rightarrow a$  no es de acum. de  $A$ ':

$a \notin A \Rightarrow a \in \mathbf{R} - A$  abierto  $\Rightarrow \exists r / B(a, r) \subset \mathbf{R} - A \Rightarrow B(a, r) \cap A = \emptyset \Rightarrow a$  no es de acumulación.

El otro. Si  $\mathbf{p}$  es de acumulación de  $\bar{A}$  o pertenece a  $\partial A$  si en todo entorno suyo hay, además de los infinitos puntos de  $A$ , otros que no son de  $A$ , o pertenece  $\text{int } A$  si para algún  $r$  todos son de  $A$ ].

[Intuitivamente,  $A$  es abierto cuando no contiene a su frontera, y cerrado cuando lo hace].

**Ej 6.** El producto cartesiano de intervalos abiertos  $(a, b) \times (c, d)$  (rectángulo sin borde) es un conjunto  $A$  abierto en  $\mathbf{R}^2$ : para cualquier  $\mathbf{a}$  del conjunto hay un  $B_r(\mathbf{a}) \subset A$  (por ejemplo, si  $r$  es el mínimo de las distancias a los 4 lados).  $A$  no es cerrado pues los puntos de  $\partial A$  son de acumulación y no son de  $A$ . Como su frontera  $\partial A$  son los 4 lados, es  $\bar{A} = [a, b] \times [c, d]$ .  $\bar{A}$  no es abierto (los puntos de  $\partial A$  no son interiores) y es cerrado, pues sus puntos de acumulación son los puntos de  $A$  o de  $\partial A$  y todos son del conjunto. Como también  $\bar{A}$  es acotado es compacto.

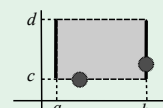


**Ej 7.** Hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados, como  $A = [a, b] \times (c, d)$ .

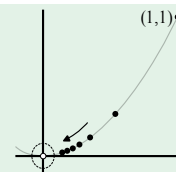
Los puntos de los lados derecho e izquierdo son de  $A$ , pero no son interiores.

Los de los lados superior e inferior son de acumulación y no son de  $A$ .

[Los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son el  $\emptyset$  y  $\mathbf{R}^n$ ].

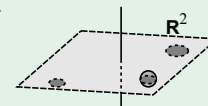


**Ej 8.**  $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}), n \in \mathbf{N}\}$  no es abierto, pues posee puntos no interiores (de hecho, ninguno lo es).  $S$  tiene sólo un punto de acumulación, el  $(0, 0) \notin S$ , límite de esta sucesión en  $\mathbf{R}^2$  (no se tratan sucesiones en estos apuntes, pero basta hallar los límites de cada componente).  $S \cup \{0\}$  sí sería cerrado, con lo que también sería compacto, pues está claramente acotado (sería el cierre  $\bar{S} = \partial S$ ).



**Ej 9.** Es inmediato comprobar que  $\mathbf{R}^2$  como subconjunto de  $\mathbf{R}^2$  es abierto y cerrado.

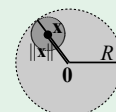
Pero visto como subconjunto de  $\mathbf{R}^3$  no es abierto pues ninguno de sus puntos es interior: dado cualquier  $\mathbf{a}$  cualquier bola  $B_r(\mathbf{a})$  se sale de  $\mathbf{R}^2$ . Sigue siendo cerrado como subconjunto de  $\mathbf{R}^3$  (pero no está acotado y no es compacto).



**Ej 10.**  $A = B_R(\mathbf{0})$  es, para cualquier  $R$ , un conjunto abierto en  $\mathbf{R}^n$ :

Para cualquier  $\mathbf{x} \in B_R(\mathbf{0})$ ,  $\exists r = R - \|\mathbf{x}\|$  tal que  $B_{R - \|\mathbf{x}\|}(\mathbf{x}) \subset A$ ,

pues si  $\mathbf{y} \in B_{R - \|\mathbf{x}\|}(\mathbf{x})$  es  $\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| < R - \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| = R$ .

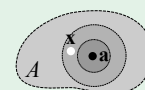


[imagen en  $\mathbf{R}^2$  para intuir].

**Ej 11.** Demostremos que si  $A$  es un abierto de  $\mathbf{R}^n$  y  $\mathbf{x} \in A$  entonces  $A - \{\mathbf{x}\}$  es abierto.

Sea  $\mathbf{a} \in A - \{\mathbf{x}\}$ . Como  $A$  es abierto, hay  $B_r(\mathbf{a}) \subset A$ , pero la bola podría contener a  $\mathbf{x}$ .

Si  $R = \min\{r, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|\}$  está  $B_R(\mathbf{a}) \subset A - \{\mathbf{x}\} \Rightarrow \mathbf{a}$  interior a  $A - \{\mathbf{x}\} \Rightarrow A - \{\mathbf{x}\}$  abierto.





## 1.2 Gráficas de funciones escalares

$$f: D \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(\mathbf{x})$$

Las **funciones escalares** (que también se llaman **campos escalares** o funciones reales de varias variables reales) asignan a cada punto  $\mathbf{x}$  de un **dominio**  $D \equiv \text{dom } f$  un único número real  $f(\mathbf{x})$ .

[Si no se dice nada más, el dominio  $D$  del campo serán los  $\mathbf{x}$  para los que  $f$  tiene sentido].

La **imagen** o **recorrido** de  $f$  será (igual que en  $\mathbf{R}$ ) el conjunto  $\text{im } f = f(D) \equiv \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D\}$ .

Su **gráfica** será el conjunto de puntos de la forma  $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$ , con  $(x_1, \dots, x_n) \in D$ .

Si  $n = 1$  las gráficas son las curvas en el plano que se habrán dibujado en el cálculo en una variable. Para  $n \geq 3$  se mueven en un espacio de dimensión  $\geq 4$  y no se pueden ya representar. Pero si  $n = 2$ , la gráfica es una **superficie en el espacio** que se puede intentar trazar en perspectiva. Veamos cómo obtener información sobre ella.

$$f: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Para esquematizar (sin ordenador) su gráfica  $z = f(x, y)$  hallaremos **secciones** (curvas en el espacio) obtenidas cortando la superficie con diferentes planos.

Las secciones más interesantes se consiguen cortando con planos  $z = \text{cte}$ , llamadas **curvas de nivel** (es decir, curvas del plano  $xy$  sobre las que  $f$  toma un valor constante, que pueden ser complicadas).

Unas fáciles de hallar son las obtenidas haciendo  $x = \text{cte}$  o  $y = \text{cte}$ , en particular el corte con el plano  $yz$  (el del papel o la pizarra, para  $x = 0$ ) o con el  $xz$  (el perpendicular, para  $y = 0$ ).

Veamos varios ejemplos de superficies, más o menos sencillas. Serán fáciles de dibujar aquellas que sean de revolución o que no dependan de una de las variables. Pero en muchas ocasiones nos deberemos conformar con tener sus curvas de nivel (que ya nos describen la gráfica, como un mapa da idea de una zona montañosa). Como último recurso acudiremos a veces al ordenador (al programa Maple, casi siempre en estos apuntes).

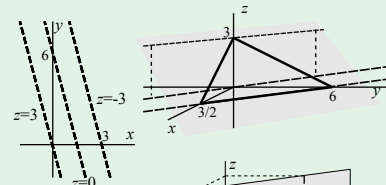
**Ej 1.** Comencemos esquematizando un par de planos. El primero lleva a una  $f$  de las anteriores:

$$4x + y + 2z = 6 \rightarrow z = f(x, y) = 3 - 2x - \frac{1}{2}y.$$

Los cortes con los 3 planos coordenados son  $z = 3 - 2x$ ,  $z = 3 - \frac{1}{2}y$ ,  $y = 6 - 4x$ .

Las curvas (rectas) de nivel son:  $z = C \rightarrow y = 6 - 2C - 4x \nearrow C = 0$

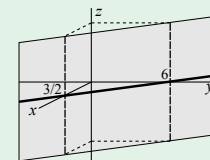
[Sabemos además que el vector  $(4, 1, 2)$  es normal al plano].



$$4x + y = 6 \text{ no define } z = f(x, y) \text{ pero, al no depender de } z, \text{ es sencillo}$$

dar su gráfica: es la de la recta  $y = 6 - 4x$  trasladada verticalmente.

[Igual de fácil sería si no dependiese de  $y$  o de  $x$ ].

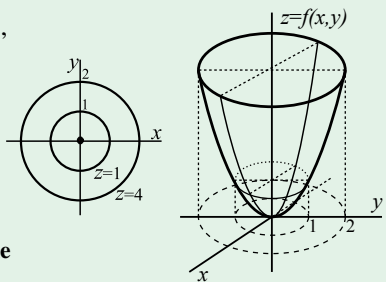


**Ej 2.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Las curvas de nivel, dadas por  $x^2 + y^2 = C$ , son circunferencias, de radio  $\sqrt{C}$ ,  $C \geq 0$ .

[Si  $C = 0$  es sólo  $(0, 0)$ , la imagen de  $f$  es  $[0, \infty)$ ].

Las secciones con  $x = 0 \rightarrow z = y^2$   
 $y = 0 \rightarrow z = x^2$  son parábolas. Es fácil (en este caso) dibujar la gráfica: un '**paraboloide de revolución**'.

[Si las curvas de nivel son circunferencias centradas, y esto sucede cuando  $f$  depende de  $x^2 + y^2$ , la superficie es de revolución].

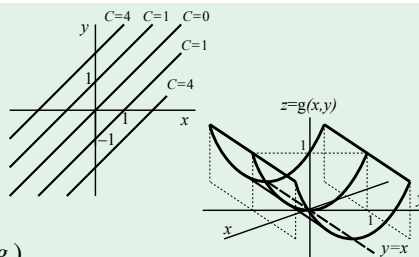


**Ej 3.**  $g(x, y) = (x - y)^2 = C \rightarrow x - y = \pm\sqrt{C}$  (rectas paralelas).

En concreto, si  $C = 0, 1, 4$  se tiene  $y = x$ ,  $y = x \pm 1$ ,  $y = x \pm 2$ .

El corte con  $x = 0$  es una parábola:  $z = y^2$ . También lo son los cortes con  $y = 0$  ( $z = x^2$ ) o con  $y = -x$  ( $z = 4x^2$ ).

Viene a ser la gráfica de la parábola  $z = y^2$  trasladada en horizontal siguiendo la recta  $y = x$  (que es donde se anula la  $g$ ).

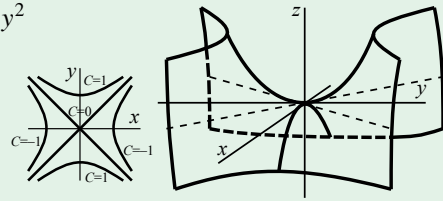


**Ej 4.**  $h(x, y) = y^2 - x^2$ . Dibujemos la gráfica de este ‘paraboloide hiperbólico’ (silla de montar).

Los cortes con  $y=0$  y  $x=0$  son las parábolas  $z = -x^2$  y  $z = y^2$   
[y en general son parábolas los cortes con  $y=C$  y  $x=C$ ].

Las curvas de nivel son las hipérbolas  $y^2 - x^2 = C$   
[en particular, para  $C=0$  son las rectas  $y = \pm x$ ].

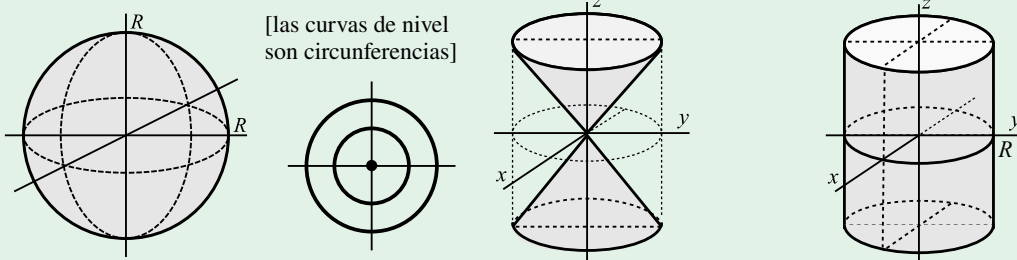
No es fácil hacer el dibujo en 3 dimensiones, pero las curvas de nivel y los cortes ya nos daban una idea de la gráfica.



Hay otras **superficies importantes** en el curso que definen más de una (o no definen ninguna) función escalar. Las 3 siguientes no vienen dadas en la forma anterior  $z = f(x, y)$  sino en la forma más general  $F(x, y, z) = k$ . [En el capítulo 6 veremos otra forma de describir superficies, como función de dos parámetros  $u$  y  $v$ ].

**Ej 5.** Dibujamos ahora  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  (superficie esférica),  $z^2 = x^2 + y^2$  (cono),  $x^2 + y^2 = R^2$  (cilindro).

Las primeras definen dos campos escalares  $z = f(x, y)$ :  $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ , y la otra ninguno (el + describe la parte superior de la superficie esférica o el cono y el - la parte inferior).



Los cortes con  $x=0$  son, para la esfera, la circunferencia  $y^2 + z^2 = R^2$ , es decir,  $z = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$  y, para este sencillo cono, las rectas  $z = \pm y$  de pendiente  $\pm 1$ .

El cilindro no depende de  $z$ . Circunferencia de radio  $R$  llevada verticalmente (desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ ).

En todos los ejemplos dibujados hasta ahora aparecían potencias  $\leq 2$ , con lo que son varios tipos de ‘cuádricas’:  $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + ax + by + cz = d$  (equivalentes a las cónicas en  $\mathbb{R}^3$ ).

Los términos en  $xy, xz, yz$  vienen a girar la cuádrica y los lineales  $x, y, z$  a trasladar su centro. Además de las anteriores, en teoría y problemas nos irán apareciendo otras: elipsoides, hiperboloides de una y dos hojas, cilindros parabólicos... y en esa expresión general se pueden ocultar otro tipo de objetos más simples, como planos o incluso el conjunto vacío (por ejemplo,  $y^2 - 2yz + z^2 = 0$  es simplemente el plano  $z = y$  y ningún punto cumple  $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ ).

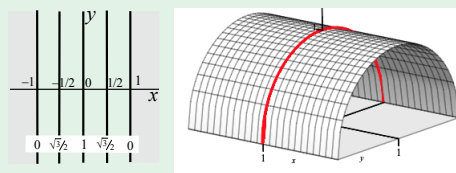
La clasificación general de las cuádricas (y de las cónicas) es más propia de los libros de álgebra.

Dibujemos dos superficies fáciles más: la primera sólo depende de  $x$  y la segunda es de revolución. En ambas aparecen raíces y en la segunda además hay una exponencial:

**Ej 6.**  $k(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ . Su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la de  $z = \sqrt{1 - x^2}$ .

Su dominio es  $|x| \leq 1$  y sus curvas de nivel  $k = C$  son las rectas verticales  $x = \pm\sqrt{1 - C}$  con  $0 \leq C \leq 1$ .

Es la mitad con  $z \geq 0$  del cilindro  $x^2 + z^2 = 1$  (otra cuádrica).

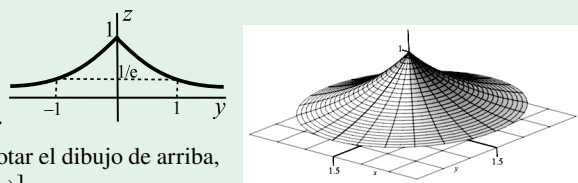


**Ej 7.**  $e(x, y) = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Es de revolución, porque sobre  $x^2 + y^2 = C$  es constante (vale  $e^{-\sqrt{C}}$ ).

Basta dibujar el corte con  $x=0$  (con el plano del papel) para deducir su gráfica.

$e(0, y) = e^{-\sqrt{y^2}} = e^{-|y|}$ , par y es  $e^{-y}$ , si  $y \geq 0$ .

[Sería fácil hacer el dibujo a mano, pues bastaría rotar el dibujo de arriba, pero nos hemos ayudado del ordenador (del Maple)].

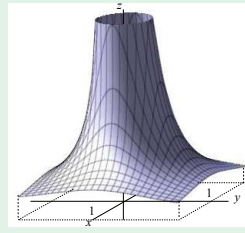
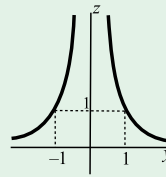
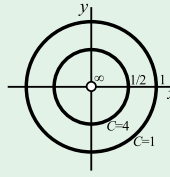


Esta también es sencilla (también es de revolución), y es la primera que ‘se va al infinito’ en algún punto.

**Ej 8.**  $i(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$  con curvas de nivel  $x^2+y^2 = \frac{1}{C}$  y corte  $z = \frac{1}{y^2}$  con  $x=0$ .

Volvemos a dibujar las curvas de nivel y el corte con el plano del papel.

Bastaría hacer rotar la sección, pero, por comodidad, le hemos pedido al Maple que nos dibuje la gráfica en  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .



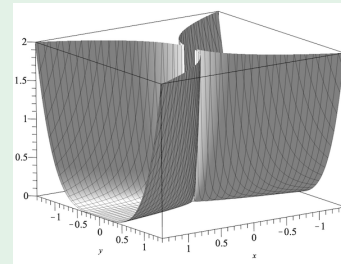
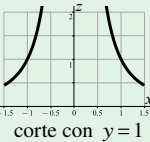
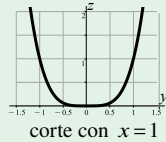
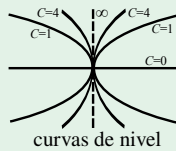
Pero es claro que, en general, aunque se puedan dibujar algunas secciones será muy difícil dar su gráfica en perspectiva, aunque se pueda dar una idea de ‘por donde va la gráfica’, sobre todo si ha sido posible dibujar sus curvas de nivel. Como en los siguientes ejemplos (que muestran discontinuidades):

**Ej 9.**  $p(x, y) = \frac{y^4}{x^2} = C \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{C}} y^2$  (parábolas para los  $C > 0$ ).

Además es  $p(x, y) = 0$  si  $y=0$  y la  $p$  no está definida si  $x=0$ .

Cuando  $x=a$  todos los cortes son parábolas cuárticas  $z = \frac{1}{a^2} y^4$ .

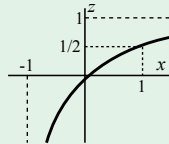
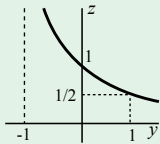
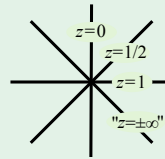
Para  $y=b$  son curvas que se van a infinito al tender  $x$  hacia 0.



Con lo anterior es fácil hacerse una idea de la gráfica, pero lo difícil es plasmarlo en el papel.

**Ej 10.**  $r(x, y) = \frac{x}{x+y} = C \rightarrow y = (\frac{1}{C} - 1)x$  (rectas pasando por el origen).

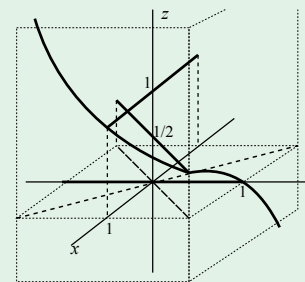
Dando valores a  $C$ , o mejor, como son  $y = mx$ , dando valores a  $m$  en  $r(x, mx) = \frac{1}{1+m}$ , se tienen las curvas de nivel (y ya una idea de la gráfica).



Los cortes con:

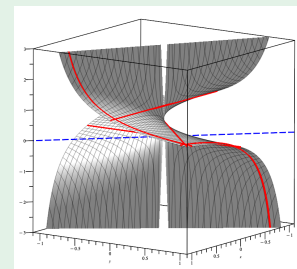
$$x=1 \rightarrow z = \frac{1}{1+y}, \quad y=1 \rightarrow z = \frac{x}{x+1}$$

son los dibujos de la izquierda.



Todas las rectas y curvas pintadas en línea continua en el dibujo espacial pertenecen a la superficie. Utilizando Maple (con el código de abajo) hemos dibujado a la derecha la superficie y junto a ella (en rojo) dichas curvas. Fuera de  $y = -x$ , donde  $r$  no está definida, la función es suave (será continua con la definición que veremos en la próxima sección).

```
> with(plots): s0:=plot3d(x/(x+y), x=-1.1..1.1, y=-1.1..1.1,
view=-3..3, color=white, grid=[201,201]):
G:=spacecurve([t, -t, 0], t=-1.1..1.1, thickness=3, color=blue,
linestyle=dash):
RR:=spacecurve([[0, t, 0], [t, 0, 1], [t, t, 1/2]], t=-1.1..1.1,
thickness=5, color=red):
Cy:=spacecurve([1, t, 1/(1+t)], t=-0.7..1.1, thickness=5, color=red):
Cx:=spacecurve([t, 1, t/(1+t)], t=-0.8..1.1, thickness=5, color=red):
display([s0, G, RR, Cy, Cx]);
```



[Los dibujos 3d del Maple y otros programas permiten su giro mediante ratón o similar, pudiendo mirar la superficie bajo distintas perspectivas].

[Para  $n=3$  lo único que se puede dibujar (si son sencillas) son sus ‘superficies de nivel’  $f(x, y, z) = C$ . Por ejemplo, esas superficies de nivel son para  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  esferas de diferente radio].

### 1.3 Límites y continuidad en $\mathbf{R}^n$

Las definiciones de **límite** y **continuidad** para un campo escalar  $f: D \in \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  de dominio  $D$  son muy parecidas (aparentemente) a las de  $\mathbf{R}$ . Si  $\mathbf{a}$  es interior a  $D \cup \{\mathbf{a}\}$  es casi igual:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L \text{ si } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \text{ entonces } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

Para  $n=2$ , esto significa que debe existir un  $\delta$  tal que la imagen de  $f$  en  $B_\delta^*(\mathbf{a})$  esté comprendida entre los planos  $z=L-\varepsilon$  y  $z=L+\varepsilon$ , por pequeño que sea  $\varepsilon$ .

Con el siguiente retoque de la definición (para generalizar los límites laterales) también podemos hablar de límites en los puntos  $\mathbf{a} \in \partial D$ :

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L \text{ si } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \mathbf{x} \in D \text{ y } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \text{ entonces } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon.$$

[También son análogas las definiciones de límites que incluyen infinitos como  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ ].

La definición de **continuidad** para puntos interiores es también como la de  $\mathbf{R}$ :

$$f \text{ continua en } \mathbf{a} \in \text{int}D \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta \text{ tal que } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

Y si  $D$  incluye su frontera y  $\mathbf{a} \in \partial D$  basta añadir  $\mathbf{x} \in D$  para definir su continuidad.

Decir que una  $f$  es continua en un conjunto  $A$  significa que lo es en cada uno de los puntos de  $A$ .

Teoremas (como los de  $\mathbf{R}$  y que no demostramos aquí) aseguran que **suma**, **producto** y **cociente con denominador no nulo** de  $f$  y  $g$  continuas en un punto son continuas en ese punto. Y también lo es la **composición** de campos escalares con funciones reales continuas:

**Teor 1.**  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  continua en  $\mathbf{a}$ ,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continua en  $f(\mathbf{a}) \Rightarrow g \circ f$  continua en  $\mathbf{a}$ .

[En  $\mathbf{R}$  se pueden demostrar estos teoremas utilizando sucesiones que aquí no hemos tratado, pero ahora se podría usar sólo para probarlos todos la definición  $\varepsilon-\delta$ . Por ejemplo, para éste último bastaría precisar la idea de que  $|g(f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{a}))| < \varepsilon$  si  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$  suficientemente pequeño, lo que es cierto porque entonces  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})|$  lo es por ser  $f$  continua en  $\mathbf{a}$  y  $g$  ser continua en  $f(\mathbf{a})$ ].

Demostremos ahora que  $f(\mathbf{x}) = C$  y que  $f(x_1, \dots, x_n) = x_k$  son continuas en cada punto de  $\mathbf{R}^n$ :

$$|f(\mathbf{x}) - C| = 0 < \varepsilon \quad \forall \delta, \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| = |x_k - a_k| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon \text{ tomando } \delta = \varepsilon.$$

De esto y los teoremas deducimos, como ocurría en  $\mathbf{R}$ , que muchísimos campos escalares lo son en todos o en casi todos los puntos a simple vista y que no se necesita, por tanto, la definición casi nunca. Por ejemplo, son obviamente continuas en todo  $\mathbf{R}^2$  todas las funciones polinómicas dibujadas en los ejemplos 1-4 de la sección 1.2 anterior, pues son sumas de productos de funciones continuas.

También se puede asegurar sin más que son continuas en todo su dominio:

$$f(x, y) = \frac{xy - x^2}{y^2 + 3} \text{ (cociente de polinomios en } xy \text{ con denominador no nulo)}$$

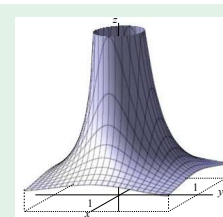
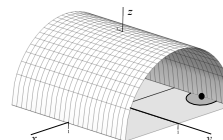
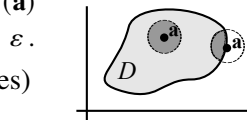
$$h(x, y, z) = e^{xyz} \text{ (composición del campo } f(x, y, z) = xyz \text{ y la continua } g(z) = e^z \text{)}.$$

También es continua en  $\mathbf{R}^2$  la  $e(x, y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$  del ejemplo 7 de 1.2 ( $\sqrt{z}$  lo es para los  $z \geq 0$ ).

Y también lo son las  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  del 5 y  $z = \sqrt{1 - x^2}$  del 6 en todo su dominio, bordes incluidos ( $\|\mathbf{x}\| = R$  y  $|x| = 1$  respectivamente), si se usa además la definición de continuidad en los puntos frontera.

No es difícil analizar tampoco nuestra primera función discontinua (el ejemplo 8):

**Ej 1.**  $i(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  es claramente continua para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , que es el único punto en el que se anula su denominador. Y también es claro que no tiene límite en ese punto y que 'tiende a  $\infty$ ' (o sea, para  $\mathbf{x}$  en un entorno  $B_\delta^*(\mathbf{0})$  será  $i(\mathbf{x}) > K$  para cualquier  $K$  dado, siendo  $\delta$  suficientemente pequeño). [Hay teoremas como en  $\mathbf{R}$  que precisan el esquema " $\frac{1}{\pm 0} = \infty$ " (algo positivo dividido por algo que tiende a 0 y es positivo tiende a  $\infty$ ). No olvidemos el falso  $1/0 = \infty$ ].



Sólo hay que detenerse a mirar la continuidad en algunos puntos patológicos (lo mismo que se hacía en  $\mathbf{R}$ ). Pero aquí el análisis de estos puntos muchas veces se complica bastante. El concepto de límite en varias variables presenta algunas sutilezas que no aparecen en el de una variable. Veamos más ejemplos en  $\mathbf{R}^2$  para ir aprendiendo algunas de las técnicas:

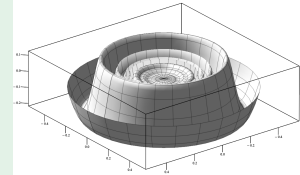
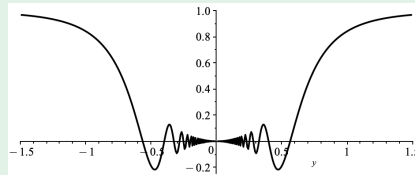
**Ej 2.**  $h(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$ , con  $h(0, 0) = 0$ , es también obviamente continua si  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

Para ver que lo es además en el origen se puede utilizar en este caso poco complicado la definición

$$|h(x, y) - h(0, 0)| \leq |x^2 + y^2| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon},$$

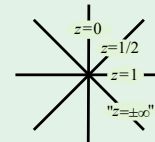
o mirarla como composición de la conocida continua  $g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  y el campo  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , o incluso utilizar que sigue siendo aquí cierto (y es fácil de probar) que ‘cero  $\times$  acotado = cero’.

[La gráfica de la superficie de revolución es el giro de su corte con  $x = 0$  que es la curva de la izquierda].



**Ej 3.** El ejemplo 10 de 1.2:  $r(x, y) = \frac{x}{x+y}$  es evidentemente continua en todo  $(x, y)$  tal que  $x+y \neq 0$ .

Que no tiene límite en el origen es muy claro a la vista de las curvas de nivel: tan cerca del punto como queramos (por pequeño que sea el  $\delta$ ) hay puntos en los que  $r$  vale 0, otros en los que vale  $1/2$ , en otros 1, ...

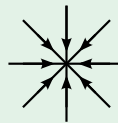


¿Existe el límite en algún otro punto  $(a, -a)$ ? Tampoco, porque cerca de cada uno [el  $(0,0)$  incluido]  $r$  toma valores tan grandes (y tan pequeños) como queramos, como nos aseguran, por ejemplo, las secciones con cada  $x = a \neq 0$ :  $z = \frac{a}{a+y}$  que tienen asíntota vertical en  $y = -a$ .

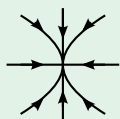
**Ej 4.**  $s(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ , con  $s(0, 0) = 0$  vuelve a ser continua claramente si  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . ¿Lo es en  $(0, 0)$ ?

Vamos a acercarnos al origen a lo largo de diferentes curvas.

Empezamos con las rectas  $y = mx$ :  $s(x, mx) = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .



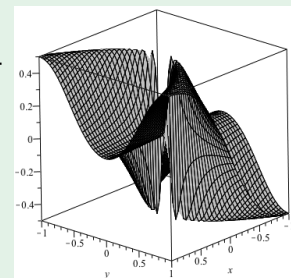
Pero esto no es la definición del límite en  $\mathbf{R}^2$ .



La  $s$  pide más las **parábolas**  $x = py^2$ :  $s(py^2, y) = \frac{p}{p^2 + 1}$ .

Tan cerca como se quiera del origen hay puntos en los que el campo vale, por ejemplo,  $\frac{1}{2}$  ( $p = 1$ ). **Discontinua en 0.**

[Dibujada con un ordenador, presenta  $s$  el aspecto feo del dibujo de la derecha].



Acercarse al punto problemático siguiendo diferentes curvas y obtener siempre el mismo límite **no prueba** nunca la existencia del límite en  $\mathbf{R}^n$ , pues hay otras infinitas formas distintas de acercarse. Con estos cálculos lo que se consigue a veces (como en los ejemplos 3 y 4) es probar que **no existe** obteniendo límites distintos, o diferentes del valor de la función en el punto, o curvas sobre las que no hay límite. Y para hallar límites de una variable se tienen además las técnicas ya conocidas.

En los dos ejemplos anteriores las curvas de nivel eran sencillas (rectas y parábolas). En el siguiente sólo algunas de ellas lo son, pero bastan para deducir la discontinuidad (o basta acercarse por rectas).

**Ej 5.** Sea  $u(x, y) = \frac{y^2 - x^4}{x^2 + y^2}$ . Su único problema de continuidad vuelve a darse en  $(0, 0)$ .

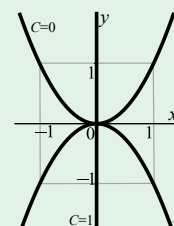
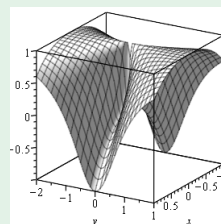
Son fáciles de hallar estas curvas de nivel:  $u = 0 \rightarrow y^2 = x^4, y = \pm x^2$  parábolas.  
 $u = 1 \rightarrow x^2(1 + x^2) = 0$ , eje  $x = 0$ .

Como tan cerca de  $\mathbf{0}$  como queramos vale  $u = 0$  y  $u = 1$   
 $\Rightarrow u$  no puede tener límite en el punto y es discontinua [definiendo  $u(0, 0) = 0, 1$  o cualquier otro valor].

[Otro valor fácil de llevar a la gráfica es  $u(x, 0) = -x^2$ ].

Nos asegura también que no tiene límite:

$$u(x, mx) = \frac{m^2 - x^2}{1 + m^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{m^2}{1 + m^2}, \text{ distinto para cada } m.$$



Para hallar límites (y analizar la continuidad y probarla en ocasiones) en el origen  $(0, 0)$  a veces es útil (pero en general lo complica) utilizar las **coordenadas polares**  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ :

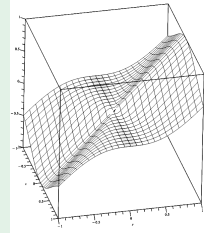
**Ej 6.** Sea  $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$ . ¿Es continua en  $(0, 0)$ ? Con su expresión polar  $f(r, \theta) = r \sin^3 \theta$ , queda claro que cerca del origen se puede hacer tan pequeño como queramos:

$$|f(r, \theta) - 0| = r |\sin^3 \theta| \leq r < \varepsilon \text{ si } \|(x, y) - (0, 0)\| = r < \delta = \varepsilon.$$

Usar cartesianas exige más vista:

$$\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| = |x| \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \text{ si } \|(x, y)\| < \delta = \varepsilon.$$

Adjuntamos dibujo de maple. Es continua pero con algún pliegue raro.  
[Esta función no será diferenciable en el origen].



Generalicemos la idea del ejemplo anterior con un teorema:

**Teor 2.** Si  $|f(r, \theta) - L| \leq g(r)$  y  $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$  entonces  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$ .

[Pues  $|f(r, \theta) - L| < \varepsilon$  para el  $\delta$  que garantiza que  $|g(r) - 0| < \varepsilon$ ].

El teorema **no dice** que el límite exista si  $f(r, \theta) \rightarrow L$  cuando  $r \rightarrow 0$ , exige que también podamos **acotar los términos en  $\theta$** . Nos da un contraejemplo la  $p(x, y)$  dibujada en el ejemplo 9 de 1.2:

**Ej 7.** Para  $p(x, y) = \frac{y^4}{x^2}$ ,  $p(0, y) = 0$  se cumple que  $p(r, \theta) = r^2 \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$  (incluso si  $x = 0$ ,  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ).

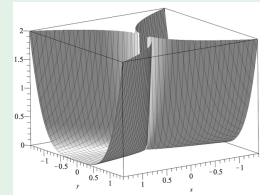
Pero cualquier corte con  $y = b$ ,  $z = \frac{b^4}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$  y no tiene límite en  $(0, 0)$

[ni en ningún  $(0, b)$ , pues en ellos esta función positiva se va a infinito, y es obvio que es continua (y tiene límite) en cualquier  $(a, b)$ ,  $a \neq 0$ ].

[Que  $f(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$  viene a equivaler a que el límite acercándonos por rectas sea 0.

En este caso es  $p(x, mx) = m^4 x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  que, desde luego, no dice que  $p$  tienda a 0].

También nos daría fácilmente la discontinuidad en el origen el simple hecho de que es  $p(y^2, y) = 1 \neq 0$ .



Las polares también nos prueba la discontinuidad de algunas funciones escalares:

**Ej 5\*.** Escribiendo la  $u(x, y)$  del ejemplo 5 en polares obtenemos  $u(r, \theta) = \sin^2 \theta - r^2 \cos^4 \theta \xrightarrow{r \rightarrow 0} \sin^2 \theta$ .  
Luego no hay límite pues, al depender de  $\theta$ , depende de la dirección por la que nos acerquemos.

Nuestros últimos ejemplos serán en  $\mathbf{R}^3$ , con técnicas análogas a las de  $n=2$  (aunque sin dibujos).

**Ej 8.** Estudiemos la continuidad en  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$  de  $F(x, y, z) = \frac{3x^m}{x^2+y^2+4z^2}$ ,  $F(\mathbf{0}) = 0$ , para  $m = 1, 2$  y  $3$ .  
[En los otros puntos es trivial, por ser el denominador no nulo].

En primer lugar, observemos que para  $m = 1$  es **discontinua**, pues  $F(x, 0, 0) = \frac{3}{x} \rightarrow \pm \infty$  si  $x \rightarrow 0^\pm$ .

Obtengamos ahora información, ya con  $m \geq 2$ , al acercarnos por distintas rectas  $(at, bt, ct)$ ,  $t \rightarrow 0$ :

$$F(at, bt, ct) = \frac{3a^m t^{m-2}}{a^2 + b^2 + 4c^2} \cdot \begin{cases} \text{Si } m=2, F \text{ toma valores distintos sobre cada una y es } \mathbf{discontinua}. \\ \text{Para } m=3, \text{ la } F \text{ tiende a } 0 \text{ cuando } t \rightarrow 0 \text{ y } \mathbf{puede ser } F \text{ continua}. \end{cases}$$

Ya con  $m = 3$ , si no estuviese el 4 con el  $z^2$  las coordenadas esféricas cumplirían el papel sencillo de las polares del plano. El cálculo se complica, pero se puede usar la definición para este caso:

$$|F(x, y, z) - 0| = |x| \frac{3x^2}{x^2+y^2+4z^2} \leq 3|x| \leq 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} < \varepsilon \text{ si } \|(x, y, z)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

[En estos cocientes de polinomios en los que el denominador sólo se anula en un punto la idea es que el campo será continuo cuando todas las potencias del numerador son mayores].

Acabamos la sección admitiendo el siguiente importante teorema sobre continuidad en conjuntos compactos que generaliza el conocido resultado del cálculo en  $\mathbf{R}$  para funciones continuas en intervalos cerrados:

**Teor 3.**  $f$  continua en un compacto  $A \Rightarrow f$  alcanza sus valores máximo y mínimo en  $A$ .

[Si  $f$  no es continua, o  $A$  no es cerrado o no acotado es fácil dar ejemplos en los que alguno de los extremos no se alcanza. La  $i$  discontinua del ejemplo 1 no tiene máximo en cualquier compacto que contenga el origen. Cualquier plano inclinado no alcanza su máximo ni su mínimo en la no cerrada bola unidad  $B_1(\mathbf{0})$ , ni en el no acotado espacio  $\mathbf{R}^2$ ].

[Para calcular esos extremos, como en  $\mathbf{R}$ , acudiremos a derivadas (en el capítulo 3)].

## 2. Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

### 2.1 Derivadas de campos escalares

#### Derivadas direccionales, derivadas parciales y gradiente

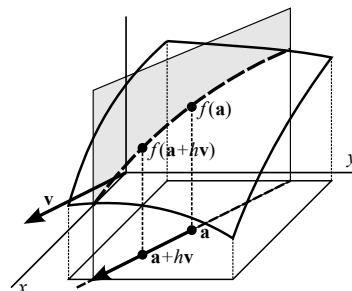
Sean  $f: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  y  $\mathbf{a} \in \text{int } D$  para que  $f$  esté definida en un entorno de  $\mathbf{a}$ . Para hallar la derivada en  $\mathbf{R}$  se usan los valores de  $f$  en  $\mathbf{a}$  y en puntos cercanos  $\mathbf{a}+h$ . En  $\mathbf{R}^n$  hay puntos en cualquier dirección. Miremos cómo varía  $f$  a lo largo de una recta que pase por  $\mathbf{a}$  (dada por un vector  $\mathbf{v}$ ), es decir, en  $\mathbf{R}^2$ , la variación de la función de una variable obtenida al cortar su gráfica con un plano vertical que pase por  $\mathbf{a}$ . Definimos entonces:

La **derivada según el vector  $\mathbf{v}$**  de  $f$  en un punto  $\mathbf{a}$  es:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \equiv f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} \quad (\text{si existe}).$$

Cuando  $\mathbf{v}$  es **unitario** se le llama **derivada direccional** (de  $f$  en la dirección del vector  $\mathbf{v}$  en el punto  $\mathbf{a}$ ).

[Es la derivada de la función de una variable  $f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$  en  $t=0$ ].



Veremos pronto formas cortas de hallar estas derivadas, pero por ahora sólo utilizamos la definición:

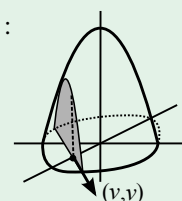
**Ej 1a.** Hallemos la derivada de  $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$  en  $(1, 0)$  según el vector  $(v, v)$ :

$$D_{\mathbf{v}}f(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - (1+hv)^2 - 4(hv)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2hv - 5h^2v^2}{h} = -2v.$$

[O bien, si  $h(t) = f(1+tv, tv) = 3 - 2tv - 5t^2v^2$  es  $h'(0) = -2v$ ].

En particular, en ese punto son:  $D_{(1,1)} = -2$ ,  $D_{(2,2)} = -4$ ,  $D_{(-1,-1)} = 2, \dots$

Las dos derivadas direccionales son  $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}f(1, 0) = -\sqrt{2}$  y  $D_{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})}f(1, 0) = \sqrt{2}$ .



El caso más importante aparece al tomar como  $\mathbf{v}$  algún vector de la base canónica:

A la derivada de  $f$  en la dirección de  $\mathbf{e}_k$  se le llama **derivada parcial** de  $f$  respecto a  $x_k$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \equiv f_{x_k}(\mathbf{a}) \equiv D_k f(\mathbf{a}) \equiv D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k+h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{h}.$$

Es decir,  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$  es la derivada en el punto  $x = a_k$  de la función  $g(x) = f(a_1, \dots, x, \dots, a_n)$  de una sola variable que se obtiene mirando todas las  $x_i$  constantes menos la  $x_k$ .

En  $\mathbf{R}^2$  usaremos las notaciones  $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ , y en  $\mathbf{R}^3$  además  $\frac{\partial f}{\partial z} = f_z$ .

Por tanto, para  $\mathbf{R}^2$ ,  $f_x(a, b)$  es la derivada de  $f(x, b)$  en  $x=a$  y  $f_y(a, b)$  la de  $f(a, y)$  en  $y=b$ . Y el significado geométrico de las derivadas parciales en  $\mathbf{R}^2$  es claro: representan las **pendientes de las tangentes a las curvas corte con planos  $x=a$  o  $y=b$** .

Si las parciales existen para cada uno de los  $\mathbf{x} \in D$  las  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  son otros  $n$  campos escalares.

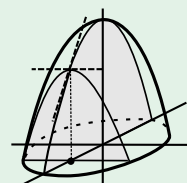
Se dice que un campo  $f \in C^1$  en un abierto  $D$  si sus parciales son continuas en ese conjunto.

[Se lee 'f es c uno' o 'f es de clase uno' en  $D$  y se abrevia  $f \in C^1(D)$ ].

Se llama **gradiente** de  $f$  al vector  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$  y es  $\nabla f(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$ .

**Ej 1b.** Si  $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$  es  $f_x = -2x$  ( $4$  y  $-4y^2$  son constantes en este paso) y es  $f_y = -8y$ . La  $f$  es, pues,  $C^1$  en todo  $\mathbf{R}^2$ . Y el gradiente es  $\nabla f = (-2x, -8y)$ .

En particular, son  $f_x(1, 0) = -2$ ,  $f_y(1, 0) = 0$ , pendientes de las tangentes a las parábolas corte con  $y=0$ ,  $x=1$  [ $g(x) = 4 - x^2$  y  $g(y) = 3 - 4y^2$ ] en  $x=1$ ,  $y=0$ , respectivamente. [ $f_x < 0$  por decrecer  $f$  al crecer  $x$  y  $f_y = 0$  por el máximo].



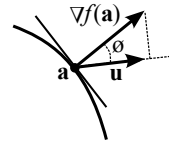
Una vez calculado el  $\nabla f$  es muy fácil, casi siempre, hallar las derivadas según cualquier vector [la definición inicial, al igual que en  $\mathbf{R}$ , sólo se necesitará para funciones raras y en algunos puntos]:

**Teor 1.** Si  $f \in C^1$  en un entorno de  $\mathbf{a}$ , la derivada según el vector  $\mathbf{v}$  es  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ .

En  $\mathbf{R}^2$ :  $\mathbf{v} = (u, v)$ ,  $\frac{f(a+hu, b+hv) - f(a, b)}{h} = \frac{f(a+hu, b+hv) - f(a, b+hv)}{h} + \frac{f(a, b+hv) - f(a, b)}{hv} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f_x(a, b)u + f_y(a, b)v$

[aplicando el TVM a  $g(x) = f(x, b+hv)$  en  $[a, a+hu]$ ,  $\exists c$  con  $g(a+hu) - g(a) = g'(c)hu$ , o sea:  $f(a+hu, b+hv) - f(a, b+hv) = f_x(c, b+hv)hu$  y  $f_x(c, b+hv) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f_x(a, b)$  por ser  $f_x$  continua].

**Significado del gradiente:** Sea  $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$  y sea  $\mathbf{u}$  unitario. Según el teorema es  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos \phi$ . Así que la  $D_{\mathbf{u}}$  direccional es la componente del gradiente en la dirección de  $\mathbf{u}$ . La  $D_{\mathbf{u}}$  será máxima cuando  $\cos \phi = 1$  [si ambos vectores tienen la misma dirección y sentido, y su valor es  $\|\nabla f\|(\mathbf{a})$ ]. **La dirección y sentido de  $\nabla f$  son aquellos en los que  $f$  crece más deprisa.** Si  $\cos \phi = 0$ , será  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = 0$ : **en la dirección perpendicular a  $\nabla f$  el campo no varía.** Así, en  $\mathbf{R}^2$ , será  $\nabla f$  perpendicular a las curvas de nivel de  $f$  (a sus tangentes). [Y en  $\mathbf{R}^3$  será perpendicular a las superficies de nivel].



**Ej 1c.** Para la  $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$ , ya es muy fácil hallar las  $D_{\mathbf{v}}$  del Ej 1a:  $\nabla f = (-2x, -8y) \Rightarrow$

$$D_{(1,1)}f(1,0) = (-2, 0) \cdot (1, 1) = -2, \quad D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,0) = (-2, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}, \dots$$

Dibujemos ahora algunos vectores gradientes y algunas curvas de nivel (las elipses  $x^2 + 4y^2 = 4 - C$ ).

Se dibuja  $\nabla f$  en los puntos  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(2, 1)$

[vectores, a escala,  $(-4, 0)$ ,  $(-8, 0)$ ,  $(0, -8)$  y  $(-4, -8)$ ]

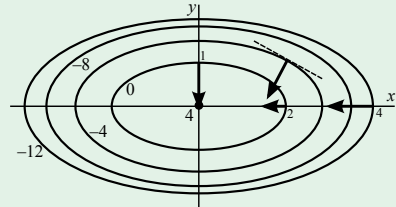
y las curvas para  $C = 4, 0, -4, -8, -12$ .

Viendo la gráfica de  $f$  como una montaña,  $\nabla f$  indica la máxima pendiente. Entre las derivadas direccionales en  $(2, 1)$  es máxima la fijada por  $\nabla f$ , es decir, en la dirección de

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ [y el valor máximo es } D_{\mathbf{u}}f(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} = 4\sqrt{5} = \|\nabla f(2,1)\| \text{].}$$

Es mínima en la dirección opuesta al gradiente:  $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  [su valor será  $-4\sqrt{5}$ ].

Será nula en la dirección de los vectores perpendiculares a  $\nabla f$  [ $(2, -1)$  o  $(-2, 1)$ ], vectores que son tangentes a la elipse de nivel  $x^2 + 4y^2 = 8$  que pasa por el punto  $(2, 1)$ .



**Ej 2.** Hacemos cálculos similares a los del **Ej 1c** para el campo del Ej 3 de 1.2:  $g(x, y) = (x - y)^2$ .

$$\text{Aquí es } \nabla g(x, y) = (2x - 2y, 2y - 2x) = 2(x - y)(1, -1).$$

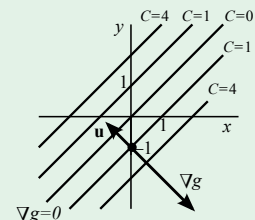
[Vector perpendicular a las rectas de nivel que apunta hacia donde crece  $g$  con módulo  $2\sqrt{2}|x - y|$  mayor según nos alejemos de la recta  $y = x$ ].

En el punto  $(0, -1)$  el vector  $\nabla g$  es  $(2, -2)$ . El vector unitario  $\mathbf{u}$  para el que es, por ejemplo, mínima la derivada direccional en el punto es:

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ [pues } (-1, 1) \text{, de módulo } \sqrt{2} \text{, es opuesto al } \nabla g \text{].}$$

[La derivada mínima será  $D_{\mathbf{u}}g(0, -1) = (2, -2) \cdot \mathbf{u} = -2\sqrt{2} = -\|\nabla g\| = \|\nabla g\| \|\mathbf{u}\| \cos \pi$ ].

[Obsérvese que  $\nabla g = \mathbf{0}$  sobre  $y = x$ : los cortes con  $x = a$  e  $y = b$  son parábolas con mínimos ahí].



**Ej 3.** Los cálculos y significados son análogos en  $\mathbf{R}^3$ . Para  $f(x, y, z) = x^2y - \cos(yz)$  es:

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z) = (2xy, x^2 + z \operatorname{sen}(yz), y \operatorname{sen}(yz)). \text{ En particular es } \nabla f(1, 1, 0) = (2, 1, 0).$$

La derivada de  $f$  en el punto  $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$  según el vector  $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$  es  $(2, 1, 0) \cdot (1, -1, 2) = 1$ .

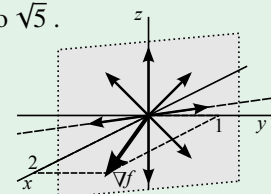
Si buscamos la derivada direccional debemos dividir por el módulo:  $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v} \rightarrow D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .

La  $D_{\mathbf{u}}$  máxima es en la dirección y sentido de  $\nabla f$  y su valor es su módulo  $\sqrt{5}$ .

Es  $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = 0$  en la dirección de todo  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  perpendicular a  $\nabla f$ , que ahora no forman una recta, sino un plano. Si es perpendicular:

$$(2, 1, 0) \cdot (a, b, c) = 2a + b = 0 \rightarrow \mathbf{v} = (a, -2a, c), \|\mathbf{v}\| = \sqrt{5a^2 + c^2} \rightarrow$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + c^2}}(a, -2a, c). \text{ Un par de } \mathbf{u} \text{ son: } (0, 0, 1) \text{ y } \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

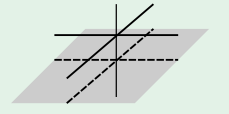




## Diferencial de campos escalares y plano tangente

En  $\mathbf{R}$  se tenía ‘derivable  $\Rightarrow$  continua’. En  $\mathbf{R}^n$  la existencia de las parciales **no** implica la continuidad:

**Ej 4.** Para  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \text{ o } y=0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$  se tiene que  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ ,  
(son derivadas de la función constante 1)  
pero la función es claramente discontinua en el origen.



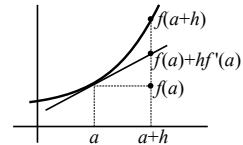
Ni siquiera la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto implica que sea continua [se precisa una definición, la diferencial, que recoja información global de todos los puntos cercanos a  $\mathbf{a}$ ]:

**Ej 5.**  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ ,  $f(0, 0) = 0$  del Ej 4 de 1.3, que era discontinua en  $(0, 0)$  [se vio usando parábolas], tiene, sin embargo, derivadas según cualquier vector  $\mathbf{v} = (u, v)$  en ese punto, ya que:  
 $f(tu, tv) = \frac{uv^2t}{u^2+v^4t^2}$  es derivable para todo  $u, v$  en  $t=0$  [también lo es si  $u$  o  $v$  son 0].

Una función en  $\mathbf{R}$  era derivable si tenía recta tangente. En  $\mathbf{R}^2$  será diferenciable si posee plano tangente. Reescribimos la definición de derivada:

$$f \text{ derivable en } a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0 \Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

↑ si el numerador es  $o(h)$

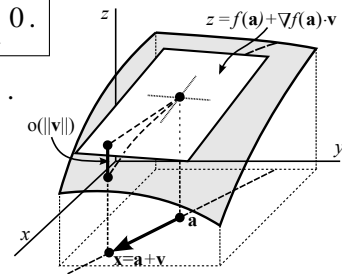


En  $\mathbf{R}^n$  ser diferenciable será casi lo mismo, con el gradiente ocupando el lugar de la derivada. Como en  $\mathbf{R}$ , la notación  $g(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x}\|)$  significa que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0$ .

$$f \text{ es diferenciable en } \mathbf{a} \text{ si existe } \nabla f(\mathbf{a}) \text{ y } \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} 0.$$

O sea, llamando  $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ , lo es si  $f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$ .

Cuando  $n=2$ , si son  $\mathbf{a} = (a, b)$  y  $\mathbf{v} = (u, v)$ ,  $f$  será diferenciable si cerca de  $(a, b)$  es  $f(x, y) = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})u + f_y(\mathbf{a})v + o(\|\mathbf{v}\|)$ , es decir, cuando su gráfica se parece a la de un plano  $z = k + c_1(x-a) + c_2(y-b)$ .



En idioma algebraico,  $f$  es diferenciable en  $\mathbf{a}$  si una ‘aplicación lineal’

$df_{\mathbf{a}}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , llamada **diferencial** de  $f$ , la aproxima cerca del punto  $\mathbf{a}$ :  $f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{a}) + df_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{v}\|)$ .

Los  $n$  números que dan una aplicación lineal son aquí las parciales en  $\mathbf{a}$ , es decir, el gradiente. Abusando algo del lenguaje diríamos que, si  $f$  es diferenciable ‘su diferencial es  $\nabla f$ ’.

Si  $f$  es diferenciable parece que existirán todas las derivadas direccionales y que va a ser continua.

**Teor 2.**

$$f \text{ diferenciable en } \mathbf{a} \Rightarrow \text{existe } D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \forall \mathbf{v}, \text{ es } D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \text{ y } f \text{ es continua en } \mathbf{a}.$$

$$\text{Si } f \text{ diferenciable, } \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{\nabla f(\mathbf{a}) \cdot h\mathbf{v} + o(\|h\mathbf{v}\|)}{h} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} + \frac{o(\|h\mathbf{v}\|)}{\|h\mathbf{v}\|} \frac{\|h\mathbf{v}\|}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

$$|f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{a})| \leq \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{v}\| + |o(\|\mathbf{v}\|)| \xrightarrow{\mathbf{v} \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow f \text{ continua en } \mathbf{a}.$$

¿Cómo saber en la práctica si un campo  $f$  es diferenciable? Con la siguiente **condición suficiente** (demostrada en los libros de cálculo en  $\mathbf{R}^n$ ) es inmediato en la mayoría de los casos:

$$\text{Teor 3. } f \in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a} \Rightarrow f \text{ diferenciable en } \mathbf{a}.$$

**Ej 1d.** La  $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$  de siempre, que es  $C^1$  en  $\mathbf{R}^2$ , es diferenciable, pues, en cada punto.

En particular, en  $(2, 1)$ , con  $f(2, 1) = -4$  y  $\nabla f(2, 1) = (-4, -8)$  se tiene entonces que

$$f(2+u, 1+w) = -4 - 4u - 8w + o(\sqrt{u^2 + w^2}) \Leftrightarrow f(x, y) = -4 - 4(x-2) - 8(y-1) + o(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}).$$

**Ej 3b.** Para  $f(x, y, z) = x^2y - \cos(yz)$ , como  $f_x = 2xy$ ,  $f_y = x^2 + z \sin(yz)$  y  $f_z = y \sin(yz)$  son continuas  $\forall (x, y, z)$ , será  $f$  diferenciable en todos los puntos de  $\mathbf{R}^3$  y todo es fácil de calcular.

Por ejemplo, cerca de  $(1, 1, 0)$  tenemos esta buena aproximación para  $f$ :

$$f(1+u, 1+v, w) \approx f(1, 1, 0) + \nabla f(1, 1, 0) \cdot (u, v, w) = 0 + (2, 1, 0) \cdot (u, v, w) = 2u + v.$$

[Con una calculadora:  $f(1.01, 1.01, 0.01) \approx 0.0303$ ,  $f(1.1, 1.1, 0.1) \approx 0.337$ , parecidos a 0.03 y 0.3].

Analizar la diferenciabilidad en puntos problemáticos normalmente, como pasaba con la continuidad, no es sencillo. Al igual que en continuidad, es muchas veces fácil ver que una  $f$  no es diferenciable (viendo que no se cumple algo que implica la diferenciabilidad) y más complicado es probar que sí lo es.

Por ejemplo, es inmediato afirmar que las funciones de los ejemplos 4 y 5 **no son diferenciables** en el origen, **porque no son continuas** en dicho punto, y deben serlo según el teorema 2.

Una  $f$  diferenciable debe tener todas las derivadas direccionales en el punto, con lo que tampoco lo puede ser, por ejemplo, una  $f$  para la que alguna derivada parcial no exista:

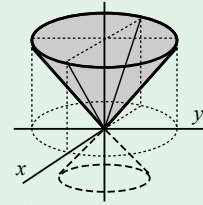
**Ej 6.** ¿Es diferenciable  $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ? (mitad superior del cono  $z^2 = x^2+y^2$ ).

Lo es claramente en cualquier punto distinto del  $(0, 0)$  por ser continuas sus derivadas parciales  $f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  y  $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ . ¿Qué ocurre en el origen?

Sobre los ejes son  $f(x, 0) = |x|$  y  $f(0, y) = |y|$ , funciones no derivables en 0.

No existen ni  $f_x(0, 0)$  ni  $f_y(0, 0)$  (ni ninguna direccional). No es diferenciable.

(Claramente no hay plano tangente en el origen y sí lo hay en cualquier otro punto).



Sólo en contadas ocasiones y en algunos puntos habrá que acudir a la definición de diferencial:

**Ej 7.** ¿Es  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$  (Ej 6 de 1.3) diferenciable en  $(0, 0)$ ? (en cualquier otro punto sí).

Vimos que era continua. Además:  $f(x, 0) = x \Rightarrow f_x(0, 0) = 1$ ,  $f(0, y) = 0 \Rightarrow f_y(0, 0) = 0$ .

Para ser diferenciable, debe tener límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ :

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3(x^2+y^2)^{-1} - x}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

pero el límite no existe, ya que sobre las rectas  $y = mx$  su valor  $\frac{-m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$  es distinto para cada  $m$ .

**Ej 8.**  $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2+y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$  sí es diferenciable en  $(0, 0)$ . El polares la continuidad es fácil:

$$|f(r, \theta) - 0| = r^2 \cos^4 \theta \leq r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \Rightarrow f \text{ continua en } \mathbf{0}.$$

Y también existen las parciales (una vez más tenemos que acudir a la definición):

$$f(x, 0) = x^2 \Rightarrow f_x(0, 0) = 2x|_{x=0} = 0, \quad f(0, y) = 0 \Rightarrow f_y(0, 0) = 0. \text{ Es decir, } \nabla f(0, 0) = \mathbf{0}.$$

Sólo falta comprobar que:  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) - \mathbf{0} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$  (que es fácil en polares).

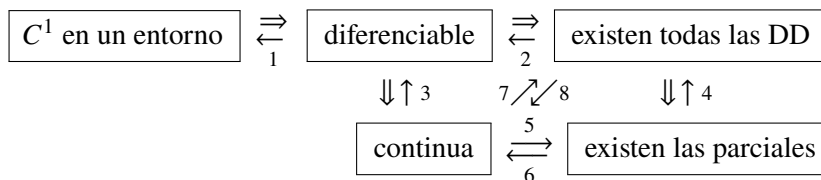
**Ej 9.**  $f(x, y) = (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$ . Ya vimos (Ej 2 de 1.3) que era continua en el origen.

Para ver si es diferenciable comenzamos hallando sus parciales en el origen:

$$f(x, 0) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \Rightarrow f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(h^{-2}) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0 \text{ (} 0 \times \text{acotado)}.$$

Análogamente,  $f_y(0, 0) = 0$ . Como  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - 0 - \mathbf{0} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$  es diferenciable.

Hagamos un resumen de todas las implicaciones que hemos ido viendo anteriormente:



Todas las flechas son falsas si  $n > 1$  (para  $n = 1$  son 2 y 4 trivialmente ciertas). Demos contraejemplos para cada una de ellas (la mayoría ya se han analizado):

1.  $f(x, y) = (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$  (Ej 9) es diferenciable pero no  $C^1$ , pues, por ejemplo,  $f_x = 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$  no tiene límite en  $(0, 0)$ .

4,6.  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \text{ o } y=0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$  (Ej 4), con parciales en el origen, discontinua y sin más DD.

2,6,8.  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ ,  $f(0, 0) = 0$  (Ej 5) tiene todas las DD, es discontinua y no es diferenciable.

3,5,7.  $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$  (cono), es continua pero sin ninguna DD (y no es diferenciable).

Volvamos al plano tangente. De la discusión sobre diferenciabilidad se deduce para  $\mathbf{R}^2$  que si  $f$  es diferenciable, el **plano tangente** a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, b)$  es:

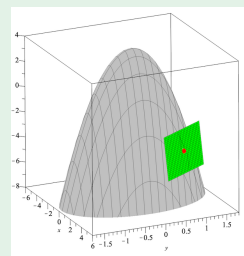
$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) .$$

**Ej 1e.** Calculemos el plano tangente en  $(2, 1)$  a la superficie descrita por la muy analizada función  $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$  :

$$f(2, 1) = -4, \nabla f(2, 1) = (-4, -8) \rightarrow z = -4 - 4(x-2) - 8(y-1) .$$

Es decir:  $z = 12 - 4x - 8y$  (bastaba quitar el  $o$  del ejemplo 1d).

[Dibujamos con Maple, para comprobar la tangencia, la superficie (en gris) para  $-6 \leq x \leq 6, -1.8 \leq y \leq 1.8, -8 \leq z \leq 4$ , y el plano tangente (en verde)].



Como en  $\mathbf{R}^3$  es  $\nabla F$  perpendicular a las superficies de nivel, esto nos da un modo de hallar el **plano tangente en un punto  $(a, b, c)$  de una superficie  $S$  dada en la forma  $F(x, y, z) = K$**  :

$$\nabla F(a, b, c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0 \quad [\text{si } \nabla F \neq 0]$$

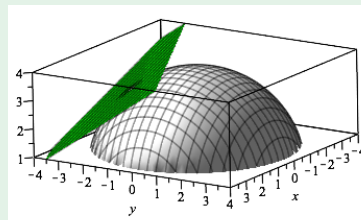
**Ej 10.** Por ejemplo, hallemos el plano tangente en  $(1, -2, 3)$  a la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$  :

$$\nabla F(1, -2, 3) = (2x, 2y, 2z)|_{(1, -2, 3)} = (2, -4, 6) \rightarrow$$

$$2(x-1) - 4(y+2) + 6(z-3) = 0, \text{ o bien, } z = \frac{1}{3}(14 - x + 2y) .$$

Más largo es hallar el plano tangente a  $z = +\sqrt{14 - x^2 - y^2}$  usando la fórmula de más arriba:  $z_x = \frac{-x}{\sqrt{\dots}}, z_y = \frac{-y}{\sqrt{\dots}},$

$$z_x(1, -2) = -\frac{1}{3}, z_y(1, -2) = \frac{2}{3} \rightarrow z = 3 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y+2) \uparrow$$



La segunda expresión del plano tangente permite hallarlo incluso en los casos en que, a diferencia del ejemplo anterior, no se pueda despejar la  $z$  (lo difícil en esos casos no suele ser hallar el plano tangente, sino encontrar puntos de la superficie):

**Ej 11.** Sea  $F(x, y, z) = x^2 e^{2y+2} + 4 \sin(x+2z) + 2z^2$ . Hallemos el plano tangente y la recta normal a la superficie  $F(x, y, z) = 6$  en el punto  $(2, -1, -1)$ .

$$\nabla F(x, y, z) = (2x e^{2y+2} + 4 \cos(x+2z), 2x^2 e^{2y+2}, 8 \cos(x+2z) + 4z) .$$

$$\nabla F(2, -1, -1) = (8, 8, 4) = 4(2, 2, 1) \quad [\text{usamos el vector normal más sencillo}] .$$

El plano tangente es, pues:  $2(x-2) + 2(y+1) + (z+1) = 0$ , o más compacto,  $2x + 2y + z = 1$  .

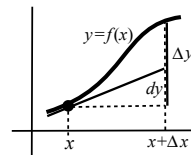
Y la recta normal será:  $\mathbf{x} = (2t+2, 2t-1, t-1)$  (conocemos un punto y el vector director).

Hagamos ahora unos pequeños comentarios sobre la ‘**diferencial de los físicos**’, empezando con las  $f$  derivables de  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{R}$ . Con la notación de la sección podemos poner:

$$df_x(h) = f'(x)h \text{ o } df_x(\Delta x) = f'(x)\Delta x, \text{ y es } \Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) .$$

O, llamando  $dy = f'(x)\Delta x$  al incremento de la parte lineal:  $\Delta y = dy + o(\Delta x)$ , y cuando  $\Delta x$  es pequeño se comete poco error tomando  $dy$  en lugar de  $\Delta y$ .

No es raro ver escrito simplemente  $dy = f'(x) dx$ , interpretando  $dy$  como un ‘incremento infinitesimal’ de la  $y$  para otro  $dx$  de la  $x$ . Se está sustituyendo entonces sin decirlo  $\Delta y$  por  $dy$ , el incremento correspondiente a la función por el correspondiente a la tangente.



En  $\mathbf{R}^2$ , para una  $z = f(x, y)$  diferenciable (si no, carece de sentido), no es impreciso escribir:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

y se parecen, para  $\Delta x, \Delta y$  pequeños,  $\Delta z$  y el incremento de la parte lineal  $dz = df_{(x, y)}(\Delta x, \Delta y)$ . (O, lo que es lo mismo, se parecen la función y su plano tangente).

Pero sí vuelve a ser impreciso escribir simplemente  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$  o  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ , típico de los físicos, suponiendo que los incrementos son ‘infinitesimales’.  $dz$  no es simplemente un número pequeño, es el incremento correspondiente a una aplicación lineal (la diferencial).

## Derivadas de orden superior y desarrollos de Taylor

Si las  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  existen para todos los  $\mathbf{x} \in D$  obtenemos  $n$  nuevos campos escalares  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  que podemos volver a derivar consiguiendo las **derivadas parciales de orden 2, 3, ...** :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] \equiv \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_j} \equiv f_{x_j x_k}(\mathbf{x}) \equiv D_{jk} f(\mathbf{x}), \dots$$

**Ej 12.** Si  $f(x, y) = x^2 e^{-2y}$ , sus derivadas primeras  $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x e^{-2y}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -2x^2 e^{-2y}$  vuelven a tener derivadas parciales  $\forall (x, y)$ , con lo que tiene sentido calcular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2 e^{-2y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = -4x e^{-2y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = -4x e^{-2y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = 4x^2 e^{-2y}.$$

Y podríamos seguir calculando derivadas:  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx} = 0, \dots, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy} = -8x^2 e^{-2y}, \dots$

**Ej 13.** Probemos que  $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}$  es solución de  $u_t - u_{xx} = 0$  ('ecuación del calor en la recta').

$$u_t = -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-x^2/4t} + t^{-1/2} \frac{1}{4} x^2 t^{-2} e^{-x^2/4t} = \frac{x^2 - 2t}{4t^{5/2}} e^{-x^2/4t}, \quad u_x = -\frac{1}{2} x t^{-3/2} e^{-x^2/4t},$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} e^{-x^2/4t} + \frac{1}{2} x t^{-3/2} \frac{1}{2} x t^{-2} e^{-x^2/4t} = \frac{x^2 - 2t}{4t^{5/2}} e^{-x^2/4t}. \text{ Por tanto, } u_t - u_{xx} = 0.$$

**Ej 3c.** Si  $f(x, y, z) = x^2 y - \cos(yz)$  ya vimos que  $f_x = 2xy, f_y = x^2 + z \sin(yz), f_z = y \sin(yz) \Rightarrow$

$$f_{xx} = 2y, f_{xy} = 2x, f_{xz} = 0; \quad f_{yx} = 2x, f_{yy} = z^2 \cos(yz), f_{yz} = \sin(yz) + yz \cos(yz);$$

$$f_{zx} = 0, f_{zy} = \sin(yz) + yz \cos(yz), f_{zz} = y^2 \cos(yz). \text{ Algunas derivadas coinciden (no es casual).}$$

Se dice que  $f \in C^n$  en  $D$  abierto si sus derivadas parciales hasta orden  $n$  son continuas en  $D$ .

**Igualdad de Schwarz o de Clairaut:**

$$\text{Si } f \in C^2 \text{ en un entorno de } \mathbf{a} \Rightarrow D_{kj} f(\mathbf{a}) = D_{jk} f(\mathbf{a}), \quad j, k = 1, \dots, n.$$

[La demostración (ver libros), utiliza, como en otros casos, el teorema del valor medio en una variable].

Al igual que muchas funciones  $f(x)$  se pueden aproximar por polinomios y desarrollar en serie de **Taylor** en torno a un punto, se ve en los libros de varias variables que los campos escalares  $f$  admiten también estos desarrollos. La diferencial representa el desarrollo de Taylor de orden 1. Sólo escribimos el polinomio de orden 2 de una  $f$  de dos variables, sin expresiones del resto:

**Teor 4.** Si  $f \in C^2$  en un entorno de  $\mathbf{a} = (a, b)$  y  $\mathbf{x} = (a+h, b+k)$  está próximo a  $\mathbf{a}$ , entonces:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})h + f_y(\mathbf{a})k + \frac{1}{2} [f_{xx}(\mathbf{a})h^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a})hk + f_{yy}(\mathbf{a})k^2] + o(h^2 + k^2).$$

En ocasiones convendrá escribir el polinomio  $P_2(x, y)$  anterior en la forma más desarrollada:

$$f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y-b)^2$$

y en muchas, más que calcular derivadas, serán más útiles los desarrollos conocidos de una variable.

**Ej 12\*.** Hallemos el desarrollo de orden 2 de  $f(x, y) = x^2 e^{-2y}$  en torno a los puntos  $(0, 0)$  y  $(-1, 1)$ :

$$\text{El primero es casi inmediato: } f(x, y) = x^2(1 - 2y + 2y^2 + \dots) = x^2 + o(x^2 + y^2)$$

$$[\text{coherente con el hecho de que la única derivada no nula es } f_{xx}(0, 0) = 2].$$

$$f(-1, 1) = e^{-2}, \quad f_x(-1, 1) = f_y(-1, 1) = -f_{xx}(-1, 1) = -2e^{-2}, \quad f_{yy}(-1, 1) = f_{xy}(-1, 1) = 4e^{-2} \rightarrow$$

$$f(x, y) \approx e^{-2} [1 - 2(x+1) - 2(y-1) + (x+1)^2 + 4(x+1)(y-1) + 2(y-1)^2].$$

$$[\text{A lo mismo llegaríamos desarrollando } (1-s)^2 e^{-2t} \text{ en torno a } (0, 0), \quad s = x+1, \quad t = y-1].$$

Además de dar valores aproximados de campos los desarrollos de Taylor permiten tratar límites complicados.

**Ej 14.** Estudiemos la continuidad y diferenciable en  $(0, 0)$  de  $f(x, y) = \frac{1 - \cos(2x^2 + 2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $f(0, 0) = 2$ .

$$\cos(2t) = 1 - 2t^2 + \frac{2}{3}t^4 - \dots \Rightarrow 1 - \cos(2x^2 + 2y^2) = 2(x^2 + y^2)^2 - \frac{2}{3}(x^2 + y^2)^4 + \dots \Rightarrow$$

$$f(x, y) = 2 - \frac{2}{3}(x^2 + y^2)^2 + \dots \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} 2. \text{ Es } f \text{ continua. El desarrollo da también fácil las parciales.}$$

$$f(x, 0) = \frac{1 - \cos(2x^2)}{x^4} = 2 - \frac{2}{3}x^4 + \dots \Rightarrow f_x(0, 0) = 0 [f'(0) \text{ va con } x]. \text{ Análogamente } f_y(0, 0) = 0.$$

$$\text{Para la diferenciable: } \frac{f(\mathbf{x}) - 2 - 0}{\|\mathbf{x}\|} = -\frac{2}{3}(x^2 + y^2)^{3/2} + \dots \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} 0 \Rightarrow \text{también es diferenciable.}$$

## 2.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena

Tratamos funciones cuyos valores no son escalares, sino vectores. Primero el caso más sencillo:

**Funciones vectoriales:**  $\boxed{\begin{matrix} \mathbf{c}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n \\ t \longrightarrow \mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t)) \end{matrix}}$ . Sus gráficas son **curvas** en  $\mathbf{R}^n$ .

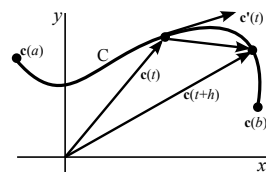
Bastantes veces nos ocuparemos de  $\mathbf{c}$  para  $t$  en un intervalo finito:  $t \in [a, b]$ . Entonces la imagen de  $\mathbf{c}$  es una curva finita que une (en ese sentido) el punto  $\mathbf{c}(a)$  con el  $\mathbf{c}(b)$  [extremos de la curva]. A esa curva orientada la llamaremos también a veces **trayectoria** o **camino**.

Casi siempre trabajaremos en  $\mathbf{R}^2$  o  $\mathbf{R}^3$  y será  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$  o  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

Se dice que  $\mathbf{c}$  es continua en un punto o intervalo si lo son sus  $n$  componentes  $c_1(t), \dots, c_n(t)$ .

Y es **derivable** si las  $n$  lo son y su **derivada** es el vector  $\boxed{\mathbf{c}'(t) = (c'_1(t), \dots, c'_n(t))}$ .

Interpretemos  $\mathbf{c}'(t)$  para  $n=2$  (o  $n=3$ ). Al ser  $\mathbf{c}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}$ , la pendiente de la secante tenderá a la **pendiente de la recta tangente** a la curva  $C$  descrita por  $\mathbf{c}(t)$ . Físicamente, si  $\mathbf{c}(t)$  describe el movimiento de una partícula a lo largo del tiempo [es decir, si es su vector posición, que se suele llamar  $\mathbf{r}(t)$ ],  $\mathbf{c}'(t)$  representa el **vector velocidad**  $\mathbf{v}(t)$ .



[El escalar  $\|\mathbf{c}'(t)\|$  describe la rapidez (velocidad escalar) con la que la partícula avanza por la curva].

Por tanto, ecuaciones de la **recta tangente** a  $C$  en un punto  $\mathbf{c}(t_0)$  (si  $\mathbf{c}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ ) pueden ser:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{c}(t_0) + t \mathbf{c}'(t_0)} \quad \text{o} \quad \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0) \mathbf{c}'(t_0)} \quad \begin{matrix} \text{[esta toca } \mathbf{c}(t_0) \\ \text{cuando } t = t_0] \end{matrix}$$

[Cuando  $\mathbf{c}'(t_0) = \mathbf{0}$  no hay tangente definida y no es extraño que aparezcan picos en la curva].

Si las  $c'_k$  vuelven a ser derivables se puede hallar su derivada segunda  $\mathbf{c}''(t) = (c''_1(t), \dots, c''_n(t))$  [que representa el **vector aceleración**  $\mathbf{a}(t)$ ]. Y se pueden definir  $\mathbf{c}'''(t)$ ,  $\mathbf{c}^{iv}(t)$ , ...

**Ej 1.** Sea  $\mathbf{c}(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$ , con  $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$ .  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(\sqrt{2\pi}) = (1, 0)$ .

Por ser  $\|\mathbf{c}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t^2 + \sin^2 t^2} = 1$ , recorrerá  $\mathbf{c}$  la circunferencia unidad.

$\mathbf{c}'(t) = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)$  será un vector tangente, y es  $\|\mathbf{c}'(t)\| = 2t$

[con lo que este módulo (la velocidad escalar) crece con el tiempo].

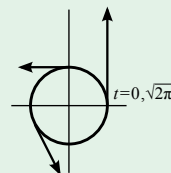
[Obsérvese que llega a  $(0, 1)$  para  $t = \sqrt{\pi/2} \approx 1.25$ , y que tarda el doble de tiempo en dar la vuelta entera].

$\mathbf{c}'(\sqrt{\pi/2}) = (-\sqrt{2\pi}, 0) \rightarrow \mathbf{x} = (-\sqrt{2\pi}t, 1)$  recta tangente en  $(0, 1)$  [más sencilla  $\mathbf{x} = (t, 1)$ ].

El vector aceleración será  $\mathbf{c}''(t) = -2(-\sin t^2, \cos t^2) - 4t^2(\cos t^2, \sin t^2)$ .

[Tiene una componente en la dirección de la velocidad y otra en dirección normal al movimiento, que es algo que se ve que ocurre en general para cualquier  $\mathbf{c}$ ].

[La misma curva se podría describir (de forma más simple) con  $\mathbf{c}_*(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  siendo recorrida en este caso con velocidad  $\|\mathbf{c}'_*(t)\| = 1$  constante].



**Ej 2.** Sea  $\mathbf{c}(t) = (t^3, 2t^2)$ . Dibujemos la curva descrita por  $\mathbf{c}$  para  $t \in [-1, 1]$ , hallemos su recta tangente en el punto  $(-1, 2)$  y el punto en que esta recta tangente vuelve a cortar la curva.

Dando valores a  $t$ , o viendo que se puede escribir  $y = 2x^{2/3}$  sale el dibujo.

[Cuando  $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$  (en el origen) podían aparecer picos y eso fue lo que ocurrió].

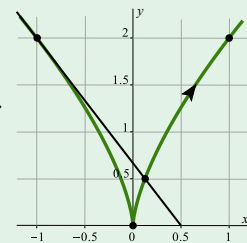
El punto se da si  $t = -1$ :  $\mathbf{c}(-1) = (-1, 2)$  y es  $\mathbf{c}'(-1) = (3t^2, 4t)|_{t=-1} = (3, -4)$ .

La recta tangente es:  $\mathbf{x}(s) = (3s-1, 2-4s)$  [toca  $(\frac{1}{2}, 0)$  cuando  $s = 1/2$ ].

Corta la curva para  $t$  y  $s$  que cumplan:  $t^3 = 3s-1$ ,  $2t^2 = 2-4s \rightarrow$

$(3s-1)^2 = (1-2s)^3$ ,  $8s^3 - 3s^2 = 0$ ,  $s = \frac{3}{8} \rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$  [y  $s=0 \rightarrow (-1, 2)$ ].

[O bien, la curva  $y = 2x^{2/3}$  y la recta  $y = \frac{2-4x}{3}$  se cortan si  $27x^2 = (1-2x)^3$  que lleva a lo mismo].



Más difícil es, desde luego, dibujar curvas en  $\mathbf{R}^3$ . Tratamos el ejemplo clásico, la **hélice**:

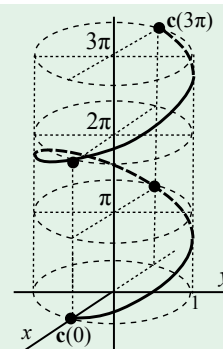
**Ej 3.** Dibujemos la curva descrita por  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 3\pi]$ .

Como es  $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$ , la proyección sobre el plano  $xy$  es la circunferencia unidad, mientras que  $z$  crece constantemente con  $t$ .

El vector velocidad será  $\mathbf{c}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ , y es  $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$ , independiente de  $t$  (se recorre la curva a velocidad escalar constante).

Por ejemplo, para  $t=2\pi$  [en el punto  $(1, 0, 2\pi)$ ] es  $\mathbf{c}'(2\pi) = (0, 1, 1)$  y la recta tangente en ese punto se puede escribir  $\mathbf{x}(t) = (1, t, 2\pi+t)$ .

El vector aceleración  $\mathbf{c}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$  no tiene componente vertical y apunta siempre hacia el eje  $z$ .



### Primer caso de la regla de la cadena.

Las reglas de la cadena en  $\mathbf{R}^n$  generalizan la fórmula de una variable  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ . Empezamos con el caso más sencillo, que une funciones vectoriales y campos escalares:

**Teor 1.** Sean  $\mathbf{c}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$  y  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  de  $C^1$  y sea  $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$ . Entonces  $h$  es derivable y es  $h'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$ , o sea:

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}(t)) x'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{c}(t)) x'_n(t).$$

La última igualdad (por ejemplo cuando  $n=2$ ) se suele escribir en la forma  $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ ,

expresión imprecisa que no deja claro dónde está evaluada cada término [las parciales en  $(x(t), y(t))$  y las derivadas ordinarias en  $t$ ] y que mantiene el nombre  $f$  para  $h$  (pues es la  $f$  sobre una curva).

De hecho,  $h$  describe la **variación del campo  $f$  a lo largo de la curva dada por  $\mathbf{c}$** , y de esto se deduce el resultado: en un  $t_0$  dado,  $h'(t_0)$  mide la variación de  $f$  según el vector tangente a la curva en el punto  $\mathbf{c}(t_0)$ , y esta derivada según el vector viene dada, como sabemos, por  $\nabla f(\mathbf{c}(t_0)) \cdot \mathbf{c}'(t_0)$ .

El resultado se podría escribir así:  $h'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{c}(t)} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$  [esto nos dirá el Teor 3]  
producto de matrices

**Ej 4.** Si  $\mathbf{c}(t) = (t^3, 2t^2)$ ,  $f(x, y) = (y+x^2)^2$  y  $h = f \circ \mathbf{c}$ , hallemos  $h'(-1)$  mediante la regla de la cadena.

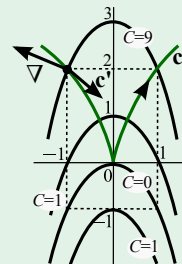
$$\mathbf{c}(-1) = (-1, 2), \quad \mathbf{c}'(-1) = (3, -4), \quad \nabla f = (4x(y+x^2), 2(y+x^2)) \xrightarrow{(-1, 2)} (-12, 6).$$

Y por tanto:  $h'(-1) = \nabla f(\mathbf{c}(-1)) \cdot \mathbf{c}'(-1) = (3, -4) \cdot (-12, 6) = -60$ .

Podemos comprobar el resultado obtenido componiendo y derivando:

$$h(t) = (2t^2 + t^6)^2 \rightarrow h'(t) = 2(2t^2 + t^6)(4t + 6t^5), \quad h'(-1) = -60.$$

[Que la derivada sea negativa implica que la  $f$  decrece al avanzar sobre la curva, como se puede comprobar dibujándola junto a varias curvas de nivel  $f=C$ , que son parábolas de la forma  $y = \pm\sqrt{C-x^2}$  (u observando simplemente el gradiente en el punto)].



Si las funciones son más derivables, la regla anterior nos permite hacer derivadas segundas y sucesivas.

Por ejemplo, para  $n=2$ , de la fórmula que da la  $h'(t) = f_x x' + f_y y'$ , deducimos la derivada segunda:

$$h''(t) = (f_x)' x' + f_x x'' + (f_y)' y' + f_y y'' = f_{xx} (x')^2 + 2f_{xy} x' y' + f_{yy} (y')^2 + f_x x'' + f_y y''.$$

**Ej 5.** Sea  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  de  $C^2$  y sea  $h(t) = f(t, -t, t^2)$ . Hallemos  $h''$  en función de las derivadas de  $f$ , y comprobemos la fórmula obtenida en el caso de que sea  $f(x, y, z) = x + y + z^2$ .

$$\begin{aligned} h'(t) &= f_x - f_y + 2t f_z, & h''(t) &= (f_x)' - (f_y)' + 2t(f_z)' + 2f_z \\ &= f_{xx} - f_{xy} + 2t f_{xz} - f_{yx} + f_{yy} - 2t f_{yz} + 2t f_{zx} - 2t f_{zy} + 4t^2 f_{zz} + 2f_z \\ &= f_{xx} + f_{yy} + 4t^2 f_{zz} - 2f_{xy} + 4t f_{xz} - 4t f_{yz} + 2f_z \end{aligned}$$

En concreto, para la  $f$  dada es  $h(t) = t^4$ ,  $h''(t) = 12t^2$ . Con la fórmula:  $h''(t) = 8t^2 + 4z|_{z=t^2} = 12t^2$ .

Pasemos ya al caso general, con valores vectoriales dependientes de varias variables:

**Campos vectoriales.** Son funciones de  $\mathbf{R}^n$  en  $\mathbf{R}^m$ :

$$\mathbf{f}: D \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

[O funciones vectoriales de varias variables reales sobre un dominio  $D$ . Uno que ya ha aparecido, con  $n=m$ , es  $\nabla f$ ; otro, para  $n=m=3$ , será  $\text{rot } \mathbf{f}$ ; otros serán los cambios de variable que iremos haciendo; y caso particular importante ya tratado son las funciones vectoriales, con  $n=1$ ].

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \text{ será continuo si lo son sus } m \text{ componentes } f_k(\mathbf{x}).$$

[Esto equivale a una definición  $\varepsilon$ - $\delta$ : si  $\forall \varepsilon \exists \delta$  tal que  $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ ].

En la diferencial de  $f$  escalares cumplía un papel importante el vector  $\nabla f$ . Aquí lo cumple una matriz:

$$\text{Se llama } \mathbf{matriz diferencial} \text{ o } \mathbf{jacobiana} \text{ de } \mathbf{f} \text{ en } \mathbf{a} \text{ a } \mathbf{Df}(\mathbf{a}) \equiv \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \dots & \partial f_m/\partial x_n \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$$

[Las  $m$  filas de  $\mathbf{Df}$  son los gradientes de las  $m$  componentes].

$\mathbf{f}$  es **diferenciable** en  $\mathbf{a}$  si existe  $\mathbf{Df}(\mathbf{a})$  y es  $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{Df}(\mathbf{a}) \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$ .  
con  $\mathbf{v}$  vector columna y escribiendo el resultado como fila<sup>↑</sup>

[Es decir, si  $\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{Df}(\mathbf{a}) \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \rightarrow 0$  cuando  $\|\mathbf{v}\| \rightarrow 0$ ].

Y se tiene un resultado similar al de los campos escalares:

**Teor 2.** Si todas las  $f_k \in C^1$  en un entorno de  $\mathbf{a}$  entonces  $\mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{a}$ .

$\mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{a}$  si existe una aplicación lineal  $d\mathbf{f}_{\mathbf{a}}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ , llamada **diferencial** de  $\mathbf{f}$  en el punto  $\mathbf{a}$ , dada por  $d\mathbf{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{Df}(\mathbf{a}) \mathbf{v}$ , tal que:  $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + d\mathbf{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{v}\|)$ .

Una aplicación lineal viene dada por una matriz, incluso, **abusando del lenguaje**, se puede decir que  $d\mathbf{f}_{\mathbf{a}}$  es la **matriz**  $\mathbf{Df}(\mathbf{a})$  [ $f'(a)$  es la matriz más simple y  $\nabla f(\mathbf{a})$  es una matriz  $1 \times n$ ].

Si  $n=1$ , la matriz  $\mathbf{Df}$  pasa a ser una matriz  $m \times 1$ , el vector derivada de una **función vectorial**, y la diferencial es una aplicación lineal de  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{R}^m$  (cuya gráfica es una recta en  $\mathbf{R}^m$ : la tangente). Para seguir la notación de aquí deberíamos escribir  $\mathbf{Dc}(t) = \mathbf{c}'(t)$  como un vector columna (con  $m$  elementos), pero seguiremos con vectores fila y llamando a las  $\mathbf{c}$  derivables más que diferenciables.

**Ej 6.**  $\mathbf{f}(x, y) = (e^{xy}, y, 2x+y^2) = (f(x, y), g(x, y), h(x, y))$  es campo vectorial diferenciable en el punto  $(1, 0)$  [lo es en todo  $\mathbf{R}^2$ ] porque las 6 parciales existen y son continuas en un entorno del punto.

$$\text{Su matriz diferencial es: } \mathbf{Df} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y e^{xy} & x e^{xy} \\ 0 & 1 \\ 2 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Df}(1,0) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ 2u \end{pmatrix}$$

La  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  se parecerá, por tanto, cerca de  $(1, 0)$  a la función lineal de  $\mathbf{R}^2$  en  $\mathbf{R}^3$  que al vector  $\mathbf{v} = (u, v)$  le asigna el nuevo vector  $(1+v, v, 2+2u) = \mathbf{f}(1, 0) + \mathbf{Df}(1, 0) \mathbf{v} \approx \mathbf{f}(1+u, v)$ .

O, escrito de otra forma,  $\mathbf{f}(x, y) = (e^{xy}, y, 2x+y^2) \approx (1+y, y, 2x)$  cerca de  $(1, 0)$ .

[Las diferenciales de los campos escalares  $f$ ,  $g$  y  $h$  llevarían a las mismas expresiones].

En caso de que sea  $m=n$ , típico de los **cambios de variable**, cumplirá un papel importante (por ejemplo en la integración) el determinante de la matriz diferencial  $n \times n$ , llamado jacobiano del cambio:

$$\text{Si } \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}, \text{ el } \mathbf{determinante jacobiano} \text{ es } \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \equiv \mathbf{Jf} \equiv |\mathbf{Df}| = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \dots & \partial f_n/\partial x_n \end{vmatrix}$$

[ $\mathbf{Jf}(\mathbf{a}) \neq 0$  implicará, por ejemplo, que el cambio es inyectivo en un entorno del punto, con lo que habrá función inversa  $\mathbf{f}^{-1}$  en un entorno, que era lo que sucedía en  $\mathbf{R}$  cuando  $f'(a) \neq 0$ ].

**Ej 7.** Sea  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{f}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ , que habitualmente escribiremos  $\begin{matrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{matrix}$ .

$$\text{El determinante jacobiano (del cambio a polares): } \mathbf{Jf} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

Ni siquiera en el caso más simple de las funciones de  $\mathbf{R}^2$  en  $\mathbf{R}^2$  como la anterior es posible dibujar gráficas de campos vectoriales. Habrá que limitarse a dibujar flechas entre dos planos (en este caso).

### Caso general de la regla de la cadena.

Consideremos ahora el caso general de composición de campos vectoriales:

**Teor 3.** Sean  $\mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{R}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{R}^p$ ,  $\mathbf{g}$  diferenciable en  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{f}$  diferenciable en  $\mathbf{b} = \mathbf{g}(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  diferenciable en  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathbf{Df}(\mathbf{b}) \mathbf{Dg}(\mathbf{a})$  [producto de matrices].

[La demostración para  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^1$  se basa en aplicar el Teor 1. en cada fila].

**Ej 8.** Sean  $\mathbf{g}(x, y) = (x - y, y^2)$ ,  $\mathbf{f}(u, v) = (u + v, uv, v)$ . Hallemos  $\mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})$  en  $(2, 1)$ . Con el Teor 3:

$$\mathbf{Df}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Dg}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}, \mathbf{g}(2, 1) = (1, 1) \Rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobemos componiendo y calculando luego la diferencial:

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(x, y) = \mathbf{f}(x - y, y^2) = (x - y + y^2, xy^2 - y^3, y^2), \mathbf{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2y - 1 \\ y^2 & 2xy - 3y^2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

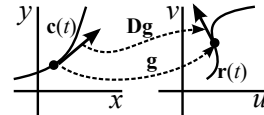
Veamos la forma que adopta el teorema general en otros diferentes casos particulares. El primero muestra el efecto de un cambio de variable sobre una curva:

Sean  $\mathbf{c}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{g}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{c}(t))$ .  
 $(x, y) \rightarrow (u, v)$

[ $\mathbf{r}$  es la curva imagen de  $\mathbf{c}$  a través del cambio  $\mathbf{g}$ ].

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{Dg}(\mathbf{c}(t)) \mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \text{ Es decir:}$$

$$u' = u_x x' + u_y y', \quad v' = v_x x' + v_y y', \quad \text{o si se prefiere:} \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$



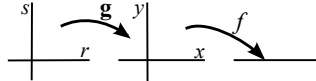
$\mathbf{g}$  transforma puntos y  $\mathbf{Dg}$  transforma vectores.

La matriz diferencial  $\mathbf{Dg}$  transforma el vector tangente a una curva en el vector tangente a la curva imagen.

Otro caso más (que usaremos más a menudo): los **cambios de variable** para funciones de 2 variables.

$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{g}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $h = f \circ \mathbf{g}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$$(r, s) \rightarrow (x, y) \quad (r, s) \rightarrow f(\mathbf{g}(r, s)) = f(x(r, s), y(r, s))$$



$$\left( \frac{\partial h}{\partial r} \quad \frac{\partial h}{\partial s} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} \Rightarrow \left[ \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right], \left[ \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right] \text{ [o escribiendo } f \text{ en vez de } h \text{]}$$

[Conviene memorizar estas fórmulas. No se olvide que  $f_x$  y  $f_y$  están evaluadas en  $(x(r, s), y(r, s))$ ].

**Ej 9.** Si  $\begin{cases} x = r + s^2 \\ y = rs \end{cases}$ , las derivadas de  $f(r + s^2, rs)$  respecto a las variables  $(r, s)$  son  $\begin{cases} f_r = f_x + s f_y \\ f_s = 2s f_x + r f_y \end{cases}$ .

Si  $f \in C^2$  podemos hallar también las derivadas segundas.  $f_x$  y  $f_y$  son también funciones de  $r$  y  $s$  que se derivarán respecto a  $r$  y  $s$  de la misma forma que se derivaba la  $f$ :

$$f_{rr} = (f_r)_r = (f_x)_r + s(f_y)_r = [f_{xx} + s f_{xy}] + s[f_{yx} + s f_{yy}] = f_{xx} + 2s f_{xy} + s^2 f_{yy}$$

$$f_{rs} = (f_r)_s = (f_x)_s + s(f_y)_s + f_y = [2s f_{xx} + r f_{xy}] + s[2s f_{yx} + r f_{yy}] + f_y = 2s f_{xx} + (r + 2s^2) f_{xy} + r s f_{yy} + f_y$$

$$f_{ss} = (f_s)_s = 2s(f_x)_s + r(f_y)_s + 2f_x = 2s[2s f_{xx} + r f_{xy}] + r[2s f_{yx} + r f_{yy}] + 2f_x = 4s^2 f_{xx} + 4r s f_{xy} + r^2 f_{yy} + 2f_x$$

[Para escribir, por ejemplo,  $(f_x)_r$  simplemente se ha utilizado que, según las expresiones para las derivadas primeras, había que derivarla respecto a  $x$  y sumarle  $s$  por su derivada respecto a  $y$ ].

[ $f_{rs}$  se podía haber calculado también así, pues sabemos que las derivadas cruzadas coinciden:

$$f_{rs} = (f_s)_r = 2s[f_{xx} + s f_{yx}] + r[f_{xy} + s f_{yy}] + f_y = 2s f_{xx} + (r + 2s^2) f_{xy} + r s f_{yy} + f_y.]$$

Similares son las fórmulas en  $\mathbf{R}^3$ . Para una  $(r, s, t) \rightarrow f(\mathbf{g}(r, s, t)) = f(x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t))$

las derivadas son:  $f_r = f_x x_r + f_y y_r + f_z z_r$ ,  $f_s = f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s$ ,  $f_t = f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t$ .

[Una vez que 'se le pilla el truco' a los cambios de variable, es fácil dar la expresión desarrollada de cualquier derivada de una función de varias variables  $m$  que, a su vez, dependen de otras  $n$ . En la derivada de la función compuesta final respecto a, por ejemplo, una  $r$  estarán sumadas las  $m$  derivadas respecto a la variables intermedias multiplicadas por las derivadas de éstas respecto a  $r$ ].



## Divergencia, laplaciano, rotacional

Si  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  es campo vectorial  $C^1$ , la **divergencia** de  $\mathbf{f}$  es el campo escalar:  $\operatorname{div} \mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \mathbf{f} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ .

$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$   
[sólo notación, eso no es ningún vector].

En particular, cuando  $\mathbf{f} = (f, g)$  es  $\operatorname{div} \mathbf{f} = f_x + g_y$ , y para  $\mathbf{f} = (f, g, h)$  es  $\operatorname{div} \mathbf{f} = f_x + g_y + h_z$ .

Si  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  es de  $C^2$ , el **laplaciano** de  $f$  es  $\Delta f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ .

Es otro campo escalar. En particular,  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$  o  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ .

Para  $n=3$  hay otro importante campo vectorial que se obtiene a partir de uno dado:

Si  $\mathbf{f} = (f, g, h): \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  es de  $C^1$ , el **rotacional** de  $\mathbf{f}$  es el campo vectorial:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = (h_y - g_z) \mathbf{i} + (f_z - h_x) \mathbf{j} + (g_x - f_y) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f & g & h \end{vmatrix}.$$

interpretando adecuadamente los 'productos'  $\rightarrow$

Algunas propiedades y relaciones (para  $n=3$  y campos  $C^2$ ) fácilmente comprobables son:

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = 0, \quad \operatorname{div}(g \mathbf{f}) = g \operatorname{div} \mathbf{f} + \nabla g \cdot \mathbf{f}, \quad \operatorname{rot}(g \mathbf{f}) = g \operatorname{rot} \mathbf{f} + \nabla g \times \mathbf{f}.$$

Por ejemplo, la primera:  $\operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) = (f_{zy} - f_{yz}) \mathbf{i} + (f_{xz} - f_{zx}) \mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy}) \mathbf{k} = \mathbf{0}$ .

[No sólo el rotacional de un gradiente es  $\mathbf{0}$ . En 5.3 se verá que si el rotacional de un campo  $\mathbf{f} \in C^1$  se anula, este campo será el gradiente de un campo escalar que sabremos calcular].

Igual de fácil se ve la segunda igualdad:  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = h_{yx} - g_{zx} + f_{zy} - h_{xy} + g_{xz} - f_{yz} = 0$ , pues las derivadas cruzadas coinciden por ser todas las funciones  $C^2$ .

Las más largas (y mecánicas) comprobaciones de las otras igualdades (vienen ser generalizaciones de la derivada de un producto) se dejan para problemas.

**Ej 10.** Sea  $\mathbf{f} = (xyz, e^{yz}, y^2)$ .  $\operatorname{div} \mathbf{f} = yz + z e^{yz}$ .  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xyz & e^{yz} & y^2 \end{vmatrix} = (2y - y e^{yz}, xy, -xz)$ .

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = x - x = 0 \quad (\text{debía serlo}). \quad \nabla(\operatorname{div} \mathbf{f}) = (0, z + z^2 e^{yz}, y + e^{yz} + yz e^{yz}). \quad \Delta(\operatorname{div} \mathbf{f}) = (z^3 + y^2 z + 2y) e^{yz}.$$

[No tiene sentido hablar del gradiente o laplaciano de  $\mathbf{f}$ , ni de divergencia o rotacional de escalares. Estos cuatro 'operadores' (reglas que convierten funciones en otras, como también hace la derivada) son 'lineales' (porque lo es la derivada):  $\nabla(af + bg) = a \nabla f + b \nabla g$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , e igual los otros].

Otro ejemplo de operadores diferenciales y también de repaso de la regla de la cadena:

**Ej 11.** Sean  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, xy, 2z)$  y  $\mathbf{c}(t) = (1, 2 \cos t, \sin t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ .

- a) Calcular  $\operatorname{div} \mathbf{f}$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ ,  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f})$ ,  $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f})$ ,  $\Delta(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f})$ , la matriz  $\mathbf{Df}$  y el jacobiano  $J = |\mathbf{Df}|$ .  
b) Si  $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{c})(t)$ , hallar  $\mathbf{r}'(\pi/6)$  componiendo y derivando y con la regla de la cadena.

a)  $\operatorname{div} \mathbf{f} = x + 2$ .  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & xy & 2z \end{vmatrix} = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + (y-1) \mathbf{k} = (0, 0, y-1)$ .  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = 0$  (siempre).

$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) = \nabla(y^2 + x^2 y^2 + 4z^2) = (2xy^2, 2x^2 y + 2y, 8z)$ .  $\Delta(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) = 2x^2 + 2y^2 + 10$ .  $\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .  $J = -2y$ .

b)  $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{c})(t) = (2 \cos t, 2 \cos t, 2 \sin t) \Rightarrow \mathbf{r}'(\pi/6) = (-2s, -2s, 2c)_{t=\pi/6} = (-1, -1, \sqrt{3})$ .

Con la forma matricial de la regla de la cadena:

$$\mathbf{c}(\pi/6) = (1, \sqrt{3}, \frac{1}{2}), \quad \mathbf{c}'(t) = (0, -2 \sin t, \cos t), \quad \mathbf{c}'(\pi/6) = (0, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$\mathbf{r}'(\pi/6) = \mathbf{Df}(\mathbf{c}(\pi/6)) \mathbf{c}'(\pi/6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

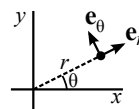
## Cálculos en polares

Para analizar la continuidad ya utilizamos las **coordenadas polares**:  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ .

Escribamos ahora  $\nabla f$  y  $\Delta f$  en polares. Por la regla de la cadena:

$$\begin{cases} f_r = f_x x_r + f_y y_r = \cos \theta f_x + \sin \theta f_y \\ f_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = -r \sin \theta f_x + r \cos \theta f_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_r \cos \theta - \frac{1}{r} f_\theta \sin \theta = f_x \\ f_r \sin \theta + \frac{1}{r} f_\theta \cos \theta = f_y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\nabla f = f_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} f_\theta \mathbf{e}_\theta, \text{ definiendo } \mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta), \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta).$$



[Esta pareja de vectores son unitarios y perpendiculares entre sí y se tiene que  $\frac{d}{d\theta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$ ].

$$\begin{cases} f_{rr} = \cos^2 \theta f_{xx} + 2 \sin \theta \cos \theta f_{xy} + \sin^2 \theta f_{yy} \\ f_{\theta\theta} = r^2 \sin^2 \theta f_{xx} - 2r^2 \sin \theta \cos \theta f_{xy} + r^2 \cos^2 \theta f_{yy} - r \cos \theta f_x - r \sin \theta f_y \end{cases} \Rightarrow \Delta f = f_{rr} + \frac{f_r}{r} + \frac{f_{\theta\theta}}{r^2}.$$

[Basta escribir la suma del segundo miembro y usar que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  para obtener  $f_{xx} + f_{yy}$ ].

**Ej 12.** Sea  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$  [ejemplo de  $f$  vista en 1.3 y en 2.1]. En polares:  $f(r, \theta) = r \cos^3 \theta$ .

Hallemos aquí  $\nabla f$  y  $\Delta f$  en el punto  $(x, y) = (1, 1)$ , o lo que es lo mismo, en  $(r, \theta) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ .

$$\nabla f = \cos^3 \theta \mathbf{e}_r - 3 \cos^2 \theta \sin \theta \mathbf{e}_\theta \Big|_{(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{3\sqrt{2}}{4} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (1, -\frac{1}{2}).$$

$$\Delta f = 0 + \frac{\cos^3 \theta}{r} + \frac{6 \cos \theta \sin^2 \theta - 3 \cos^3 \theta}{r} = \frac{2}{r} \cos \theta (3 - 4 \cos^2 \theta) \text{ que en } (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) \text{ vale } 1.$$

Más largos serían los cálculos trabajando en cartesianas:

$$\nabla f = \left( \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \right), \Delta f = \frac{4x^3 + 6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{8x^3 y^2 - 4x(x^4 + 3x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Otro ejemplo de la utilidad de las polares en el que repasamos además otros conceptos de la sección:

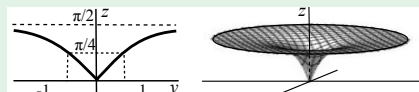
**Ej 13.** Sea  $g(x, y) = \arctan \sqrt{x^2 + y^2}$ . a) Dibujar la gráfica de  $g$ . ¿Es diferenciable en  $(0, 0)$ ?

b) Calcular  $\nabla g(0, -2)$  y  $\Delta g(0, -2)$  en cartesianas y polares.

c) Si  $h(u, v, w) = g(ue^w, 4v + 6w)$ , hallar, utilizando la regla de la cadena,  $\frac{\partial h}{\partial w}(0, 1, -1)$ .

a) De revolución.  $g(0, y) = \arctan |y|$ , par,  $\arctan y$ ,  $y \geq 0$ .

No existe  $g_y(0, 0)$  y no es diferenciable en el origen.



b) En cartesianas:  $g_x = \frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $g_y = \frac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow \nabla g(0, -1) = (0, -\frac{1}{5})$ .

En polares:  $g(r, \theta) = \arctan r$ .  $\nabla g = g_r \mathbf{e}_r = \frac{1}{1+r^2} (\cos \theta, \sin \theta) \Big|_{r=2, \theta=-\pi/2} = \frac{1}{5} (0, -1)$ .

Laplaciano mucho mejor en polares:  $\Delta g = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r = -\frac{2r}{(1+r^2)^2} + \frac{1}{r(1+r^2)} = \frac{1-r^2}{r(1+r^2)^2} \Big|_{r=2} = -\frac{3}{50}$ .

Más largo:  $g_{xx} = \frac{y^2 + y^4 - x^2 y^2 - 2x^4}{(1+x^2+y^2)^2 (x^2+y^2)^{3/2}}$ ,  $g_{yy} = \frac{x^2 + x^4 - x^2 y^2 - 2y^4}{(1+x^2+y^2)^2 (x^2+y^2)^{3/2}}$ .  $\Delta g = \frac{1-x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} \uparrow (0, -2)$

c)  $h_w = g_x x_w + g_y y_w = u e^w g_x + 6 g_y \rightarrow h_w(0, 1, -1) = 0 \cdot g_x(0, -2) + 6 g_y(0, -2) = -\frac{6}{5}$ .

También es útil, en ocasiones, usar polares con **funciones vectoriales**. El vector tangente a una

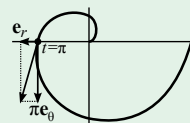
$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)) = r(t) \mathbf{e}_r(t)$$

$$\text{será: } \mathbf{c}'(t) = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \left[ \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta \right] \text{ [componentes radial y transversal de } \mathbf{c}' \text{].}$$

**Ej 14.** Sea la curva  $\mathbf{c}$  (una espiral) definida en polares mediante  $r(t) = t$ ,  $\theta(t) = t$ .

Con la fórmula de arriba:  $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{e}_r + t \mathbf{e}_\theta = (\cos t, \sin t) + t(-\sin t, \cos t)$ .

En este caso es fácil comprobar con cartesianas:  $\mathbf{c}(t) = (t \cos t, t \sin t) \uparrow$



[También puede ayudar en los cálculos en  $\mathbf{R}^3$  la utilización de coordenadas cilíndricas y esféricas, pero no presentaremos estas coordenadas hasta el capítulo 4].

# 3. Funciones implícitas. Máximos y mínimos.

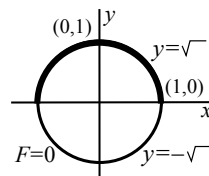
## 3.1 Funciones implícitas e inversas

En Matemáticas se ha derivado implícitamente, pero ¿cuándo una expresión  $F(x, y) = 0$ , con  $F \in C^1$ , define realmente una función derivable  $y = g(x)$  cerca de un punto  $(a, c)$  de la curva? Entonces sería  $F(x, g(x)) = 0$ , y la regla de la cadena nos daría:  $F_x(x, g(x)) + F_y(x, g(x))g'(x) = 0 \Rightarrow g'(a) = -\frac{F_x}{F_y}\Big|_{(a,c)}$ .

¿Cuándo no definirá una función? Parece haber problemas cuando sea  $F_y(a, c) = 0$ .

Por ejemplo, para la circunferencia  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ,  $F_x = 2x$ ,  $F_y = 2y$ , si  $y = 0$  define 2 funciones  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ , no derivables además en los puntos  $(\pm 1, 0)$ .

Cerca de cualquier otro punto, por ejemplo  $(0, 1)$ , sí define una sola  $g(x)$  derivable [aunque en ese mismo punto, con  $F_x = 0$ , no define una única función  $x = h(y)$ ].



Algo análogo sucede en  $\mathbf{R}^3$ . La superficie esférica  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  define una función  $z = g(x, y)$  de  $C^1$  cuando  $F_z = 2z \neq 0$ . Por ejemplo, cerca de  $(0, 0, -1)$ , tal función es  $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ .

Cuando una  $F = 0$  defina  $z = z(x, y)$ , dar sus derivadas es de nuevo fácil derivando implícitamente:

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \Rightarrow F_x + F_z z_x = 0, F_y + F_z z_y = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{F_x}{F_z}, z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

El siguiente **teorema particular de la función implícita** (demostrado en M-T) generaliza estas ideas:

Sea  $F: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  de  $C^1$ ,  $F(\mathbf{a}, c) = 0$  y  $F_z(\mathbf{a}, c) \neq 0$ . Entonces existe una única  $z = g(\mathbf{x})$  de  $C^1$  que satisface  $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$  para  $\mathbf{x}$  cerca de  $\mathbf{a}$ ,  $z$  cerca de  $c$ , y son  $\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\partial F / \partial x_j}{\partial F / \partial z}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Cambiando los papeles de las variables, el teorema también garantiza que  $F(x, y) = 0$  define una función  $x(y)$  cuando  $F_x \neq 0$ , o precisa cuándo  $F(x, y, z) = 0$  define seguro una  $y = y(x, z)$  o una  $x = x(y, z)$ : **cuando la derivada respecto a lo que queremos despejar no se anule en el punto**. Si es 0, esto no implica que no defina una función (pero, si lo hace, probablemente deje de ser  $C^1$ ):

**Ej 1.** Para  $F(x, y) = 8x + y^3 e^{x+1} = 0$  es  $F_x = 8 + y^3 e^{x+1}$ ,  $F_y = 3y^2 e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ . Entonces  $F = 8x = 0$ . El teorema afirma que hay una  $y(x)$  de  $C^1$  salvo en  $(0, 0)$ . Pero podemos despejar:  $y = -2x^{1/3} e^{-(x+1)/3}$ , función única por  $(0, 0)$  [no  $C^1$ ]. En el mínimo de esta función  $(1, -2e^{-2/3})$ ,  $F = 0$  sí define dos funciones  $x(y)$ . [A este punto malo podemos llegar sin despejar:  $8 = -y^3 e^{x+1} \rightarrow F = 8x - 8 = 0 \rightarrow 8 + e^2 y^3 = 0$ ].

El teorema asegura cuándo existe la función definida implícitamente, pero no dice cuál es. De hecho es más interesante si no podemos calcularla (a diferencia de los ejemplos vistos). Lo más complicado entonces para aplicarlo es, usualmente, localizar puntos que pertenezcan a la curva o superficie.

**Ej 2.** Sea  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ . Dibujo de la curva con el 'implicitplot' de Maple:

$F_x = 3(x^2 - y)$ ,  $F_y = 3(y^2 - x)$ . Para  $x \neq y^2$ ,  $F = 0$  define  $y = y(x)$  de  $C^1$  y si  $y \neq x^2$ , una  $x = x(y)$ . Como  $F_x = F_y = 0$  en  $(1, 1)$ , que no es de la curva, y en  $(0, 0)$ , salvo en este último punto la curva describe una función  $C^1$  de una de las variables (en casi todos los puntos, de las 2). Hay problemas si:

$x = y^2 \rightarrow F = y^3(y^3 - 2) = 0 \rightarrow y = 2^{1/3} \rightarrow (2^{2/3}, 2^{1/3}) \approx (1.59, 1.26)$ , punto en que hay dos funciones  $y(x)$  [y en el punto simétrico para  $x(y)$ ].

En el resto de puntos, aunque la  $y(x) \in C^1$  no sea calculable, podemos saber muchas cosas de ella. Por ejemplo:  $y = x \rightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow (0, 0)$  y  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ . Hallemos en el segundo la recta tangente:

$3(x^2 - y) + 3(y^2 - x)y' = 0 \rightarrow y'(\frac{3}{2}) = \frac{x^2 - y}{x - y^2}\Big|_{(3/2, 3/2)} = -1 \rightarrow y = \frac{3}{2} - (x - \frac{3}{2}) = 3 - x$ .

Y ahora,  $y''(\frac{3}{2})$ :  $(2x - y') + (2yy' - 1)y' + (y^2 - x)y'' = 0 \rightarrow y''(\frac{3}{2}) = \frac{2x - 2y' + 2y(y')^2}{x - y^2}\Big|_{(3/2, 3/2)} = -\frac{32}{3}$ .

Tratemos con el teorema una primera superficie definida por una función de 3 variables que no es demasiado complicada y que además permite despejar explícitamente la  $z$  y comprobar afirmaciones:

**Ej 3.** Consideremos la superficie  $S$  dada por  $F(x, y, z) \equiv 3x^2 - 2y^2 + z^2 - 4yz + 2y = 0$ .  $F_z = 2(z - 2y)$ .

Cuando sea  $z \neq 2y$  el teorema de la función implícita garantiza que define una función  $z(x, y)$  de  $C^1$ . Por ejemplo, esto sucede cerca sencillo punto  $\mathbf{a} = (1, 1, 1) \in S$ . Sus derivadas en él se pueden copiar del teorema, o volver a obtenerlas aquí derivando implícitamente:

$$6x + 2zz_x - 4yz_x = 0 \rightarrow z_x = \frac{3x}{2y-z}. \quad -4y + 2zz_y - 4z - 4yz_y + 2 = 0 \rightarrow z_y = \frac{1-2y-2z}{2y-z}.$$

En  $(1, 1, 1)$  estas parciales pasan a valer:  $z_x(1, 1, 1) = 3$ ,  $z_y(1, 1, 1) = -3$ .

De ellas podemos deducir, por ejemplo, su plano tangente:  $z = 1 + 3(x-1) - 3(y-1) = 3x - 3y + 1$ .

Se sabía hallar:  $\nabla F = 2(3x, 1-2y-2z, z-2y) \xrightarrow{(1,1,1)} 2(3, -3, -1)$ .  $(3, -3, -1) \cdot (x-1, y-1, z-1) \stackrel{!}{=} 0$ .

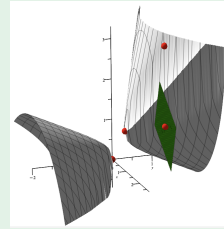
Aquí se puede despejar  $z = 2y \pm \sqrt{6y^2 - 3x^2 - 2y}$ , y el  $-$  nos da la  $S$  cerca del punto  $\mathbf{a}$ . Derivando la expresión calcularíamos las  $z_x$  y  $z_y$  y el plano tangente de una tercera forma.

¿Qué sucede en los puntos del plano  $z = 2y$ ? Sobre él tiene el  $\nabla F$  la tercera componente nula, con lo que su plano tangente será vertical y nunca la posible  $z(x, y)$  que definiese sería  $C^1$ . Observemos además que sobre ese plano están las dos funciones distintas  $\pm\sqrt{\quad}$  que han aparecido al despejar la  $z$ .

En el dibujo de Maple se ve la superficie, dos puntos 'buenos'  $(1, 1, 3)$  y  $\mathbf{a}$ , el plano calculado y dos puntos sobre  $z = 2y$  con plano vertical, el origen y el  $(0, 1/3, 2/3)$ .

Derivando implícitamente se pueden calcular más derivadas. Por ejemplo:

$$3 + (z_x)^2 + zz_{xx} - 2yz_{xx} = 0 \rightarrow z_{xx} = \frac{3 + (z_x)^2}{2y - z}. \text{ Su valor en el punto } \mathbf{a} \text{ sería } 12.$$



Para esta segunda, donde no se puede despejar  $z$ , hallemos su plano tangente en un 'punto bueno' y estudiemos algo qué sucede en otros puntos con dificultades según el teorema de la función implícita:

**Ej 4.** Sea ahora la superficie  $S$  dada por  $F(x, y, z) \equiv y^2 + x^3 + xz^2 - 2z^3 = 1$ . Sus parciales se anulan si:

$$\nabla F = (3x^2 + z^2, 2y, 2z(x - 3z)) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Como el punto  $(0, 0, 0)$  no pertenece a  $S$ , cerca de todo punto suyo (con una parcial no nula) se puede 'despejar' alguna de las variables, definiendo una función  $C^1$  (y tendrá plano tangente).

En concreto, seguro que existe  $z(x, y)$  si  $z \neq 0$  y  $x \neq 3z$ . Hay problemas con  $x(y, z)$  si  $x = z = 0$  (e  $y = \pm 1$  por tanto). Y los tiene  $y(x, z)$  si  $y = 0$  (se puede despejar  $y = \pm\sqrt{\quad}$  y esto los confirma).

**Hallemos el plano tangente en  $(1, 1, 1)$** , que pertenece claramente a la superficie:  $1 + 1 + 1 - 2 = 1$ .

Lo más corto es utilizar el  $\nabla F = (4, 2, -4)$  que nos da  $(2, 1, -2) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0$ ,  $z = x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ .

Ahora nos basamos en las fórmulas que se deducen de la derivación implícita:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{3x^2 + z^2}{2z(3z - x)} \text{ y } z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y}{2z(3z - x)}, \text{ que en el punto } (1, 1, 1) \text{ pasan a valer } 1 \text{ y } \frac{1}{2}.$$

Así que, con la otra fórmula de 2.1 (para campos despejados):  $z = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$ , como antes.

Más formas no sencillas. Despejemos ahora  $y$  en vez de  $z$  y sigamos con fórmulas de implícitas:

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 + z^2}{2y}, \quad y_z = -\frac{F_z}{F_y} = \frac{2z(3z - x)}{2y} \text{ en } (1, 1, 1) \text{ son } -2, 2. \quad y = 1 - 2(x-2) + 2(z-1).$$

Incluso podríamos ahora dar su más complicada expresión  $y = \sqrt{1 - x^3 - xz^2 + 2z^3}$  y derivarla.

Estudiamos ahora la  $S$  **cerca de los puntos**  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ .

[Ilustramos ya los argumentos con otro dibujo de Maple utilizando el 'implicitplot3d'. Se obtiene esa especie de 'sillón', los tres puntos analizados aparecen en rojo y el plano tangente de arriba en verde].



En  $(1, 0, 0)$  puede haber problemas tratando de definir  $z = z(x, y)$ , pero el teorema es sólo  $\Rightarrow$ .

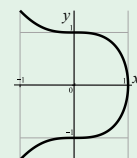
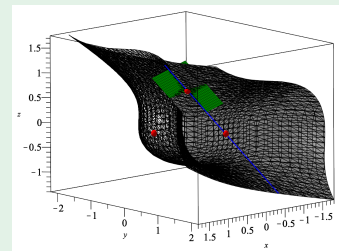
El dibujo del corte de  $S$  con  $y = 0$  los confirma [y era fácil observar que también  $(1, 0, 1/2) \in S$ ].

Vemos ahora qué sucede en  $(0, 1, 0)$  con la  $x$  en función de  $y, z$ .

A la derecha está el sencillo dibujo de  $y^2 + x^3 = 1$  (corte con  $z = 0$ ).

Y el corte con  $y = 1$ :  $x^3 + xz^2 - 2z^3 = (x-z)(x^2 + xz + 2z^2) = 0$  es la recta  $z = x$ .

Todo sugiere que  $F = 1$  sí define una única función  $x = x(y, z)$  cerca del punto, a pesar de ser  $F_x(0, 1, 0) = 0$ . Esta función no será  $C^1$  ( $x_y$  se irá a  $-\infty$ ).



Veamos ahora el **caso general** de funciones implícitas. Queremos ahora resolver  $m$  ecuaciones con  $m$  variables (despejar las  $u_i$  en función de las  $x_j$ ):

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

El papel que cumplía  $F_z$  lo cumplirá aquí este determinante:  $\Delta = \begin{vmatrix} \partial F_1/\partial u_1 & \dots & \partial F_1/\partial u_m \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F_m/\partial u_1 & \dots & \partial F_m/\partial u_m \end{vmatrix}$ .

El **teorema general de la función implícita** asegura:

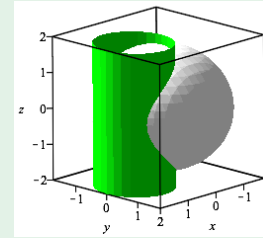
$\mathbf{F} \in C^1$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \mathbf{0}$ ,  $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \neq 0 \Rightarrow$  el sistema, cerca de  $(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ , define  $m$  únicas funciones  $C^1$ :  $u_k = g_k(x_1, \dots, x_n)$ ,  $k = 1 \dots m$ , cuyas derivadas se pueden hallar derivando implícitamente.

**Ej 5.** La curva intersección de las superficies  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  (superficie esférica y cilindro que pasa por el origen) se podría escribir paramétricamente en la forma  $\mathbf{c}(x) = (x, y(x), z(x))$  cuando:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial F_1/\partial y & \partial F_1/\partial z \\ \partial F_2/\partial y & \partial F_2/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 4yz \neq 0. \text{ Por ejemplo, cerca de } (1, 1, 1).$$

Para hallar el  $\mathbf{c}'$  tangente, como siempre, podemos derivar implícitamente:

$$\begin{aligned} 2x + 2yy' - 2 &= 0 & y' &= (1-x)/y \rightarrow \mathbf{c}'(1) = (1, 0, -1). \\ 2x + 2yy' + 2zz' &= 0 & z' &= -1/z \end{aligned}$$



También se puede dar un vector tangente de otro modo.  $\nabla F_1, \nabla F_2$  son ortogonales a cada superficie  $y$ , por tanto,  $\nabla F_1 \times \nabla F_2 = 2(x-1, y, 0) \times 2(x, y, z) = 4(yz, (1-x)z, -y)$  será tangente a la curva.

**Ej 6.** Veamos dónde  $\begin{cases} u+v=x+y \\ xu+yv=2 \end{cases}$  definen  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ .  $\begin{cases} F_1 = u+v-x-y \\ F_2 = xu+yv-2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y-x$ .

Por ejemplo, están bien definidas cerca de  $x=1, y=2, u=4, v=-1$ . Hallemos  $u_x(1, 2)$  y  $v_x(1, 2)$ :

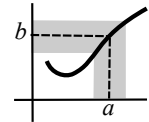
$$\begin{cases} u_x + v_x = 1 \\ u + xv_x + yv_x = 0 \end{cases} \rightarrow u_x = \frac{u+y}{y-x}, u_y = \frac{u+x}{x-y}. \text{ Evaluando en } (1, 2, 4, -1): u_x(1, 2) = 6, v_x(1, 2) = -5.$$

Análogamente se calcularían  $u_y(1, 2) = 1, v_y(1, 2) = 0$ .

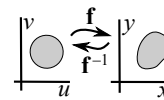
$[(1, 1, 1, 1)]$  también cumple el sistema, pero probablemente  $u$  y  $v$  no estén definidas cerca del punto].

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivable con  $f'(a) \neq 0$  tenía inversa  $f^{-1}$  en un entorno de  $b = f(a)$ .

Un caso particular del último teorema nos da condiciones que aseguran cuando la tiene un campo de  $\mathbf{R}^n$  en  $\mathbf{R}^n$ :  $\mathbf{f}: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $(u_1, \dots, u_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ .



$$\begin{cases} x_1 = f_1(u_1, \dots, u_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases}, \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}). \quad \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \mathbf{Jf} = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial u_1 & \dots & \partial f_1/\partial u_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial u_1 & \dots & \partial f_n/\partial u_n \end{vmatrix} \text{ jacobiano de } \mathbf{f}.$$



**Teorema de la función inversa:**

Sea  $\mathbf{f}: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  de  $C^1$ ,  $\mathbf{a} \in \text{int}D$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$  y  $\mathbf{Jf}(\mathbf{a}) \neq 0$ .  
Entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  es resoluble en forma única como  $\mathbf{u} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{f}^{-1}$  también  $C^1$ , para  $\mathbf{u}$  cerca de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}$  cerca de  $\mathbf{b}$ .

[Que exista la inversa no significa, como ya sucedía en  $\mathbf{R}$ , que su expresión explícita se pueda dar].

[El teorema (y todos los de la sección) sólo da resultados 'locales' (la existencia de funciones implícitas e inversas solo está garantizada en un entorno de los puntos)].

Como primer ejemplo consideramos los cambios de variable **lineales**:

**Ej 7.**  $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$  Podemos despejar  $u$  e  $v$  en función de  $x$  e  $y$ , es decir, existe la función inversa  $\mathbf{f}^{-1}$  cuando:  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ .

[En este caso la inversa es global en todo  $\mathbf{R}^2$  y no sólo en el entorno que asegura el teorema. Cuando el determinante es nulo, la aplicación lineal lleva todo  $\mathbf{R}^2$  a una recta o un punto y no hay inversa].

**Ej 8.**  $\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{vmatrix} = e^{2u} \neq 0 \Rightarrow$  existe  $f^{-1}$  en un entorno de cada punto.

[A pesar de que hay inversa local en cada punto, no hay inversa global, ya que  $f$  no es inyectiva en  $\mathbf{R}^2$ : cada  $(x, y)$  de la imagen (que es  $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ ) proviene de infinitos  $(u, v)$  distintos:  $f(u, v + 2k\pi) = f(u, v)$ ].

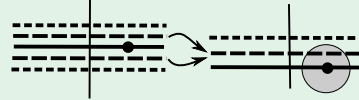
Aunque no se pudiese despejar  $u$  y  $v$  podríamos hallar sus derivadas derivando implícitamente.

$$\begin{aligned} 1 &= e^u \cos v \cdot u_x - e^u \sin v \cdot v_x & 1^{a \times c + 2^{a \times s}} & \xrightarrow{\quad} \cos v = e^u u_x, \quad u_x = e^{-u} \cos v, \text{ y análogas las otras.} \\ 0 &= e^u \sin v \cdot u_x + e^u \cos v \cdot v_x \end{aligned}$$

[Podemos despejar  $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ ,  $v = \arctan \frac{y}{x}$ , y llegamos a lo mismo:  $u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{e^u \cos v}{e^{2u}}$ ].

**Ej 9.**  $\begin{cases} x = u \\ y = v^2 \end{cases} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 2v \Rightarrow$  existe  $f^{-1}$  en un entorno de la imagen de cada  $(u_o, v_o)$ ,  $v_o \neq 0$ .

¿Por qué fallan las cosas en  $v=0$ ?  $f$  lleva cada pareja de rectas  $v = \pm k$  a la misma recta  $y = k^2$ . En ningún entorno de  $f(u_o, 0) = (u_o, 0)$  es inyectiva y no existe la  $f^{-1}$ .



En los otros puntos,  $f^{-1}$  viene dada por  $x = u$  e  $y = \sqrt{v}$  ó  $y = -\sqrt{v}$ , dependiendo del semiplano.

**Ej 10.**  $\begin{cases} x = \frac{u^2}{u^2+v^2} \\ y = \frac{v^2}{u^2+v^2} \end{cases} \cdot \begin{matrix} x_u = \frac{2uv^2}{(u^2+v^2)^2}, x_v = \frac{-2u^2v}{(u^2+v^2)^2}, \\ y_u = \frac{-2uv^2}{(u^2+v^2)^2}, y_v = \frac{2u^2v}{(u^2+v^2)^2} \end{matrix}$  El jacobiano es  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{4u^2v^2}{(u^2+v^2)^4} \begin{vmatrix} v & -u \\ -v & u \end{vmatrix} \equiv 0$ .

Nunca hay inversa local.  $f$  lleva cada recta a un único punto:  $f(u, mu) = (\frac{1}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2})$ .

**Ej 11.** Sea  $\begin{cases} x = 2u + v + e^w \\ y = u + e^{2v} + w \\ z = e^{3u} + v + w \end{cases}$ . Comprobemos que posee una inversa local cerca de  $(u, v, w) = (0, 0, 0)$  y calculemos  $u_z$ ,  $v_z$  y  $w_z$  en el punto imagen  $(1, 1, 1)$ .

El jacobiano es  $J = \begin{vmatrix} 2 & 1 & e^w \\ 1 & 2e^{2v} & 1 \\ 3e^{3u} & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(0,0,0)} = -1$ . El sistema define  $u, v, w$  como funciones de  $(x, y, z)$ .

Derivando las tres ecuaciones respecto a  $z$  y sustituyendo  $u = v = w = 0$ :  $\begin{cases} 0 = 2u_z + v_z + w_z \\ 0 = u_z + 2v_z + w_z \\ 1 = 3u_z + v_z + w_z \end{cases}$

[con las parciales evaluadas en  $(1, 1, 1)$ ]. Resolviendo el sistema:  $u_z(1, 1, 1) = 1, v_z(1, 1, 1) = 1, w_z(1, 1, 1) = -3$ .

## 3.2 Extremos de funciones escalares

En  $\mathbf{R}$ , los puntos interiores  $a$  con  $f'(a) = 0$  eran (junto a puntos sin derivada) candidatos a extremo local (aunque podían no serlo). Y si además  $f''(a)$  era mayor o menor que 0 se concluía, respectivamente, que era mínimo o máximo. También muchas veces, sobre intervalos cerrados, los extremos de una  $f$  se daban en los extremos del intervalo. Generalicemos estas ideas a campos escalares en  $\mathbf{R}^n$  (y en particular, en  $\mathbf{R}^2$  donde trabajaremos casi siempre). Las definiciones de extremos absolutos y relativos son iguales:

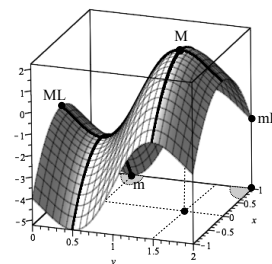
El valor **máximo** (o máximo absoluto) de  $f$  sobre un conjunto  $A$  se toma en un punto  $\mathbf{a}$  si es  $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in A$ . Tiene un **máximo local** (o relativo) en  $\mathbf{a}$  si existe un entorno  $B_r(\mathbf{a})$  tal que  $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap A$ . Análogamente se define **mínimo** (absoluto o local). Máximos y mínimos se llaman **extremos** de  $f$ .

Miremos la gráfica de la derecha de una  $f$  en el rectángulo  $A = [-1, 1] \times [0, 2]$ . [En concreto es  $f(x, y) = (y-1)e^{4y-2y^2} - 3x^2$  que trataremos en un ejemplo].

El máximo absoluto parece estar en  $(0, \frac{3}{2})$  (y ahí también habrá máximo local).

El mínimo se tomará, según el dibujo, en dos puntos de  $\partial A : (\pm 1, \frac{1}{2})$ . Se ven además, por ejemplo, un máximo local en  $(0, 0)$  y un mínimo local en  $(-1, 2)$ .

Se observa que en  $(0, \frac{3}{2})$  las derivadas parciales se anulan. Y lo mismo sucede en  $(0, \frac{1}{2})$ , aunque en ese punto no hay ningún extremo (ni siquiera local).



**Teor 1.** Si  $f$  es diferenciable en  $\mathbf{a} \in \text{int}D$  y  $f$  tiene extremo local en  $\mathbf{a} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

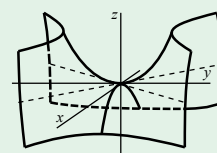
Pues  $f(a_1, \dots, x, \dots, a_n)$  tendrá un extremo en  $x = a_k$  interior  $\Rightarrow f_{x_k}(\mathbf{a}) = 0$ .

A los puntos en los que se anula  $\nabla f$  (todas las parciales) se les llama **puntos críticos** de  $f$ .

Pero aquí es más complicado discutir lo que pasa en los puntos críticos (en  $\mathbf{R}^2$  esto sólo nos dice que el plano tangente es horizontal). Comencemos viendo que **puede ser  $\nabla f = \mathbf{0}$  y no haber ningún extremo**:

**Ej 1.** Para  $h(x, y) = y^2 - x^2$  (silla de montar) es  $\nabla h(0, 0) = (-2x, 2y)|_{(0,0)} = (0, 0)$  pero no tiene extremo local en el origen [  $h(0, 0) = 0$  y cerca hay puntos  $h(x, 0) = -x^2$  de valor negativo y otros  $h(0, y) = y^2$  con valor positivo ].

[Lo mismo le pasa a  $h(x, y) = xy$ , cuya gráfica es la misma, girada en torno al eje  $z$ ].



En el siguiente ejemplo, el punto crítico sí nos proporciona un máximo:

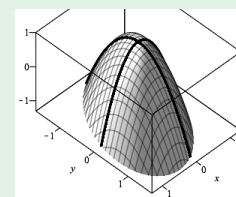
**Ej 2.** Sea  $f(x, y) = 1 - 2x^2 + xy - y^2$ . [Las curvas de nivel de  $f$  son elipses giradas (hay término  $xy$ ) y no son fáciles de pintar].

Los cortes con los ejes son:  $x=0 \rightarrow z = 1 - y^2$ ,  $y=0 \rightarrow z = 1 - 2x^2$ .

Sus puntos críticos se obtienen de:  $\begin{cases} f_x = -4x + y = 0 \\ f_y = x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow x=0, y=0$ .

Pero aún no hemos probado que haya un máximo. Podemos verlo así:

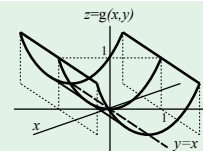
$$f(x, y) = 1 - \frac{7}{4}x^2 - \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 \Rightarrow f(0, 0) = 1 \text{ valor máximo absoluto en todo } \mathbf{R}^2 \text{ (mínimo no hay).}$$



Pueden aparecer infinitos puntos críticos y pueden no ser extremos estrictos (campo dibujado en 1.2):

**Ej 3.**  $g(x, y) = (x-y)^2$ . A la vista de la gráfica (o de la propia función) es claro que posee infinitos mínimos (locales y absolutos): todos los puntos de  $y=x$  (las definiciones de extremo son con  $\leq$ ). Que son detectados por el  $\nabla g$ :

$$g_x = 2(x-y) = 0, g_y = 2(y-x) = 0, \text{ cuando } y=x.$$

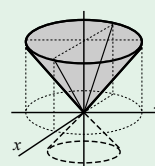


Y, por último, como en  $\mathbf{R}$ , pueden existir extremos locales en puntos sin derivadas parciales:

**Ej 4.** Sea  $k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  (mitad superior de la superficie cónica  $z^2 = x^2 + y^2$ ).

Ya vimos que en  $(0, 0)$  no existen derivadas parciales y, por tanto, que no es diferenciable. [En cualquier otro punto sí lo es  $k$ , pero es  $\nabla k = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \neq \mathbf{0}$ ].

Y claramente  $k$  tiene un mínimo (local y absoluto) en el origen.



¿Cómo distinguir en  $\mathbf{R}^2$  si en un punto crítico  $\mathbf{a}=(a, b)$  de una función  $f(x, y) \in C^2$  se alcanza un máximo, un mínimo o ninguno de los dos? (se dice en el último caso que hay un **punto silla**). Como ocurría en  $\mathbf{R}$ , de ello nos informarán las derivadas de segundo orden.

Empecemos desarrollando  $f$  por **Taylor**. Como en el punto  $\mathbf{a}$  se anulan las derivadas primeras, el desarrollo se reduce a:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{2} [f_{xx}(a, b) h^2 + 2f_{xy}(a, b) hk + f_{yy}(a, b) k^2] + o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

Así, la forma de la gráfica cerca de un punto crítico  $\mathbf{a}$  dependerá de los términos de orden 2.

Pasamos pues a estudiar cómo será la gráfica de los campos cuadráticos  $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  con  $A, B, C$  constantes no las tres nulas.

Suponemos  $A \neq 0$  y escribimos  $AQ(x, y) = A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2 = (Ax + By)^2 + (AC - B^2)y^2$ .

Entonces, si  $AC < B^2$  tiene  $Q$  en  $(0, 0)$  un punto silla (en  $x = -\frac{By}{A}$  es  $< 0$ , y en  $y = 0$ ,  $> 0$ ).

Si  $AC > B^2$ ,  $AQ$  tiene un mínimo.  $Q$  también lo tiene si  $A > 0$ , y si  $A < 0$  tiene un máximo.

[Si  $AC = B^2$  (cuadrados perfectos), o si  $A = 0$  o  $C = 0$  aparecen casos más fáciles de analizar].

Con lo anterior (y probando que los términos de mayor orden no cambian esencialmente la gráfica cerca del punto) se llega a este resultado, en el que aparece el llamado determinante **hessiano**  $Hf(\mathbf{a})$ :

<b>Teor 2.</b>	$\text{Sea } Hf = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$
	$Hf > 0, f_{xx} > 0 \Rightarrow f \text{ tiene mínimo local en } \mathbf{a}.$
	$\text{Si en } \mathbf{a} \text{ es } f_x = f_y = 0 \text{ y además es } Hf > 0, f_{xx} < 0 \Rightarrow f \text{ tiene máximo local en } \mathbf{a}.$
	$Hf < 0 \Rightarrow f \text{ tiene un punto silla en } \mathbf{a}.$

[Cuando  $Hf = 0$ , el teorema no dice nada y puede pasar de todo en un entorno del punto. Recordemos que eso mismo pasaba en  $\mathbf{R}$  si era  $f''(a) = 0$ , y bastantes veces, como allí, la simple inspección de la función puede permitirnos decidir el tipo de punto que es].

**Ej 5.** Veamos qué dice este teorema sobre los ejemplos 1, 2 y 3. Respectivamente, los hessianos son:

$Hh(\mathbf{0}) = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 \Rightarrow$  es un punto silla, como habíamos visto.

$Hf(\mathbf{0}) = (-4) \cdot (-2) - 1^2 = 7, f_{xx} < 0 \Rightarrow$  máximo.

$Hg(x, x) = (-2) \cdot (-2) - (-2)^2 = 0$ , y el teorema no dice nada sobre estos mínimos no estrictos.

[En un  $\mathbf{a}$  con  $Hf = 0$  puede haber extremos estrictos. Por ejemplo,  $f(x, y) = x^4 + y^4$  tiene un claro mínimo].

**Ej 6.** Clasifiquemos los puntos críticos de  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 4y + 6$ .  $\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ f_y = 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases}$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2, Hf = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x$ . En  $(1, 2)$  es  $> 0$  (y también  $f_{xx}$ ), y en  $(-1, 2)$  es  $< 0$ .

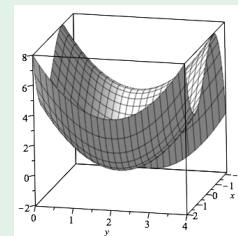
Por tanto, hay un mínimo en  $(1, 2)$  [con  $f(1, 2) = 0$ ] y un punto de silla en  $(-1, 2)$  [ $f(-1, 2) = 4$ ].

A lo mismo se llegaría desarrollando por Taylor en torno a ambos puntos:

$f(x, y) = 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + \dots, f(x, y) = 4 - 3(x+1)^2 + (y-2)^2 + \dots$

[El mínimo local 0 no es absoluto, pues  $f$  toma valores negativos: por ejemplo,  $f(x, 0) = x^3 - 3x + 6$ , y en particular  $f(-3, 0) = -12$ ].

[Una vez más dibujamos la función con Maple para comprobar, aunque no hubiera sido difícil dibujar algunos cortes y curvas de nivel].



**Ej 7.** Clasifiquemos ahora los de  $f(x, y) = y(y-x) e^{x+y}$ .

$\begin{cases} f_x = y(y-x-1) e^{x+y} = 0 \rightarrow y=0, y=x+1 \\ f_y = (2y-x+y(y-x)) e^{x+y} = 0 \rightarrow x=0, 2x+1=0 \end{cases} \rightarrow (0, 0) \text{ o } (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \text{ puntos críticos.}$

$f_{xx} = y(y-x-2) e^{x+y}, f_{xy} = [y(y-x)+y-x-1] e^{x+y}, f_{yy} = [y(y-x)+4y-2x+2] e^{x+y} \rightarrow$

$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ , silla.  $H(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-4} \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/2 \end{vmatrix} > 0$  y  $\frac{1}{2}e^{-2} > 0$ , mínimo.



**Ej 8.** Más difícil es clasificar el único punto de  $f(x, y) = y^3 - (x-y)^2$ .

$$\begin{cases} f_x = 2(y-x) = 0, & y = x \\ f_y = 3y^2 + 2(x-y) = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 0). \text{ Pero el Hessiano } \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ con lo que el Teor 2. no decide.}$$

Pero es inmediato observar que si  $y = x$  es  $f(x, x) = x^3$ , para deducir que se trata de un punto silla [pues en cualquier entorno del origen toma valores mayores y menores que  $f(0, 0) = 0$ ].

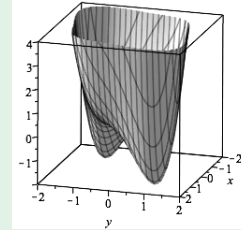
**Ej 9.** Estudiemos ahora  $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 \rightarrow \begin{cases} f_x = 4x^3 - 2(x+y) = 0 \\ f_y = 4y^3 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \rightarrow$

$$4x^3 = 4y^3, \quad y = x, \quad 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow (0, 0), (1, 1), (-1, -1) \text{ puntos críticos.}$$

$$f_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f_{yy} = 12y^2 - 2, \quad f_{xy} = -2.$$

En  $(\pm 1, \pm 1)$  es  $f_{xx} = 10 > 0$ ,  $Hf = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} > 0$  y son mínimos locales.

En  $(0, 0)$  es  $Hf = 0$  y debemos verlo directamente. Observando que son  $f(x, x) = 2x^4 - 4x^2$ ,  $f(x, -x) = 2x^4$  deducimos que se trata de un punto silla.



**Ej 10.** Encontramos en este ejemplo los  $b$  para los que  $f(x, y) = x^2 - bxy + y^2 - 4x - 2y$  tiene un mínimo local en un punto de la recta  $y = 1$ .

$$\text{Debe ser } \begin{cases} f_x = 2x - by - 4 = 0 \\ f_y = 2y - bx - 2 = 0, \quad y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 & b = -4 \\ b = 0 & \text{ó } x = 0 \end{cases} \rightarrow (2, 1), (0, 1) \text{ puntos críticos para esos } b.$$

Como  $Hf = \begin{vmatrix} 2 & -b \\ -b & 2 \end{vmatrix} = 4 - b^2$ , es  $(2, 1)$  un mínimo, si  $b = 0$  [y  $(0, 1)$  es punto silla si  $b = -4$ ].

Para los extremos de una superficie definida implícitamente, utilizaremos técnicas de la sección anterior 3.1:

**Ej 11.** Estudiemos si  $F(x, y, z) \equiv 4x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz - z = 2$  define funciones implícitas  $z = z(x, y)$  y precisemos los extremos de estas funciones.

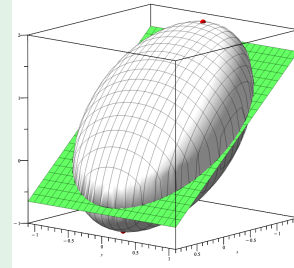
$$F_z = 4z + 4x - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{salvo en el plano } z = \frac{1}{4} - x \text{ define función } C^\infty.$$

$$\text{Derivando: } 8x + 4z + 4xz_x + 4xz_x - z_x = 0 \rightarrow z_x = \frac{8x + 4z}{1 - 4z - 4x}, \quad z_y = \frac{4y}{1 - 4z - 4x}.$$

$$x = -\frac{z}{2}, \quad y = 0 \rightarrow z^2 - z = 2. \quad (-1, 0, 2) \text{ y } (\frac{1}{2}, 0, -1) \text{ puntos críticos.}$$

$$\text{Y usando que } z_x = z_y = 0: \quad z_{xx} = \frac{8}{1 - 4z - 4x} = \frac{8}{1 - 2z}, \quad z_{yy} = \frac{4}{1 - 2z}, \quad z_{xy} = 0.$$

Las matrices Hessianas son:  $\begin{pmatrix} -8/3 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{pmatrix}$  máximo, y  $\begin{pmatrix} 8/3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}$  mínimo.



Citemos ahora brevemente un resultado para  $\mathbf{R}^3$  para ilustrar lo que sucede en  $\mathbf{R}^n$ . Debemos determinar (y eso será estudiado en álgebra) cuándo la 'forma cuadrática'  $Q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$  (o lo análogo en  $\mathbf{R}^n$ ) es estrictamente positiva o negativa. Para una  $f(x, y, z)$  se llega a este resultado (que con libros de álgebra se podría refinar más):

$$\text{Sean } H_1 = f_{xx}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{vmatrix} \quad \left[ \text{'menores principales' de } \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix} \right].$$

**Teor 3.** Supongamos que en el punto  $\mathbf{a}$  es  $\nabla f = 0$  y que ningún  $H_k = 0$ . Entonces:

Si  $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$ ,  $f$  tiene un mínimo en  $\mathbf{a}$ .

Si  $H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0$ ,  $f$  tiene un máximo en  $\mathbf{a}$ .

Y  $f$  no tiene ni máximo ni mínimo en todos los demás casos.

[Basta pensar en los más claros mínimo o máximo  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  y  $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2$  para hacer verosímiles las condiciones sobre los menores  $H_k$ ].

**Ej 12.** Estudiemos el campo escalar  $f(x, y, z) = \sin^2 x + y^2 + z^2 - y \sin x + z \sin x - yz$  cerca de  $(0, 0, 0)$ .

$$f_x = \cos x (2 \sin x - y + z) = 0$$

$$f_y = 2y - \sin x - z = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \text{ es punto crítico. [Hay más, por ejemplo } (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \text{].}$$

$$f_z = 2z + \sin x - y = 0 \quad f_{xx} = 2 \cos 2x + (y-z) \sin x, \quad f_{yy} = f_{zz} = 2, \quad -f_{xy} = f_{xz} = \cos x, \quad f_{yz} = -1.$$

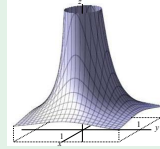
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow H_1 = 2, \quad H_2 = 3, \quad H_3 = 4. \text{ Hay un mínimo en el origen. [En el otro, silla].}$$

$$\begin{aligned} & \text{[O con Taylor en 3 variables: } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz - yz + o(x^2 + y^2 + z^2) \\ & \approx \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (x+z)^2 + (y-z)^2], \text{ claro mínimo].} \end{aligned}$$

Pasemos a ocuparnos del cálculo de **extremos absolutos sobre un conjunto**  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Sabemos que su existencia está garantizada cuando  $f$  es continua en  $A$  **compacto** (en otro caso no).

**Ej 13.**  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ ,  $f(0, 0) = 7$  (discontinua), no tiene máximo en  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

En todo  $\mathbf{R}^2$  no tiene ni máximo ni mínimo. En  $[1, 2] \times [0, 1]$  (en ese compacto sí es continua) los alcanza seguro [claramente el máximo 1 se da en  $(1, 0)$ , punto más próximo al origen, y el mínimo  $\frac{1}{5}$  en  $(2, 1)$ , punto más lejano].



La estrategia para hallar extremos sobre compactos  $A$  es similar a la que se utilizaba en  $\mathbf{R}$ :

- Encontrar en  $\text{int } A$  los puntos críticos y los puntos en que no existan las parciales.
- Localizar los extremos de la función sobre  $\partial A$  (quizás con ‘multiplicadores de Lagrange’).
- Comparar los valores en todos estos puntos.

**Ej 14.** Encontramos los extremos de  $f(x, y) = (y-1)e^{4y-2y^2} - 3x^2$  en  $[-1, 1] \times [0, 2]$  (primer dibujo de esta sección)

$$f_x = -6x = 0 \rightarrow x = 0.$$

$$f_y = (-4y^2 + 8y - 3)e^{4y-2y^2} = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$$

En esos puntos:  $f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{3/2}$ ,  $f(0, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}e^{3/2}$ .

Además  $f(x, 0) = -1 - 3x^2$  tiene por valor máximo  $f(0, 0) = -1$  y el mínimo es  $f(\pm 1, 0) = -4$ .

$f(x, 2) = 1 - 3x^2$  tiene por valor máximo  $f(0, 2) = 1$  y el mínimo es  $f(\pm 1, 2) = -2$ .

$f(\pm 1, y) = (y-1)e^{4y-2y^2} - 3$  toman valores entre  $-\frac{1}{2}e^{3/2} - 3$  y  $\frac{1}{2}e^{3/2} - 3$ .

Comparando todos estos valores se deduce que el máximo es  $\frac{1}{2}e^{3/2}$  y el mínimo  $-\frac{1}{2}e^{3/2} - 3$ .

[En todo  $\mathbf{R}^2$  no alcanza su mínimo, pues, por ejemplo,  $f(x, 0) \rightarrow -\infty$ , pero  $\frac{1}{2}e^{3/2}$  sí es máximo global].

**Ej 1b.** Hallemos los extremos de  $h(x, y) = y^2 - x^2$  en el conjunto  $A$  acotado por la elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$ .

Ya vimos que esta silla de montar no tenía extremos en el interior y así el máximo y mínimo han de tomarse en la  $\partial A$  de este compacto.

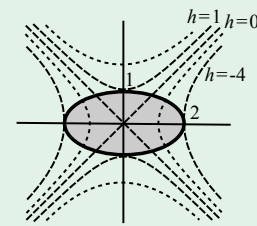
Nuestra elipse se puede describir como:  $(2 \cos t, \text{sen } t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Sobre ella, la  $h$  vale  $h|_{\partial A} = 4 \text{sen}^2 t - \cos^2 t \equiv g(t)$ ,  $g'(t) = 5 \text{sen } 2t$ .

Los máximos de  $g$  se dan si  $t = 0, \pi$  y los mínimos para  $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .

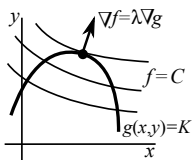
O sea,  $h(0, \pm 1) = 1$  y  $h(\pm 2, 0) = -4$  son los extremos de  $h$  en  $A$ .

[A la vista de las curvas de nivel de  $h$  y la elipse, la conclusión obtenida resulta evidente].



Una técnica alternativa para buscar extremos de  $f$  sobre curvas suaves o, más en general, de hallar ‘**extremos condicionados**’ (de funciones sometidas a condiciones  $g = K$ ) es mediante el cálculo de los llamados ‘**multiplicadores de Lagrange**’:

**Teor 4.** Sean  $f, g : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  de  $C^1$ ,  $S$  el ‘conjunto de nivel’  $g(\mathbf{x}) = K$ ,  $\mathbf{a} \in S$  e interior a  $D$  y  $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ . Si  $f|_S$  ( $f$  restringida a  $S$ ) tiene un máximo o un mínimo en  $\mathbf{a}$  entonces existe un número real  $\lambda$  tal que  $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$ .



El teorema proporciona  $n+1$  condiciones para determinar  $\lambda$  y las  $n$  coordenadas de  $\mathbf{a}$ : las  $n$  de los gradientes y además  $g(\mathbf{a}) = K$ . No lo demostramos pero damos una justificación geométrica en  $\mathbf{R}^2$ : si buscamos el mayor  $C$  para el que es  $g = K$ , será aquel en que las curvas de nivel  $f = C$  y la curva sean tangentes, es decir, para el que ambos gradientes sean múltiplos uno de otro.

**Ej 1c.** Hallemos con el teorema los extremos de  $h|_S$ , si  $h(x, y) = y^2 - x^2$  y  $S$  es la elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$ .

$$\nabla h = \lambda \nabla g \Leftrightarrow (-2x, 2y) = \lambda(2x, 8y) \text{ y además } g = 4 \rightarrow \begin{cases} 2x(\lambda+1) = 0 & \rightarrow x = 0 \text{ ó } \lambda = -1 \\ 2y(4\lambda-1) = 0 & \quad \downarrow \quad y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 & \quad y = \pm 1 \quad x = \pm 2 \end{cases}$$

[En los puntos dados por el sistema (los mismos de 1b) son tangentes  $S$  y las curvas de nivel].

Cambiamos ahora la restricción por esta recta  $R: y = 3x - 4$ . Busquemos los extremos de  $h|_R$ .

[Como ahora el conjunto  $R$  no es compacto podrían no existir ni máximos ni mínimos].

$y - 3x = -4$ ,  $(-2x, 2y) = \lambda(-3, 1) \rightarrow \lambda = \frac{2x}{3} = 2y$ ,  $x = 3y$ ,  $-8y = -4$ . Punto  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  con  $h = -2$ .

Mirando la recta y las curvas de nivel, queda claro que en ese punto hay un mínimo.

Directamente:  $h(x, 3x-4) = 8(x^2 - 3x + 2)$  tiene mínimo si  $x = \frac{3}{2}$  (de valor  $-2$ ) y no tiene máximo.

Dos cálculos de extremos sobre círculos:

**Ej 15.** Encontramos los valores extremos de  $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x$  sobre el círculo  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

$$\begin{aligned} g_x = 2(x-2) = 0 &\rightarrow (2, 0). \text{ Como } Hg = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0, \text{ el punto es un mínimo.} \\ g_y = 4y = 0 & \end{aligned}$$

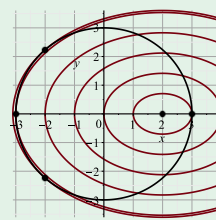
[Poniendo  $g = (x-2)^2 + 2y^2 - 4$  queda claro (y que es absoluto)].

Ambos extremos han de existir, por ser  $g$  continua en un conjunto compacto.

Sobre el borde del círculo:  $\begin{aligned} x-2 = \lambda x & \quad x = -2, y = \pm\sqrt{5} \\ 2y = \lambda y & \rightarrow \lambda = 2 \uparrow, y = 0 \downarrow \\ x^2 + y^2 = 9 & \quad x = \pm 3 \end{aligned}$  . 5 candidatos:

$$g(-2, \pm\sqrt{5}) = \boxed{22} \text{ máximos, } g(-3, 0) = 21, g(3, 0) = -3, g(2, 0) = \boxed{-4} \text{ mínimo.}$$

[Las curvas de nivel de  $g$  son elipses, que, como deben, son tangentes en los puntos hallados a la circunferencia].



**Ej 16.** Hallemos los valores máximo y mínimo de  $f(x, y) = 3y^2 - x^3$  sobre el círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

Los extremos han de existir por ser  $f$  continua en el conjunto compacto (el círculo).

Localizamos los puntos críticos en el interior (claramente no hay 'picos', pues  $f \in C^\infty$ ):

$$\begin{cases} f_x = -3x^2 = 0 \\ f_y = 6y = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 0). \quad H = \begin{vmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36x. \quad H(0, 0) = 0 \text{ y el Hessiano no decide.}$$

[Aunque no se necesita (basta comparar  $f(0, 0) = 0$  con el resto), como  $f(x, 0) = -x^3$  es una silla].

Para calcular los extremos el borde  $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$  podemos usar multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -3x^2 = 2\lambda x & x = -2, 0 \rightarrow y = \pm 2 \\ 6y = 2\lambda y & \rightarrow y = 0, \lambda = \pm 3 \\ x^2 + y^2 = 4 & x = \pm 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} f(0, \pm 2) &= \boxed{12} \text{ valor máximo.} \\ f(2, 0) &= \boxed{-8} \text{ valor mínimo.} \end{aligned} \quad f(-2, 0) = 8.$$

O se podría parametrizar la circunferencia  $(2 \cos t, 2 \sin t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi] \rightarrow f|_C = 12 \sin^2 t - 8 \cos^3 t \equiv s(t)$   
 $\rightarrow s'(t) = 24 \sin t \cos t (1 + \cos t) = 0 \rightarrow t = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$ , que nos vuelve a dar los puntos de arriba.

O, incluso, es sencillo aquí  $y^2 = 4 - x^2 \rightarrow f|_C = 12 - 3x^2 - x^3$ , hallar sus extremos en  $[-2, 2]$  y deducir los  $y$ .

Los multiplicadores de Lagrange permiten resolver problemas abordables por otros caminos. Algunas veces acortan los cálculos y otros los alargan (por ejemplo, si la restricción es de expresión sencilla):

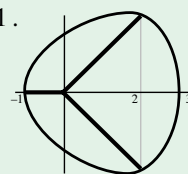
**Ej 17.** Hallar los puntos de la curva  $3y^2 = 21 + 20x - x^4$  situados a mayor y menor distancia del origen.

[Existen por estar  $x$  e  $y$  acotadas].  $f(x, y) = x^2 + y^2$  con  $g(x, y) = x^4 - 20x + 3y^2 = 21$ .

$$(2x, 2y) = \lambda(4x^3 - 20, 6y) \text{ y } g = 21 \rightarrow \begin{cases} 4\lambda x^3 - 2x - 20\lambda = 0 & x = 2 \\ 2y(3\lambda - 1) = 0 & \rightarrow y = 0 \downarrow \text{ ó } \lambda = \frac{1}{3} \uparrow \downarrow \\ 3y^2 = 21 + 20x - x^4 & x = -1, 3 \quad y = \pm\sqrt{15} \end{cases}$$

$$f(-1, 0) = 1 \text{ (mínimo), } f(3, 0) = 9, f(2, \pm\sqrt{15}) = 19 \text{ (máximos).}$$

[En ninguno de los ejemplos vistos se anulaba  $\nabla g$  sobre la curva  $S$ . Si fuera  $\nabla g(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  para algún  $\mathbf{a} \in S$ , a la vista del teorema, habría que incluir este  $\mathbf{a}$  entre los candidatos].



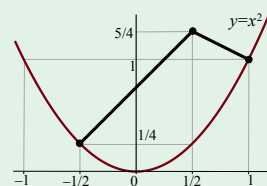
**Ej 18.** Hallemos el punto de la parábola  $y = x^2$  más cercano al punto  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ .

Para ello minimizamos  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{4})^2$  con la restricción  $y - x^2 = 0$ .

$$(2x - 1, 2y - \frac{5}{2}) = \lambda(-2x, 1) \text{ e } y = x^2 \rightarrow \begin{cases} 2x\lambda + 2x = 1 & \rightarrow 4x^3 - 3x - 1 = 0 \\ \lambda = 2x^2 - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow x = 1, -\frac{1}{2} \text{ (doble). El punto } (1, 1) \text{ está más cerca (a distancia } \frac{\sqrt{5}}{4} \text{).}$$

[Con técnicas de una variable: basta hallar el mínimo de  $(x - \frac{1}{2})^2 + (x^2 - \frac{5}{4})^2$ , que lleva a la misma ecuación en  $x$ , dándonos además la derivada información sobre crecimiento y decrecimiento que no da Lagrange].



**Ej 19.** Sea  $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$ . a) Clasifiquemos los puntos críticos de  $f$ . ¿Posee extremos absolutos?

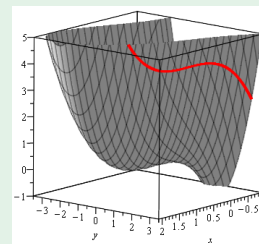
b) Hallemos sus extremos locales sobre  $x + y = 2$  sin utilizar y utilizando multiplicadores de Lagrange.

a)  $\begin{aligned} f_x = 3x^2 + 2y = 0 \\ f_y = 2x + 2y = 0, y = -x \end{aligned} \rightarrow (0, 0) \text{ silla, } (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \text{ mínimo, pues } H = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

Como  $f(x, 0) = x^3 \rightarrow \pm\infty$  como  $x \rightarrow \pm\infty$ , no hay extremos absolutos.

b)  $f(x, 2-x) = x^3 - x^2 + 4 \xrightarrow{d/dx} x(3x-2) \rightarrow (0, 2) \text{ máximo (con valor 4).}$   
 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \text{ mínimo (valor } \frac{104}{27} \text{).}$

Lagrange:  $\begin{aligned} 3x^2 + 2y = \lambda \\ 2x + 2y = \lambda \\ x + y = 2 \end{aligned} \rightarrow 3x^2 = 2x, x = 0, 2/3 \searrow (0, 2) \text{ y } (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}).$



En los siguientes ejemplos se trabaja con funciones de tres variables.

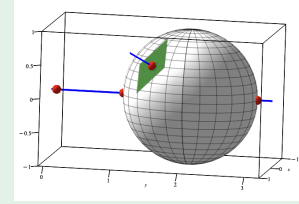
**Ej 20.** Sea el elipsoide dado por  $2x^2+(y-2)^2+z^2=1$ . a) Escribir su plano tangente en el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ .  
b) Calcular utilizando multiplicadores de Lagrange sus puntos más y menos cercanos al origen.

a) Si  $F \equiv 2x^2+(y-2)^2+z^2$  es  $\nabla F = (4x, 2(y-2), 2z) \xrightarrow{(1/2, 3/2, 1/2)} (2, -1, 1)$ .

El plano tangente:  $(2, -1, 1) \cdot (x - \frac{1}{2}, y - \frac{3}{2}, z - \frac{1}{2}) = 0 \rightarrow \boxed{z = y - 2x}$ .

b) Minimizamos  $D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  con la condición  $F = 1$ .

$$\begin{cases} 2x = 4\lambda x, & x(1-2\lambda) = 0 \rightarrow x=0 \text{ o } \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow y = -2, z = 0 \text{ (imposible la 4)} \\ 2y = 2\lambda(y-2), & y(1-\lambda) + 2\lambda = 0 \leftarrow \\ 2x = 2\lambda z, & z(1-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 1 \text{ (imposible) o } z = 0 \quad (0, 1, 0) \text{ próximo } (d=1), \\ 2x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1 & \xrightarrow{x=z=0} y = 1, 3 \quad (0, 3, 0) \text{ lejano } (d=3). \end{cases}$$



[Esfera comprimida en el sentido del eje  $x$  y centrada en  $(0, 2, 0)$ ].

Hay otra forma de obtener el conjunto de ecuaciones  $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$  y  $g(\mathbf{x}) = K$ : pensando en la función  $L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda [g(\mathbf{x}) - K]$ , con  $\lambda$  como una variable más, y haciendo  $\nabla L = \mathbf{0}$ , pues de esto salen las mismas ecuaciones. Operamos así en los siguientes ejemplos en  $\mathbf{R}^3$ :

**Ej 21.** Hallemos los máximos y mínimos de  $f(x, y, z) = x + y^2 + z$  sobre la superficie  $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ .

Los extremos existirán por ser  $f$  continua y ser la superficie (un elipsoide) un conjunto compacto.

Consideremos  $L = f - \lambda g = x + y^2 + z - \lambda(2x^2 + y^2 + 2z^2 - 1)$  y hagamos  $\nabla L = \mathbf{0}$ :

$$\begin{cases} L_x = 1 - 4\lambda x = 0, & x = \frac{1}{4\lambda} \\ L_y = 2y - 2\lambda y = 0, & y = 0 \text{ ó } \lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow \frac{1}{8\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 1, \lambda = \pm \frac{1}{2} \rightarrow (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}). \\ \lambda = 1 \rightarrow x = z = \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + y^2 = 1 \rightarrow (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}). \end{cases} \\ L_z = 1 - 4\lambda z = 0, & z = \frac{1}{4\lambda} \\ L_\lambda = 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0 & f(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = 1, f(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = -1, f(\frac{1}{4}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Por tanto, el valor mínimo absoluto es  $-1$ , y el valor máximo es  $\frac{5}{4}$  (que se alcanza en dos puntos).

[En  $\mathbf{R}^3$  los multiplicadores abrevian más. Deberíamos parametrizar el elipsoide para trabajar directamente].

**Ej 22.** Una caja rectangular sin tapa tiene una superficie igual a 12. Encontramos las dimensiones que hacen máximo su volumen.

Si las aristas son  $x, y, z > 0$  el volumen es  $V = xyz$ . Y se debe cumplir además:  $xy + 2xz + 2yz = 12$ .

$$\text{Sea } L(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 12) \rightarrow \begin{cases} L_x = yz + \lambda(y + 2z) = 0 \\ L_y = xz + \lambda(x + 2z) = 0 \\ L_z = xy + 2\lambda(x + y) = 0 \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sistema invariante} \\ \text{cambiando } x \text{ por } y \\ \Rightarrow y = x. \end{array}$$

$$\begin{cases} xz + \lambda(x + 2z) = 0 & xz - \frac{x}{4}(x + 2z), 2xz = x^2 \\ x^2 + 4\lambda x = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{x}{4} \quad (x > 0) \uparrow & \\ x^2 + 4xz = 12 & \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{El mínimo será } V = 4. \\ 3x^2 = 12, x = 2 = y, z = \frac{x}{2} = 1. \end{array}$$

Se pueden resolver problemas con varias restricciones, incluyendo más de un multiplicador de Lagrange. Si, por ejemplo, queremos hallar los extremos de una  $f(x, y, z)$  sujeta a dos condiciones  $g(x, y, z) = 0$  y  $h(x, y, z) = 0$  basta considerar  $L = f - \lambda g - \mu h$ , imponer  $\nabla L = \mathbf{0}$  y resolver las 5 ecuaciones resultantes.

[Cada una de las condiciones define una superficie y, en general, tendrán una curva de intersección  $S$ . En el punto en que haya un extremo la superficie de nivel  $f = C$  y la curva  $S$  serán tangentes. Como  $\nabla g$  y  $\nabla h$  determinan el plano normal a la curva en el punto y  $\nabla f$  está en ese plano, deben existir escalares  $\lambda$  y  $\mu$  (los multiplicadores de Lagrange) tales que  $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$ ].

**Ej 23.** Hallar el punto más cercano al origen de la recta intersección de los planos  $x + y + z = 3$  y  $x + 2y + 3z = 18$ .

Minimizamos  $x^2 + y^2 + z^2$  con 2 condiciones:  $L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 3) - \mu(x + 2y + 3z - 18)$ .

$L_x = 2x - \lambda - \mu = 0$ ,  $L_y = 2y - \lambda - 2\mu = 0$ ,  $L_z = 2z - \lambda - 3\mu = 0$ ,  $L_\lambda = 0$ ,  $L_\mu = 0$  dan los planos.

$$2x - \lambda - \mu = 0 \text{ y } 3x - 2\lambda - 2\mu = 0 \rightarrow 2x - 2y = \mu = 2y - 2z, z = 2y - x \rightarrow \begin{cases} 3y = 3 \\ 8y - 2x = 18 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = -5, y = 1, z = 7}.$$

Más largo sin usar multiplicadores. Por ejemplo, parametrizando la recta. El vector dirección lo da  $(1, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -2, 1)$  y un punto, por ejemplo, es  $(-9, 9, 3)$  [ $z = 3 \rightarrow x + y = 0, x + 2y = 9$ ].

Sobre la recta:  $d(t) \equiv (t-9)^2 + (9-2t)^2 + (t+3)^2$ ,  $d' = 12t - 48$ , mínimo si  $t = 4 \rightarrow (-5, 1, 7)$ .

# 4. Integrales múltiples

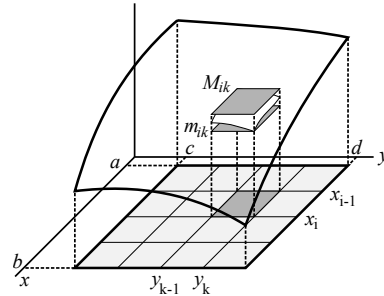
## 4.1 Integrales dobles

[Las demostraciones son similares a las de  $\mathbf{R}$  y hacemos pocas].

Generalizamos la definición de la integral en una variable. Sea  $f(x, y)$  **acotada** en un **rectángulo**  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ . Dividimos  $R$  en  $n \times n$  subrectángulos iguales  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , de área  $\Delta x \Delta y = \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n}$ . Llamamos  $M_{ik}$  y  $m_{ik}$ , respectivamente, al supremo e ínfimo de  $f$  en cada  $R_{ij}$  y construimos las **sumas superior**  $U_n$  e **inferior**  $L_n$ :

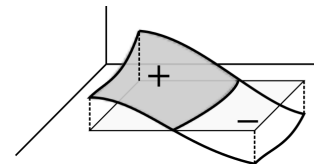
$$U_n = \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \Delta x \Delta y, \quad L_n = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \Delta x \Delta y$$

(sumas de volúmenes de prismas, una mayor y otra menor que el volumen que encierra  $f(x, y)$  si  $f \geq 0$ ).



Si ambas sucesiones  $\{L_n\}$  y  $\{U_n\}$  tienen un mismo límite, se dice que  $f$  es **integrable** en  $R$ , se representa el límite común por  $\iint_R f$  ó  $\iint_R f(x, y) dx dy$  y se le llama **integral** de  $f$  en  $R$ .

$\iint_R f$  representará (similar a lo que sucedía en  $\mathbf{R}$ ) la suma de los volúmenes encerrados entre la gráfica de  $f$  y el plano  $z=0$  en  $R$ , con signos + o - adecuados. Y al igual que allí:



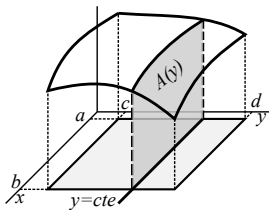
**Teor 1.**  $f$  continua en  $R \Rightarrow f$  integrable en  $R$ .

También aquí las funciones 'poco' discontinuas siguen siendo integrables:

**Teor 2.** Si el conjunto de puntos de  $R$  en que una  $f$  acotada es discontinua es como máximo un número finito de puntos y un número finito de gráficas de funciones continuas, entonces  $f$  es integrable en  $R$ .

Para calcular integrales dobles no necesitaremos la definición, el problema se reduce a calcular dos integraciones sucesivas de funciones de una variable:

**Teorema de Fubini:**  $f$  continua en  $R \Rightarrow \iint_R f = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ .



Para cada  $y$  constante  $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  representa el área de la sección del sólido determinado por la gráfica de  $f$ ; integrando esta  $A(y)$  entre  $c$  y  $d$  obtenemos el volumen dado por  $\iint_R f = \int_c^d A(y) dy$ . La segunda igualdad es lo simétrico.

[Hay funciones raras (discontinuas, claro) para las que el teorema falla].

**Ej 1.** Sean  $R = [0, \pi] \times [0, 1]$  y  $f(x, y) = 2x - y \sin x$ . Calcular la integral es fácil:

$$\iint_R f = \int_0^\pi \left[ \int_0^1 (2x - y \sin x) dy \right] dx = \int_0^\pi \left[ 2xy - \frac{y^2 \sin x}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^\pi \left( 2x - \frac{\sin x}{2} \right) dx = \left[ x^2 + \frac{\cos x}{2} \right]_0^\pi = \pi^2 - 1.$$

O también podríamos hacer (los corchetes entre las integrales no se suelen escribir):

$$\iint_R f = \int_0^1 \int_0^\pi (2x - y \sin x) dx dy = \int_0^1 \left[ x^2 + y \cos x \right]_0^\pi dy = \int_0^1 (\pi^2 - 2y) dy = \pi^2 - \left[ y^2 \right]_0^1 = \pi^2 - 1.$$

[No olvidemos que **la integral de una constante es la constante por la longitud del intervalo**].

**Ej 2.**  $\int_c^d \int_a^b f(x)g(y) dx dy = \int_c^d g(y) \left[ \int_a^b f(x) dx \right] dy = \left[ \int_a^b f(x) dx \right] \left[ \int_c^d g(y) dy \right]$ . [Estos atajos se hacen a menudo].

Generalicemos el recinto de integración. Sea ahora  $D$  **región acotada del plano**. Definamos sobre un rectángulo  $R$  que contenga a  $D$  la función  $f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \end{cases}$ .

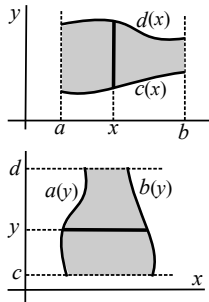
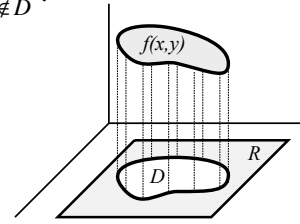
Se define entonces  $\iint_D f = \iint_R f^*$  si  $f^*$  es integrable.

Describe, si  $f \geq 0$ , el **volumen** limitado por la gráfica de  $f$  en  $D$ .

[Y en el caso particular en que  $f = 1$ , representará el **área** de  $D$ ].

Si la frontera de  $D$  se puede poner como unión finita de gráficas de funciones continuas y  $f$  es continua ya sabemos que  $\iint_D f$  existirá.

Consideremos **dos tipos sencillos** de regiones  $D$  de integración (otras más complicadas se podrán descomponer en varias de esa forma). A la vista del significado de  $\iint_R f^*$  está claro que:



**Teor 3.**

i) Si  $f$  continua en  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ , con  $c(x) \leq d(x)$  continuas en  $[a, b] \Rightarrow \iint_D f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$ .

ii) Si  $f$  continua en  $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$ , con  $a(y) \leq b(y)$  continuas en  $[c, d] \Rightarrow \iint_D f = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy$ .

[Cuando  $x$  varía entre  $a$  y  $b$ , la  $y$  varía entre  $c(x)$  y  $d(x)$ , e igual la otra].

**Ej 3.** Integremos  $f(x, y) = x \cos(x+y)$  sobre el  $D$  del dibujo:

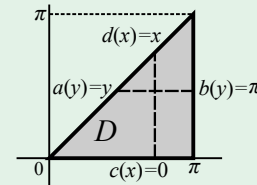
$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_0^\pi \int_0^x x \cos(x+y) dy dx = \int_0^\pi x [\sin 2x - \sin x] dx \\ &= [x(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x)]_0^\pi + \int_0^\pi [\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x] dx = -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

O, con cálculos algo más largos, integrando primero respecto a  $x$ :

$$\iint_D f = \int_0^\pi \int_y^\pi x \cos(x+y) dx dy \stackrel{\text{partes}}{=} \int_0^\pi [-\pi \sin y - \cos y - y \sin 2y - \cos 2y] dy = -\frac{3\pi}{2}.$$

A veces, no sólo es preferible integrar primero respecto de una de las variables y luego respecto de la otra, sino que no tenemos otra opción. Por ejemplo, si fuese  $f(x, y) = \sin x^2$ , no se podría hallar  $\int_0^\pi [\int_y^\pi \sin x^2 dx] dy$ , por ser la primitiva no calculable, pero sí se puede hacer:

$$\int_0^\pi [\int_0^x \sin x^2 dy] dx = \int_0^\pi x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} (1 - \cos \pi^2).$$



En recintos más complicados se dividirá  $D$ . La integral será la suma de las integrales sobre cada subconjunto:

**Ej 4.** Integremos sobre la región  $D$  acotada por  $y = |x| - 1$  e  $y = \frac{x^2}{4}$ .

$$\iint_D f = \int_{-2}^0 \int_{-x-1}^{x^2/4} f(x, y) dy dx + \int_0^2 \int_{x-1}^{x^2/4} f(x, y) dy dx$$

O como  $y = x^2/4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{y}$ ,  $y = \pm x - 1 \Leftrightarrow x = \pm(y+1)$ , se puede hacer (hallando más integrales) también de esta forma:

$$\int_0^1 \int_{-2\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}-1} f(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_{\sqrt{y}-1}^{\sqrt{y}+1} f(x, y) dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-y-1}^{-y+1} f(x, y) dx dy.$$

Si en particular integramos  $f \equiv 1$  obtendremos el **área** de  $D$ :

$$A = \iint_D 1 = \int_{-2}^0 (\frac{x^2}{4} + x + 1) dx + \int_0^2 (\frac{x^2}{4} - x + 1) dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

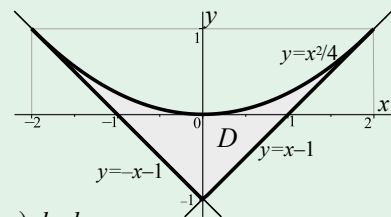
[**Integrales iguales por ser  $f \equiv 1$  par en  $x$  y  $D$  simétrica respecto a  $x=0$ ; bastaba hacer  $2 \int_0^2$ ].**

O peor:  $A = \iint_D 1 = 2 \int_0^1 [y+1-2\sqrt{y}] dy + 2 \int_{-1}^0 [y+1] dy = 2 \frac{1}{6} + 1 = \frac{4}{3}$  [1 = área triángulo].

Tomemos ahora  $f(x, y) = 3xy^2$  y calculemos la integral por el primer camino:

$$\iint_D f = \int_{-2}^0 [xy^3]_{-x-1}^{x^2/4} dx + \int_0^2 [xy^3]_{x-1}^{x^2/4} dx = \dots = -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0.$$

[**Debía anularse por ser  $f$  impar en  $x$  y  $D$  simétrica respecto a  $x=0$ . El 'volumen negativo' dado por la gráfica de  $f$  en la parte de  $D$  con  $x \leq 0$  se cancela con el positivo que da la de  $x \geq 0$ ].**



Otro ejemplo, y de paso repasamos algo más de integrales de funciones de una variable. Antes de los ejemplos en polares repasaremos también como integrar funciones trigonométricas y algunas raíces.

**Ej 5.** Calculemos la integral  $\iint_D \frac{y}{x+1} dx dy$ , siendo  $D$  la región acotada por  $x=0$ ,  $y=1$  y  $x=y^2$ .

Para  $x \neq -1$  el integrando es continuo y sabemos que la integral va a existir.  
Es algo más corto este orden de integración:

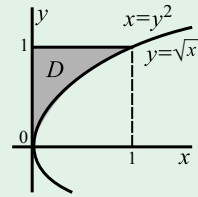
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{x+1} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x}{x+1} dx \stackrel{\bullet}{=} \int_0^1 \left[ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right] dx = \ln|x+1| \Big|_0^1 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

- En integrales racionales, **si el grado del numerador no es menor primero se divide**, (el paso siguiente, si fuera necesario, sería **descomponer en fracciones simples**).

Es más largo con el otro orden de integración (exige integrar por partes y hacer otra racional):

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{y}{x+1} dx dy = \int_0^1 y \ln(1+y^2) dy \stackrel{\bullet}{=} \left[ \frac{y^2}{2} \ln(1+y^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^3+y-y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

- Pide las partes por mejorar los logaritmos al ser derivados, aunque aumente la potencia de la  $y$ . En otras típicas partes como  $xe^x$  o  $x^2 \cos x$  se derivan las  $x^n$  por no estropearse las otras al integrarlas.



## Cambios de variable

Generalicemos para integrales dobles la fórmula para integrales en  $\mathbf{R}$ :

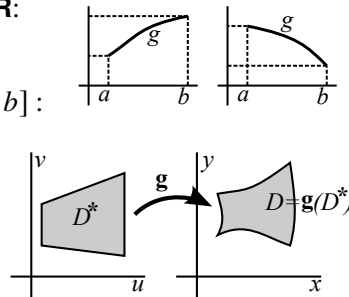
$$\int_a^b f(g(u)) g'(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx, \text{ con } g \in C^1([a, b]).$$

En concreto, el caso de  $g$  **inyectiva** (creciente o decreciente) en  $[a, b]$ :

$$\int_{[a,b]} f(g(u)) |g'(u)| du = \int_{g([a,b])} f(x) dx.$$

En  $\mathbf{R}^2$  nuestra situación será esta: para calcular  $\iint_D f(x, y) dx dy$

realizaremos un cambio de variable  $\mathbf{g} : D^* \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbf{R}^2$   
 $(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$



con el fin de que el nuevo recinto  $D^*$  o la nueva función a integrar sean más sencillas. El papel de la  $|g'(u)|$  lo cumplirá aquí el valor absoluto del determinante jacobiano.

**Teor 3.** Sea  $\mathbf{g} : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$  de  $C^1$ , inyectiva en  $D^*$ ,  $\mathbf{g}(D^*) = D$  y  $f$  integrable.  
Entonces:  $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$ .

La demostración es complicada y no se da. Pero hacemos observaciones sobre hipótesis y resultado.

- El teorema sigue siendo cierto aunque  $\mathbf{g}$  deje de ser inyectiva en puntos sueltos o curvas continuas.
- Si el determinante jacobiano  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$  en un punto, el teorema de la función inversa asegura que  $\mathbf{g}$  es inyectiva en un entorno de ese punto, pero sabemos que aunque no se anule en ningún punto de  $D^*$  esto no basta para que sea inyectiva en todo el conjunto  $D^*$ .
- En caso de ser  $f \equiv 1$  queda  $\iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \text{área de } D$ , con lo que el jacobiano viene a ser una medida de cómo un cambio de variable distorsiona el área.

Si  $D^*$  es un **pequeño rectángulo** del plano  $uv$ , al ser  $\mathbf{g}$  diferenciable una buena aproximación es

$$\mathbf{g}(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v) \approx \mathbf{g}(u_o, v_o) + \mathbf{Dg}(u_o, v_o)(\Delta u, \Delta v),$$

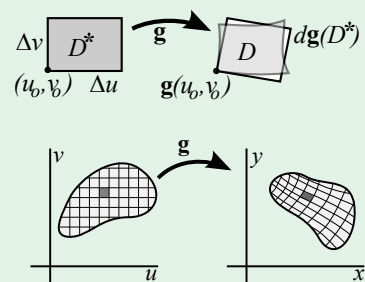
y así  $D = \mathbf{g}(D^*)$  será 'aproximadamente igual' al paralelogramo  $\mathbf{Dg}(D^*)$  con vértice  $\mathbf{g}(u_o, v_o)$  y cuyos lados son

$$\mathbf{Dg}(\Delta u, 0) = \Delta u \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{Dg}(0, \Delta v) = \Delta v \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}.$$

Este paralelogramo tiene por área el valor absoluto de  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u \Delta v$   
[pues  $|(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0)| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$  mide áreas].

Si  $D^*$  es un **conjunto más general**, el área de  $D = \mathbf{g}(D^*)$  pasa a

ser aproximadamente  $\sum \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$ , expresión que en el límite será la integral sobre  $D^*$ .



Como primer ejemplo de cambio de variable consideramos los **cambios lineales**:

$$\begin{cases} x = Au + Bv \\ y = Cu + Dv \end{cases} \cdot \text{Si } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0 \text{ define biyección de } \mathbf{R}^2 \text{ en } \mathbf{R}^2.$$

$$\rightarrow \iint_D f(x,y) dx dy = |AD - BC| \iint_{D^*} f(Au + Bv, Cu + Dv) du dv .$$

[Las regiones se transforman de forma sencilla porque **las aplicaciones lineales llevan rectas a rectas**].

**Ej 6.** Sea  $D$  el cuadrado de la figura y hallemos  $\iint_D (x-y)^2 e^{x+y} dx dy$ .

La forma de  $f$  y el recinto sugieren:  $\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(u+v)/2 \\ y=(u-v)/2 \end{cases}$ .

Las rectas que definen los lados pasan a ser:  $u=0, 1, v=0, 1$ .

El jacobiano es  $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$ . Luego  $\iint_D = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 v^2 e^u du dv = \frac{e-1}{6}$ .

Hacemos otro ejemplo que usa un cambio de variable más complicado (que tanteando se nos podría ocurrir):

**Ej 7.** Hallemos el área de la región  $D$  limitada en  $x \geq 0$  por  $y=x, y=x-6, y=-x^2, y=2-(x-2)^2$ ,  
 i) integrando directamente en cartesianas, ii) haciendo el cambio:  $x=u+v, y=v-u^2$ .

i)  $A = \int_0^2 \int_{-x^2}^x dy dx + \int_2^4 \int_{x-6}^{-x^2+4x-2} dy dx = \int_0^2 (x+x^2) dx + \int_2^4 (4+3x-x^2) dx = 12$ .

ii)  $x=u+v$  lleva  $u=0 \rightarrow y=x, u=2 \rightarrow y=x-6,$   
 $y=v-u^2$  lleva  $v=0 \rightarrow y=-x^2, v=2 \rightarrow (x-2)^2=2-y$ .

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = 1+2u \neq 0$  en  $D^*$ , y el cambio es inyectivo en  $D^*$  pues lleva  $u=a$  a rectas  $y=x-a-a^2$  del plano  $xy$ , distintas para cada  $a \geq 0$ .

[No es inyectiva en  $\mathbf{R}^2$  pues, por ejemplo,  $u=-1$  va también a  $y=x$ ].

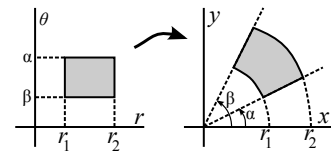
Por tanto,  $A = \int_0^2 \int_0^2 (1+2u) du dv = 2[u+u^2]_0^2 = 12$ .

Pero el cambio que más a menudo aparece y nos será más útil es el **cambio a polares**:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \cdot \text{El jacobiano es ahora: } J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r .$$

Y la fórmula del cambio adopta la forma:  $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$ .

¿Qué conjuntos  $D$  provienen de otros  $D^*$  sencillos del plano  $r\theta$ ?  
 Un rectángulo  $[r_1, r_2] \times [\alpha, \beta]$  pasa a ser un sector de corona circular limitado por las circunferencias de radio  $r_1$  y  $r_2$  y las rectas que pasan por el origen de pendientes  $\alpha$  y  $\beta$ .



Si queremos hallar el área en polares de una región  $D$  limitada en  $\theta \in [\alpha, \beta]$  por  $r=g(\theta)$  y  $r=h(\theta)$ , con  $g \leq h$ , será:

$$\text{área} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [h^2(\theta) - g^2(\theta)] d\theta ,$$

(coincidente con lo que se dice en mis apuntes de matemáticas).

Como este cambio lleva a senos y cosenos, repasamos antes de los ejemplos las **integrales trigonométricas**.

Se integran  $\sin^m \theta \cos^n \theta$ ,  $m$  y  $n$  ambas **pares**, mediante las fórmulas  $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ ,  $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ .  
 Si  $m$  o  $n$  es **impar**, son casi inmediatas buscando  $\sin \theta d\theta$  o  $\cos \theta d\theta$  [usando, tal vez,  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ].  
 Los cocientes de trigonométricas, según sea su paridad, pasan a racionales con  $\sin \theta = t$ , o con  $\cos \theta = t$ , o con  $\tan \theta = t$ . Y, en cualquier caso, con el cambio más largo  $t = \tan \frac{\theta}{2}$ .  
 Las integrales  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$  se convierten en trigonométricas haciendo  $x = a \sin t$ .



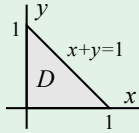
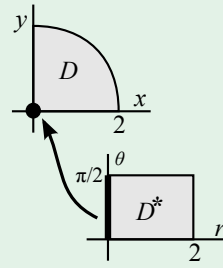
En el primer ejemplo de polares, tanto el recinto como el  $x^2+y^2$  del integrando las pedían a gritos:

**Ej 8.** Hallemos  $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$ , con  $D$  el sector circular del dibujo:

$$\iint_{D^*} r \sqrt{4-r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^2 r(4-r^2)^{1/2} dr \right] d\theta = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}$$

el  $[\cdot]$  no depende de  $\theta$  ↑ octante de esfera ↗

Obsérvese que el cambio a polares no es inyectivo en el lado izquierdo del rectángulo  $D^*$  (todos los puntos con  $r=0$  van al origen), pero como ya dijimos, **no importa que falle la inyectividad en puntos o rectas sueltas.**



En otros  $D$  el cambio a polares complicará normalmente el recinto. Por ejemplo, el triángulo del dibujo daría lugar a la integral:

$$\iint_D f = \int_0^{\pi/2} \int_0^{1/(\sin\theta+\cos\theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

y no haríamos el cambio salvo que  $f$  se simplificase notablemente.

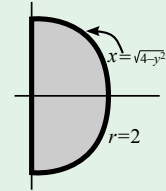
Aunque la  $f$  es inofensiva, aquí es el recinto el que pide usar polares:

**Ej 9.** Calcular la integral doble  $\iint_D (x-y)^2 dx dy$ , siendo  $D$  el semicírculo dado por  $x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0$ .

En polares es  $(r \cos \theta - r \sin \theta)^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) = r^2 (1 - \sin 2\theta)$ .  
a simple vista, no se han precisado las fórmulas del ángulo doble

Por tanto:  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^3 (1 - \sin 2\theta) dr d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin 2\theta) d\theta = 4\pi$ .  
↑ por el jacobiano ↑ es impar y su integral es 0

Debía ser  $>0$  por ser el integrando positivo. Las **simetrías simplifican** muchas integrales.



En cartesianas los cálculos serían bastante más largos:

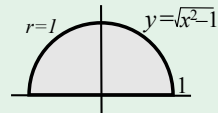
$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 - 2xy + y^2) dx dy = \int_{-2}^2 \left( \underset{\text{impares}}{y^3 - 4y} + \underset{\text{pares}}{\frac{2}{3}(y^2+2)\sqrt{4-y^2}} \right) dy = \frac{4}{3} \int_0^2 (y^2+2)\sqrt{4-y^2} dy$$

$$\left[ \begin{array}{l} y=2 \sin t, y=2 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ dy=2 \cos t = \sqrt{4-y^2} \end{array} \right] \rightarrow = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (8s^2+4)c^2 dt = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (3+2 \cos 2t - \cos 4t) dt = 4\pi.$$

Uno en otro recinto igual de sencillo para repasar las integrales con potencias impares:

**Ej 10.** Calculemos  $I = \iint_D (x^4 y + 3y^3) dx dy$ ,  $D$  semicírculo  $x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0$ .

En polares:  $\int_0^{\pi} \int_0^1 (r^6 \cos^4 \theta \sin \theta + 3r^4 \sin^3 \theta) dr d\theta = \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{7} c^4 s + \frac{3}{5} s(1-c^2) \right] d\theta$



Y todas las integrales son ya inmediatas. En concreto es:  $I = \left[ -\frac{1}{35} \cos^5 \theta - \frac{3}{5} \cos \theta + \frac{1}{5} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi} = \frac{6}{7}$ .

Las potencias impares suelen dar cálculos sencillos también en cartesianas. Comprobémoslo:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^4 y + 3y^3) dy dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 [2x^4(1-x^2) + 3(1-x^2)^2] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (3-6x^2+5x^4-2x^6) dx = \frac{6}{7}.$$

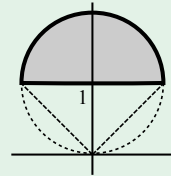
En el siguiente ejemplo, aunque el recinto no parecería adecuado a las polares, por no estar limitado por curvas  $r=cte$  o  $\theta=cte$ , el aspecto del integrando las pide indudablemente:

**Ej 11.** Integremos  $f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ , sobre el semicírculo  $x^2+(y-1)^2 \leq 1, y \geq 1$ .

Las curvas que limitan el recinto, escritas en polares quedan:

$$y = r \sin \theta = 1 \rightarrow r = 1/\sin \theta, \quad x^2+y^2 = 2y, \quad r^2 = 2r \sin \theta \rightarrow r = 2 \sin \theta.$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{1/\sin \theta}^{2 \sin \theta} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} dr d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2 \sin^2 \theta - 1) d\theta = -\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 1.$$



Las cuentas se complican bastante si se intentan hacer de cualquier forma en cartesianas:

$$\int_{-1}^1 \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dy dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\ln 2 + \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \ln(1+x^2)] dx = \dots$$

O peor:  $\int_1^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dx dy = [\arctan \frac{x}{y}]_0^2 = 2 \int_1^2 [\arctan \frac{x}{y}]_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy = \int_1^2 \arctan \frac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{y}} dy = \dots$

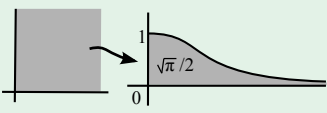
Usemos el cambio a polares para hallar el valor de una famosa integral impropia convergente de una variable que tiene primitiva no elemental:

**Ej 12.** Para calcular  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$  consideramos la integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx dy = \int_0^\infty I e^{-y^2} dy = I^2.$$

En polares es:  $\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

$\infty$  es un límite como en toda impropia ↑ integrando par

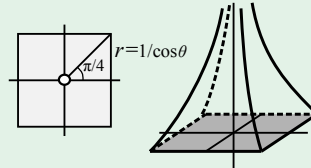


También pide polares esta impropia (aquí por no estar acotada en el origen), convergente pese a su aspecto:

**Ej 13.** Calculemos la impropia  $\iint_R \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$ , con  $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

$$\iint_R \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 8 \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\pi/4} \int_t^{1/\cos \theta} \frac{r}{r} dr d\theta = 8 \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos \theta} \equiv I.$$

(en polares deja de ser impropia) (se puede hallar por dos caminos)



Por ser el integrando impar en  $\cos \theta$  lo buscamos como diferencial:

$$I = 8 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta = [ \sin \theta = s ] = 8 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{ds}{1-s^2} = 4 \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[ \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right] ds = \dots = 8 \log(1 + \sqrt{2}) \approx 7.05.$$

[El volumen es finito, pero las secciones con el plano  $x=0$  o con el  $y=0$  tienen área infinita].

La integral es también calculable (y no larga) con el cambio de último recurso  $\tan \frac{\theta}{2} = u$

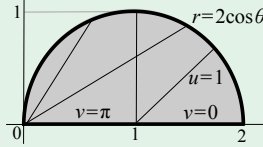
En los libros de cálculo en  $R$  se puede leer que  $\sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ,  $d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$ . Por tanto:

$$I = 8 \int_0^{\tan \pi/8} \frac{1+u^2}{1-u^2} \frac{2}{1+u^2} du = 8 \int_0^{\tan \pi/8} \left[ \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right] du = 8 \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \Big|_0^{\tan \pi/8} \approx 7.05.$$

Pequeñas **modificaciones del cambio a polares** son útiles en los dos siguientes ejemplos:

**Ej 14.** Halleemos  $\iint_D y dx dy$ ,  $D$  región dada por  $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$ .

Las coordenadas más adecuadas son las polares centradas en  $(1, 0)$ :

$$x = 1 + u \cos v, y = u \sin v, \text{ cuyo jacobiano es } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u.$$


Como  $(x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow u=1$  es:  $\iint_D y = \int_0^\pi \int_0^1 u^2 \sin v du dv = \left[ \frac{u^3}{3} \right]_0^1 [-\cos v]_0^\pi = \frac{2}{3}.$

Aunque la integral no es complicada en cartesianas (de las dos formas) y en las polares habituales:

$$\iint_D y = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (2x-x^2) dx = \frac{1}{2} \left[ 4 - \frac{8}{3} \right] = \frac{2}{3}.$$

$$\iint_D y = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} y dx dy = \int_0^1 2y(1-y^2)^{1/2} dy = -\frac{2}{3} \left[ (1-y^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

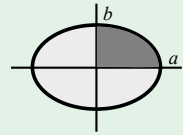
$$\iint_D y = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \left[ -\cos^4 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

$x^2 + y^2 = 2x$ ,  $r^2 = 2r \cos \theta$ ,  $r = 2 \cos \theta$

Más veces en el curso utilizaremos este cambio para las elipses:

**Ej 15.** Calculemos el área  $A$  de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

El cambio a polares no es útil, pero sí este modificado:  $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr.$$

La elipse pasa a ser  $r=1 \rightarrow A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr dr d\theta = \pi ab.$

[Con integrales en  $\mathbf{R}$ :  $A = 4 \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}} dx dy = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \pi ab$ ].

$x = a \sin t, dx = a \cos t dt$

Veamos más **aplicaciones** de las integrales dobles (las fórmulas serán análogas para  $\mathbf{R}^3$ ). Además del **área** de  $D$  [ $A = \iint_D dx dy$ ], y del **volumen** en  $D$  bajo la gráfica de una  $f$  positiva [ $V = \iint_D f$ ], se tiene que el **volumen sobre  $D$  entre las gráficas de dos funciones acotadas**  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , viene dado por  $V = \iint_D (g - f) dx dy$ , independientemente de los signos de cada una de ellas.

[Basta tomar una constante  $C$  tal que  $f+C$  sea positiva y pensar en la  $\iint_D (g+C - (f+C))$ ].

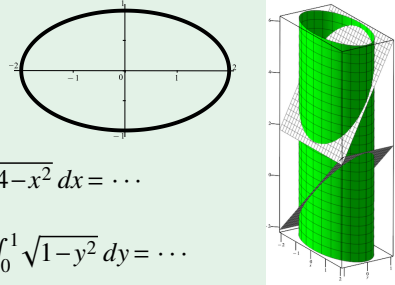
**Ej 16.** Hallemos el volumen del sólido comprendido entre  $z=x$  y  $z=4+2y$  sobre la elipse  $x^2+4y^2 \leq 4$ .

Con  $x=2r \cos \theta$ ,  $J=2r$ , siendo  $x \leq 2 \leq 4+2y$  sobre la elipse:

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (8r+r^2[4 \sin \theta - 2 \cos \theta]) d\theta dr = 16\pi \int_0^1 r dr = 8\pi.$$

Peor:  $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2} (2y-x+4) dy dx = \int_{-2}^2 (4-x)\sqrt{4-x^2} dx = 8 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \dots$

O esto:  $\int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{-2\sqrt{1-y^2}} (2y-x+4) dx dy = 8 \int_{-1}^1 (y+2)\sqrt{1-y^2} dy = 32 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \dots$



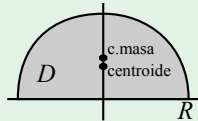
Más aplicaciones de utilidad física: El **promedio** de una magnitud  $f$  sobre  $D$  es  $\bar{f} = \frac{1}{A} \iint_D f$ .

Si  $\sigma(x, y)$  es la **densidad** de una placa  $D$ , su **masa** es  $M = \iint_D \sigma(x, y) dx dy$ .

El **centro de masa** de la  $D$  es el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  de coordenadas  $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \sigma$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \sigma$  [se llama **centroide** si  $\sigma = \text{cte}$ , y será  $\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y$  (el promedio de sus  $x$  e  $y$ )].

Los **momentos de inercia** respecto a los ejes  $x$  e  $y$  son:  $I_x = \iint_D y^2 \sigma$ ,  $I_y = \iint_D x^2 \sigma$ .

**Ej 17.** Sea un semicírculo  $D$  de radio  $R$  de densidad directamente proporcional a la distancia al centro de  $D$ . Hallemos su centroide, su centro de gravedad y sus momentos de inercia.



Se puede probar que **si una lámina tiene un eje de simetría, su centroide está en en dicho eje** (y si tiene dos, está en su intersección). Por tanto,  $\bar{x}_c = 0$ . La otra

$$\bar{y}_c = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42 R.$$

Para el centro de gravedad hay que incluir la densidad  $\sigma(r) = kr$  (simétrica). También será  $\bar{x} = 0$ .

Como la masa es  $M = \int_0^\pi \int_0^R kr^2 dr d\theta = \frac{\pi k}{3} R^3$ , será  $\bar{y} = \frac{3}{\pi R^3} \int_0^\pi \int_0^R r^3 \sin \theta dr d\theta = \frac{3R}{2\pi} \approx 0.48 R$ .

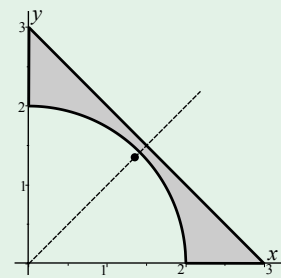
Los momentos son:  $I_x = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^2 \theta dr d\theta = \frac{\pi k}{10} R^5$ ,  $I_y = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{\pi k}{10} R^5$ .

**Ej 18.** Hallemos el centro de masas de la región del primer cuadrante dada por  $x^2+y^2 \geq 4$ ,  $x+y \leq 3$  y cuya densidad es  $\sigma(x, y) = xy$ .

$$\begin{aligned} \text{La masa es } M &= \int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{3-x} xy dy dx + \int_2^3 \int_0^{3-x} xy dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (5x - 6x^2 + 2x^3) dx + \frac{1}{2} \int_2^3 (9x - 6x^2 + x^3) dx = \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

La  $\bar{x}$  y la  $\bar{y}$  serán iguales por simetría de la región y de la densidad.

$$\begin{aligned} M \bar{x} &= \int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{3-x} x^2 y dy dx + \int_2^3 \int_0^{3-x} x^2 y dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (5x^2 - 6x^3 + 2x^4) dx + \frac{1}{2} \int_2^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \frac{23}{12}. \end{aligned} \text{ Luego } \bar{x} = \bar{y} = \frac{46}{33} \approx 1.39.$$



**Ej 19.** Calculemos la distancia media de los puntos de un círculo de radio 3 al centro de ese círculo.

El área del círculo es  $A = \pi R^2 = 9\pi$ . Y en polares, la distancia es  $r$ .

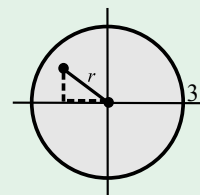
Por tanto, la distancia media:  $d_{\text{media}} = \frac{1}{9\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 dr d\theta = \frac{2}{9} \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^3 = 2$ .

Hallamos ahora en ese círculo la media para una nueva distancia definida por:

$$d^*(x, y), (a, b) = |x-a| + |y-b| \text{ (caminando paralelos a los ejes).}$$

La distancia al origen es aquí:  $|x| + |y| = r(|\cos \theta| + |\sin \theta|)$ . Y entonces:

$$d_{\text{media}}^* = \frac{1}{9\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 (|\cos \theta| + |\sin \theta|) dr d\theta = \frac{4}{9\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 (\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta = \frac{8}{\pi} (> 2, \text{ claro}).$$



## 4.2. Integrales triples

Análogamente a como hicimos para  $n=2$ , se define  $\iiint_P f$ , para una  $f(x, y, z)$  acotada y continua (o ‘poco discontinua’), inicialmente sobre un paralelepípedo  $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ . Representará un ‘volumen’ en un espacio de cuatro dimensiones, es decir, el del ‘sólido’ de cuatro dimensiones con ‘base’  $P$  y altura en cada punto la que le asigna  $f(x, y, z)$ . Nos serviría también para hallar la masa de un  $P$ . Las integrales triples se podrán de nuevo calcular mediante integrales iteradas:

$$f \text{ continua en } P \Rightarrow \iiint_P f = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

[o las otras 5 iteradas que salen permutando papeles de  $x, y, z$ ].

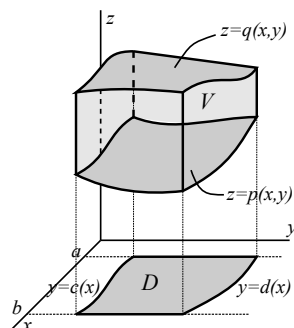
**Ej 1.** Si  $f(x, y, z) = 2yz - x$  y  $P = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$  es:

$$\iiint_P f = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2yz - x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^2 (9y - 3x) dy dx = \int_0^1 (18 - 6x) dx = 15.$$

O, por ejemplo, así:  $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^2 (2yz - x) dy dx dz = \int_0^3 \int_0^1 (4z - 2x) dx dz = \int_0^3 (4z - 1) dz = 18 - 3 = 15.$

También podemos integrar sobre recintos  $V \subset \mathbf{R}^3$  más generales.

$$\begin{aligned} \text{Si } V = \{ (x, y, z) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y) \}, \\ \text{con } c \leq d \text{ continuas en } [a, b] \text{ y } p \leq q \text{ continuas en} \\ D = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}, \text{ y } f \text{ es continua en } V \\ \Rightarrow \iiint_V f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{p(x, y)}^{q(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx. \end{aligned}$$



Análogas fórmulas se obtienen intercambiando los papeles de  $x, y, z$ . Muchos recintos que aparecen están incluidos en algunos de esos tipos.

En el caso de que sea  $f \equiv 1$ ,  $\iiint_V dx dy dz$  representará el **volumen de  $V$** .

[Claro que los volúmenes se pueden calcular simplemente con integrales dobles, de la misma forma que para las áreas bastan las integrales de funciones de una variable. Pero con cambios de variable en la dimensión superior se consiguen abreviar bastantes veces los cálculos].

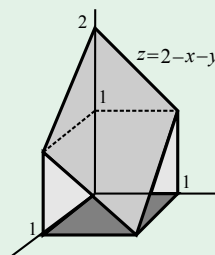
Lo más difícil de las integrales triples es dibujar gráficas, pero al menos debemos hacernos una idea de ellas para decidir qué funciones limitando los recintos son mayores o menores. En los dos primeros ejemplos, el volumen está limitado por planos. La escritura inicial  $dx dy dz$  es sólo alfabética.

**Ej 2.** Calculemos  $\iiint_V x dx dy dz$ , siendo  $V$  la región acotada por los planos:

$$x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, x+y+z=2.$$

En el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  del plano  $xy$  está  $z=2-x-y$  por encima de  $z=0$ , y con ello se podría plantear la integral sin el dibujo (fácil cortando con planos).

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x-y} x dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (2x - x^2 - xy) dy dx \\ &= \int_0^1 (2x - x^2 - x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1) dx = \int_0^1 \left( \frac{3x}{2} - x^2 \right) dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$



O un poquito más corto si cambiamos el orden de  $dx$  y  $dy$ . El primer paso es igual, y luego:

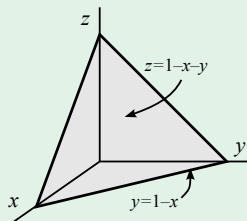
$$\int_0^1 \int_0^1 (2x - x^2 - xy) dx dy = \int_0^1 (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y) dy = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

**Ej 3.** Halleemos  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , con  $V$  tetraedro de vértices

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

$$\iiint_V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right] (1-x)^4 dx = \frac{1}{24} \int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5) dx = \frac{1}{720}.$$

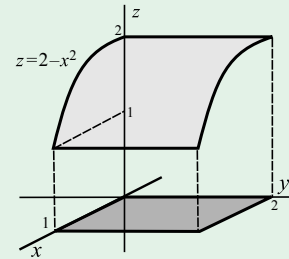


En el siguiente la base del recinto (su 'sombra') sigue siendo muy sencilla y su 'tapa' también se dibuja con facilidad, por tratarse de una función que no depende de una de las variables:

**Ej 4.** Calcular  $\iiint_V x e^z dx dy dz$ , siendo  $V$  el sólido limitado por  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ ,  $y=2$ ,  $z=0$  y la superficie  $z=2-x^2$ .

En  $[0, 1] \times [0, 2]$  es  $z=2-x^2 > 0$  (tampoco necesitaríamos el dibujo).

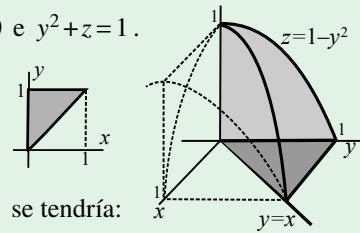
$$\begin{aligned} \iiint_V &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2-x^2} x e^z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^2 x [e^{2-x^2} - 1] dy dx \\ &= \int_0^1 [2x e^{2-x^2} - 2x] dx = -[e^{2-x^2} + x^2]_0^1 = \boxed{e^2 - e - 1}. \end{aligned}$$



En el siguiente, con recinto un poco más complicado, debemos tener cuidado además con los órdenes de integración, pues algunos dan lugar a primitivas no calculables:

**Ej 5.**  $\iiint_V e^{-z} dx dy dz$ , con  $V$  acotado en  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  por  $x=y$ ,  $z=0$  e  $y^2+z=1$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^y \int_0^{1-y^2} e^{-z} dz dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 y(1 - e^{y^2-1}) dy \\ &= \frac{1}{2} [y^2 - e^{y^2-1}]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2e}}. \end{aligned}$$



[Si en vez de  $dz dx dy$ , por ejemplo, hubiéramos escogido  $dz dy dx$  se tendría:

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{1-y^2} e^{-z} dz dy dx = \frac{1}{2} - e^{-1} \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx, \text{ aparentemente no calculable].}$$

[Todas las integrales nos han salido positivas por estar integrando funciones positivas en cada recinto, pero, desde luego, las integrales triples pueden ser negativas].

### Cambios de variable.

Con hipótesis totalmente análogas a las del plano se tiene la siguiente fórmula para los cambios:

$$\text{Sea } \mathbf{g}: (u, v, w) \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \text{ de } C^1, \text{ inyectiva en } V^*, \mathbf{g}(V^*) = V$$

$$\text{y } f \text{ integrable} \Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\mathbf{g}(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

[Vale aunque  $\mathbf{g}$  no sea inyectiva un número finito de puntos, curvas o superficies].

Hacemos un primer ejemplo en el que algo puede simplificar un sencillo cambio lineal:

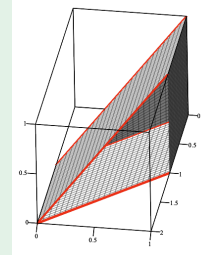
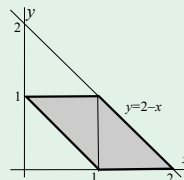
**Ej 6.** Si  $f(x, y, z) = xe^{x+y}$  y  $V$  está acotado por los planos  $y=0$ ,  $y=1$ ,  $x+y=1$ ,  $x+y=2$ ,  $z=0$  y  $z=y$  calculamos  $\iiint_V f$  con más de orden de integración y haciendo también un cambio lineal.

$$\int_0^1 \int_{1-y}^{2-y} \int_0^y xe^{x+y} dz dx dy = \int_0^1 \int_{1-y}^{2-y} xy e^{x+y} dx dy = \int_0^1 [e^{2-y} (y-y^2) + ey^2] dy = \boxed{\frac{e^2}{6} + \frac{e}{3}}.$$

• Por partes  $\int xe^{x+y} dx = (x-1)e^{x+y}$

El habitual  $dz dy dx$  exige calcular dos integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_0^y xe^{x+y} dz dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \int_0^y xe^{x+y} dz dy dx \\ = \int_0^1 ex^2 dx + \int_1^2 [(x-x^2)e^2 + xe^x] dx = \dots = \frac{e}{3} + \frac{e^2}{6}. \end{aligned}$$



Tiene una sola integral el orden  $\int_0^1 \int_z^1 \int_{1-y}^{2-y} xe^{x+y} dx dy dz = \dots$

Muy parecida a la inicial es a la que lleva:  $\int_0^1 \int_0^y \int_{1-y}^{2-y} xe^{x+y} dx dz dy = \int_0^1 \int_0^y [(1-y)e^2 + ey] dz dy = \dots$

La expresión de los planos sugiere claramente el **cambio**:  $u=x+y$ ,  $v=y$ ,  $w=z$  (es pues  $x=u-v$ ).

Su jacobiano es no nulo (y es por tanto una biyección en el espacio):  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

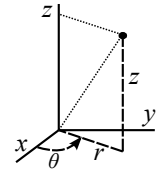
La integral se transforma, pues, en:

$$\int_1^2 \int_0^1 \int_0^v (u-v) e^u dw dv du = \int_1^2 (\frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{3} e^u) dv = \dots = \frac{e}{3} + \frac{e^2}{6}.$$

Pero sobre todo nos van a interesar los cambios a coordenadas **cilíndricas y esféricas**. Definamos cada una y familiaricémonos con ellas antes de hacer integrales.

**Cilíndricas:**  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ . O sea, polares del plano  $xy$  junto con la coordenada  $z$ . Dar las cilíndricas de un  $(x, y, z)$  es trivial para la  $z$ , y además es  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , y se tiene que  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ .

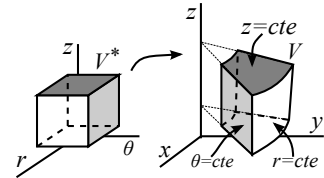
El jacobiano es:  $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$  [localmente invertible si  $r > 0$ , e inyectiva en  $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$  (o si elegimos  $-\pi < \theta \leq \pi$ )].



Por tanto la fórmula del cambio de variable adopta aquí la forma:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dr d\theta dz$$

¿Qué conjuntos del espacio son sencillos en cilíndricas? Los puntos  $r = cte$  son una superficie cilíndrica, y los  $\theta = cte$  y  $z = cte$  planos (vertical y horizontal). Un paralelepípedo  $V^*$  pasa a ser un  $V$  como el de la derecha.



Suelen pedir cilíndricas las superficies de revolución. Y admiten modificaciones como las vistas con polares si, por ejemplo, tratamos con cilindros elípticos o no centrados en el eje  $z$ .

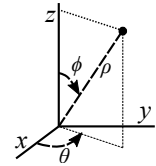
[Utilizando la regla de la cadena, y trabajando como hicimos con las polares, podemos deducir expresiones para el gradiente y el Laplaciano en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla f = f_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} f_\theta \mathbf{e}_\theta + f_z \mathbf{e}_z, \quad \begin{matrix} \mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{[ortogonales} \\ \text{entre ellos].} \end{matrix} \quad \Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + f_{zz}.$$

**Esféricas:**  $\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$ . Es  $r = \rho \sin \phi$ ,  $\rho^2 = r^2 + z^2$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Además:  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ,  $\tan \phi = \frac{r}{z}$  [mirando cuadrantes]. [Los físicos suelen cambiar los nombres de  $\phi$  y  $\theta$ ].

El jacobiano es de cálculo más largo:

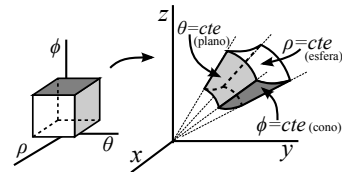
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \begin{vmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} - \rho^2 \sin^3 \phi \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi. \quad \text{[Cambio no inyectivo en todo el eje } z \text{].}$$



La integrales en esféricas se calculan, pues, mediante:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} \rho^2 \sin \phi f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) d\rho d\theta d\phi$$

En esféricas,  $\rho = C$  describe una superficie esférica,  $\theta = C$  se trata de un plano y  $\phi = C$  es una superficie cónica. Un recinto simple  $V$  en esféricas es, por tanto, el dibujado a la derecha. Son adecuadas para integrar en esferas (y quizás en conos).



[Se comprueba que el gradiente y el Laplaciano son aquí:

$$\nabla f = f_\rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho \sin \theta} f_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho} f_\phi \mathbf{e}_\phi, \quad \begin{matrix} \mathbf{e}_\rho = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\ \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{e}_\phi = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{[ortogonales} \\ \text{de nuevo].} \end{matrix}$$

$$\Delta f = f_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} f_\rho + \frac{1}{\rho^2} f_{\theta\theta} + \frac{\cos \phi}{\rho^2 \sin \phi} f_\phi + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} f_{\theta\theta}.$$

**Ej 7.** Escribamos el punto dado en cartesianas por  $(-1, 1, -\sqrt{6})$  en los otros dos sistemas coordenados.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \quad \tan \theta = -1 \text{ y estamos en el } 2^\circ \text{ cuadrante} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}. \quad \text{[No es } \theta = \arctan(-1) \text{].}$$

Escrito en coordenadas cilíndricas el punto es, pues:  $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, -\sqrt{6})$ .

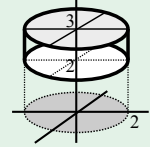
$$\rho = \sqrt{1+1+6} = 2\sqrt{2}. \quad \tan \phi = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \phi = \frac{5\pi}{6}. \quad \text{En esféricas es } (\rho, \theta, \phi) = (2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}).$$

En los siguientes ejemplos se ve que muchas veces las cartesianas no son las coordenadas más adecuadas (si lo eran en los ejemplos anteriores). Los dos primeros son los típicos recintos para trabajar en cilíndricas (o polares, que viene a ser lo mismo) y en esféricas: sobre un cilindro y sobre una esfera.

**Ej 8.** Calcular la integral de la función  $f(x, y, z) = z e^{x^2+y^2}$  sobre el cilindro  $x^2+y^2 \leq 4$ ,  $2 \leq z \leq 3$ .

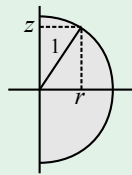
$$\iiint_V z e^{x^2+y^2} dx dy dz = \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \underset{\uparrow \text{jacobiano}}{r} z e^{r^2} dr d\theta dz = \frac{9-4}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 = \frac{5\pi}{2} (e^4 - 1).$$

Lo mismo que integrar en  $z$  y hacer luego el cambio a polares. Las cartesianas no nos sirven porque aparecen primitivas no calculables:  $\int e^{x^2+y^2} dx$  o  $\int e^{x^2+y^2} dy$ .



**Ej 9.** Calculemos de distintas formas el conocido volumen de la esfera unidad.

Lo mejor, en esféricas:  $\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta = 2\pi \int_0^1 2\rho^2 d\rho = \frac{4\pi}{3}$ .



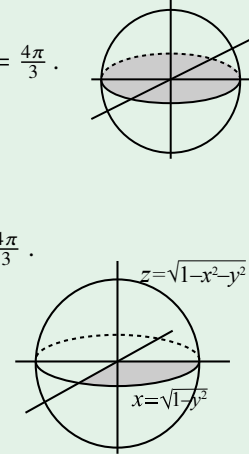
En cilíndricas por dos caminos (algo más largo):

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr dz d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{2} dz = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2} dr = \frac{4\pi}{3}.$$

Las cartesianas son las coordenadas menos adecuadas aquí:

$$\begin{aligned} \text{vol} &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dx dy = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= \dots [\text{cambio } x = \sqrt{1-y^2} \sin t] \dots = 8 \int_0^1 \frac{\pi}{4} (1-y^2) dy = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$



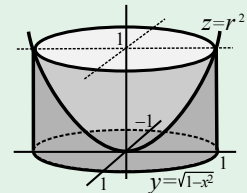
En este ejemplo lo más corto resultan ser las cilíndricas:

**Ej 10.** Calculamos  $\iiint_V z dx dy dz$ , siendo  $V$  el sólido limitado por  $x^2+y^2=1$ ,  $z=0$  y  $z=x^2+y^2$ .

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} r z dz dr d\theta = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^1 r^5 dr = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

En cartesianas acaba saliendo, pero con cálculos mucho más largos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} z dz dy dx &= 2 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy dx \\ &= \frac{2}{15} \int_0^1 (8x^4 + 4x^2 + 3) \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \frac{2}{15} \int_0^{\pi/2} (8 \sin^4 t + 4 \sin^2 t + 3) \cos^2 t dt = \dots \end{aligned}$$



[Las esféricas no son nada adecuadas: habría que distinguir entre  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  y ni el plano ni la zona parabólica adoptan una expresión que lleve a cálculos sencillos].

El cono sugiere también cilíndricas (o polares trabajando con  $n=2$ ), pero las esféricas no funcionan mal:

**Ej 11.** Calculemos el volumen encerrado entre el cono  $z = \sqrt{x^2+y^2}$  y el plano  $z=0$  sobre el cuadrado  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Podemos hallarlo mediante integrales dobles, pero hacemos  $\iiint_V dx dy dz$ .

En cartesianas es fácil el recinto, pero largas las integrales:

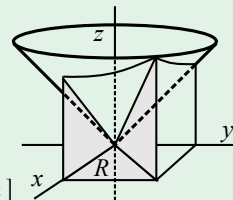
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2} dx dy = [\text{tablas, ordenador o } \sqrt{x^2+y^2} = x+u] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [\sqrt{1+y^2} - y^2 \ln y + y^2 \ln(1+\sqrt{1+y^2})] dy = \dots \end{aligned}$$

En cilíndricas (o polares en la segunda integral):  $x=1 \rightarrow r = \frac{1}{\cos \theta}$ , cono y recinto simétricos,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos \theta} r^2 dr d\theta &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \stackrel{u=\sin \theta}{=} \frac{2}{3} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{6} \left[ \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \boxed{\frac{1}{3} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]}. \end{aligned}$$

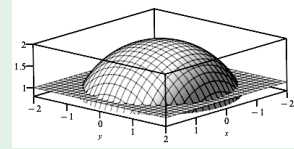
En esféricas es sencilla la variación en  $\phi$  y la recta  $x=1$  pasa a ser  $\rho = \frac{1}{\cos \theta \sin \phi}$ :

$$2 \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\cos \theta \sin \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\phi d\theta}{\sin^2 \phi \cos^3 \theta} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad \text{la misma de antes}$$



**Ej 12.** Calcular  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{z^2}$ , con  $V$  sólido dado por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $z \geq 1$ .

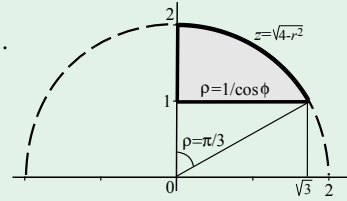
Este casquete esférico pide más las cilíndricas. Para ver la variación de las variables, mejor dibujamos la sección con un plano vertical. Ambas formas en las cilíndricas parecen las más adecuadas:



$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \frac{r}{z^2} dr dz d\theta = \pi \int_1^2 \left(\frac{4}{z^2} - 1\right) dz = \pi \left[-\frac{4}{z}\right]_1^2 - \pi = \boxed{\pi}.$$

O bien: 
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} \frac{r}{z^2} dz dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(r - \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\right) dr$$

$$= 3\pi + 2\pi \left[\sqrt{4-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \boxed{\pi}.$$



En esféricas el ángulo máximo es  $\phi = \frac{\pi}{3}$  por ser su tangente  $\sqrt{3}$  y  $z=1$  se convierte en  $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$ .

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{1/\cos \phi}^2 \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} d\rho d\phi d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/3} \left(\frac{2s}{c^2} - \frac{s}{c^3}\right) d\phi = 2\pi \left[\frac{2}{c} - \frac{1}{2c^2}\right]_0^{\pi/3} = \boxed{\pi}.$$

Ahora planteamos (se usa la simetría de recinto e integrando) y damos algún paso en cartesianas:

$$4 \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{dz dy dx}{z^2} = 4 \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right] dy dx = 4 \int_0^{\sqrt{3}} \left[\sqrt{3-x^2} - \arctan \sqrt{3-x^2}\right] dx$$

[Maple sabe hacer la última integral de arriba, e incluso de hacer la final y devolvernos el  $\pi$ ].

Aplicaciones físicas similares a las vistas para las integrales dobles son:

**Masa** de un sólido  $V$  es  $M = \iiint_V \sigma(x, y, z) dx dy dz$ , si  $\sigma(x, y, z)$  es su densidad.

**Centro de masa** de  $V$  es  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  con  $\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x \sigma$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y \sigma$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z \sigma$ .

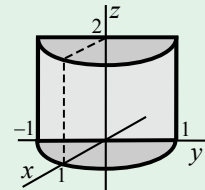
**Momento de inercia** respecto al eje  $z$ :  $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \sigma$  (análogos los otros).

**Ej 13.** Hallemos la masa del medio cilindro  $V$  dado por  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $0 \leq z \leq 2$  y cuya densidad es  $\sigma(x, y, z) = x$ .

El sólido sugiere utilizar las coordenadas cilíndricas ( $x = r \cos \theta$  y  $J = r$ ):

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^2 r^2 \cos \theta dz dr d\theta = \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta\right] \left[\int_0^1 2r^2 dr\right]$$

$$= \left[\sin \theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{2}{3}r^3\right]_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$



Aunque en este caso sale también fácil en cartesianas:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 x dz dy dx = 4 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \frac{4}{3} \left[-(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

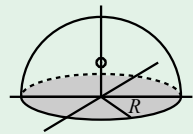
O en otro orden: 
$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^2 x dz dx dy = \int_{-1}^1 \left[x^2\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_{-1}^1 [1-y^2] dy = 2 - \frac{2}{3} [y^3]_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

**Ej 14.** Hallemos la posición del centro de masa de una semiesfera sólida homogénea.

Por simetría, será  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Volumen =  $\frac{2}{3}\pi R^3$ . [Masa =  $\frac{2}{3}\pi R^3 \sigma$ ,  $\sigma$  constante].

$$\bar{z} = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho^3 \sin \phi \cos \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{3}{R^3} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{\sin^2 \phi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3R}{8} = 0.375R.$$

[El recinto pedía a gritos utilizar las coordenadas esféricas].

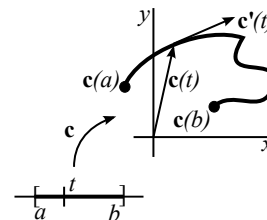




# 5. Integrales de línea

## 5.1 Integrales de campos escalares sobre curvas

Una **función vectorial** (que también llamaremos **trayectoria** o **camino**) era una  $\mathbf{c} : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ , cuya gráfica  $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  es una **curva orientada**  $C$  en  $\mathbf{R}^n$  y su derivada  $\mathbf{c}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$  proporciona el vector tangente a la curva (el vector velocidad, si  $\mathbf{c}(t)$  está describiendo un movimiento en  $\mathbf{R}^n$ ).

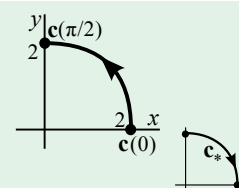


[La recta tangente a  $C$  en  $\mathbf{c}(t_0)$  era:  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t_0) + t \mathbf{c}'(t_0)$ ].

$\mathbf{c}$  se dice  $C^1$  si es continua y  $\mathbf{c}'$  existe y es continua  $\forall t \in (a, b)$ . Es  $C^1$  **a trozos** si  $C$  es continua y  $[a, b]$  se puede dividir en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales  $\mathbf{c}$  es  $C^1$  [su gráfica sería entonces una curva continua sin recta tangente en un número finito de puntos].

**Ej 1.**  $\mathbf{c} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$  con  $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  es una trayectoria  $C^1$  pues  $\mathbf{c}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$  existe  $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

$\mathbf{c}_* : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2$  con  $\mathbf{c}_*(t) = (t, \sqrt{4-t^2})$ ,  $\mathbf{c}'_*(t) = (1, -t(4-t^2)^{-1/2})$  es otro camino  $C^1$  describiendo la misma curva  $C$ , pero en sentido opuesto. Se dice que  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  son dos **parametrizaciones** del tramo de circunferencia.



Sea  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un camino  $C^1$  y sea  $f$  un campo escalar en  $\mathbf{R}^n$  tal que  $f(\mathbf{c}(t))$  es continua en  $[a, b]$ . La integral de  $f$  a lo largo de  $\mathbf{c}$  se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Si  $\mathbf{c}(t)$  es solamente  $C^1$  a trozos o si  $f(\mathbf{c}(t))$  es continua a trozos, definiremos  $\int_{\mathbf{c}} f ds$  descomponiendo  $[a, b]$  en intervalos sobre los que  $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$  sea continua y sumando las integrales sobre cada uno de ellos.

**Ej 1\*.** Si  $f(x, y) = xy^2$  y  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}_*$  son los de arriba, las integrales a lo largo de las dos trayectorias son:

$$\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2, \quad \int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^{\pi/2} 16 \cos t \sin^2 t dt = \frac{16}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}.$$

$$\|\mathbf{c}'_*\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{4-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}, \quad \int_{\mathbf{c}_*} f ds = \int_0^2 t(4-t^2) \frac{2}{\sqrt{4-t^2}} dt = -\frac{2}{3} (4-t^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Probaremos en 5.2 que:

**Teor 1.** Si  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  describen la misma curva  $C$ , entonces  $\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_{\mathbf{c}_*} f ds \equiv \int_C f ds$ .

Como la **integral de línea de una  $f$  escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva**, es lícita la notación  $\int_C f ds$  (integral de  $f$  sobre  $C$ ) donde  $\mathbf{c}$  no aparece por ningún lado.

La raíz de la norma hace que el cálculo de estas integrales sea (salvo para curvas sencillas) complicado y no es extraño que aparezcan integrales no calculables exactamente. [En las de campos vectoriales no ocurrirá esto]. Además de las circunferencias, también suelen ser fáciles los cálculos sobre segmentos:

**Ej 2.** Calculemos la integral de la  $f(x, y) = xy^2$  ahora sobre el segmento que une  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$ .

Podemos parametrizarlo utilizando que pertenece a la recta  $y = 2 - x$ :

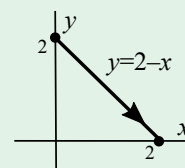
$$\mathbf{c}(x) = (x, 2-x), \quad x \in [0, 2]. \quad \|\mathbf{c}'(x)\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^2 \sqrt{2} x(2-x)^2 dx = \sqrt{2} \left[ 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \sqrt{2}.$$

O también con la expresión para los segmentos que ya vimos en 1.1:

$$\mathbf{c}_*(t) = (0, 2) + t(2, -2) = (2t, 2-2t), \quad t \in [0, 1]. \quad [\text{Mismo sentido, doble velocidad}].$$

$$\|\mathbf{c}'_*(t)\| = 2\sqrt{2} \rightarrow \int_{\mathbf{c}_*} f ds = 16\sqrt{2} \int_0^1 t(1-t)^2 dt = 16\sqrt{2} \left[ \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \sqrt{2}. \quad [\text{Debía salir lo mismo}].$$



Un ejemplo en  $\mathbf{R}^3$  con curva y funciones preparadas para que las primitivas sean más o menos sencillas:

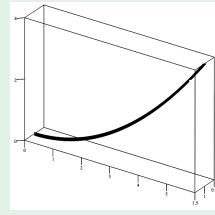
**Ej 3.** Hallemos  $\int_C f$ , con  $C$  dada por  $\mathbf{c}(t) = (1, 3t, t^2)$ ,  $t \in [0, 2]$  y  $f(x, y, z) = xy$ .

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \|(0, 3, 2t)\| = \sqrt{9+4t^2}, \quad f(\mathbf{c}(t)) = 3t \rightarrow$$

$$\int_C f \, ds = \int_0^2 3t\sqrt{9+4t^2} \, dt = \frac{1}{4} [(9+4t^2)^{3/2}]_0^2 = \frac{1}{4} [125-27] = \frac{49}{2}.$$

Algo más complicada es la integral que aparece para  $f(x, y, z) = xyz$ :

$$\int_0^2 3t^3\sqrt{9+4t^2} \, dt \stackrel{s=t^2}{=} \frac{3}{2} \int_0^4 s\sqrt{9+4s} \, ds \stackrel{u}{=} \frac{1059}{20} \quad [\bullet \text{ partes o cambio } \sqrt{9+4s}=u].$$



Interpretemos estas integrales. Sea primero  $f \equiv 1$ . Si pensamos que  $\mathbf{c}(t)$  describe una partícula en movimiento, al ser  $\|\mathbf{c}'(t)\|$  la velocidad escalar en el instante  $t$ , parece claro que  $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt$  ('diferencial de arco') será la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo  $dt$ ' y por tanto:

$$L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt \text{ representa la longitud de la curva } C \text{ definida por } \mathbf{c}.$$

Antes de los ejemplos, veamos la forma que adopta la fórmula para curvas planas en cartesianas o polares:

**Teor 2.** Si  $C$  es la gráfica de  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , su longitud es  $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$ .  
 Cuando  $C$  viene dada por  $r = f(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$ , será  $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$ .

La primera es obvia a partir la parametrización habitual  $\mathbf{c}(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in [a, b]$ .

[La fórmula, desde luego, es totalmente análoga para curva dada por  $x = g(y)$ ].

La segunda:  $\mathbf{c}(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta)$ ,  $\mathbf{c}'(\theta) = (f' \cos \theta - f \sin \theta, f' \sin \theta + f \cos \theta)$

$$\rightarrow \|\mathbf{c}'(\theta)\| = \sqrt{f^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (f')^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \sqrt{f^2 + (f')^2}.$$

El primer ejemplo es otro de los pocos en los que se puede calcular una longitud mediante integrales sencillas.

**Ej 4.** Hallemos la longitud de la curva descrita por  $\mathbf{c}(t) = (2t^2, t^3)$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

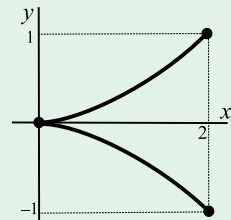
$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{16t^2+9t^4}, \quad L = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{16+9t^2} \, dt = \frac{2}{27} (16+9t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{122}{27} \approx 4.52.$$

O con parametrización cartesiana de la misma curva (y utilizando su simetría):

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}, \quad x \in [0, 2] \Rightarrow L = 2 \int_0^2 \sqrt{1+\frac{9x}{32}} \, dx = \frac{128}{27} \left(1+\frac{9x}{32}\right)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{2}{27} [125-64].$$

[Lleva a cálculos más largos la otra cartesiana basada en  $x = 2y^{2/3}$ ].

[Cuando  $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$  podían aparecer **picos** en las curvas, por no tener el vector tangente dirección definida].



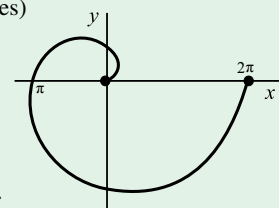
En estos aparecen integrales largas, pero calculables:

**Ej 5.** La longitud de la curva en polares  $r = \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  (espiral de Arquímedes) será, según la fórmula segunda del teorema 2:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1} \, d\theta. \text{ Primitiva calculable haciendo } u = \theta + \sqrt{\theta^2+1}, \text{ pues:}$$

$$u^2 - 2u\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{u^2-1}{2u}, \quad d\theta = \frac{(u^2+1)du}{2u^2}, \quad \sqrt{\cdot} = u - \theta = \frac{(u^2+1)}{2u} \rightarrow$$

$$\int \left[ \frac{u}{4} + \frac{1}{4u^3} + \frac{1}{2u} \right] du \rightarrow L = \frac{1}{2} \left[ \theta\sqrt{\theta^2+1} + \ln|\theta + \sqrt{\theta^2+1}| \right]_0^{2\pi} \approx 21.3.$$



**Ej 3\*.** La longitud de la curva del ejemplo 3 conduce en esencia a la misma primitiva que el anterior:

$$L = \int_0^2 \sqrt{9+4t^2} \, dt = \left[ \frac{t}{2} \sqrt{9+4t^2} + \frac{9}{4} \ln(2t + \sqrt{9+4t^2}) \right]_0^2 = 5 + \frac{9}{4} \ln 3 \approx 7.47.$$

[También se pueden hacer estas primitivas con cambios de variable que utilizan funciones hiperbólicas].

Pero en la mayoría de los casos aparecen primitivas no calculables y se necesita integración aproximada de algún tipo, como ocurre con la parábola cúbica  $y = x^3$  o con el cálculo de la longitud de cualquier elipse:

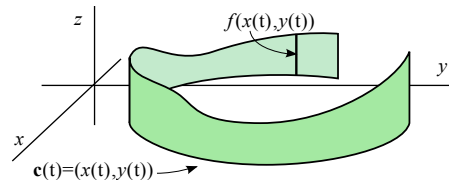
**Ej 6.**  $\mathbf{c}(t) = (t, t^3)$ ,  $t \in [0, 1] \rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1+9t^4} \, dt \approx 1.55.$

$\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, \sin t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi] \rightarrow L = 2 \int_0^\pi \sqrt{1+3 \sin^2 t} \, dt \approx 9.69.$

[No tiene ninguna de las dos primitiva elemental].

Si ahora  $f$  es cualquier campo con  $f(\mathbf{c}(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ ,  $\int_C f ds$  representa para  $n=2$  el **área de la valla** de altura  $f(x, y)$  en cada  $(x, y)$  de la curva  $C$ , pues un 'diferencial de valla' tiene área  $f(\mathbf{c}(t)) ds = f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$ .

[Si  $f$  no tiene signo definido, será la diferencia entre las áreas de las vallas que queden por encima y por debajo de  $z=0$ ].



Tiene otra posible interpretación válida para  $n=2$  o para  $n=3$ . Si  $\mathbf{c}(t)$  describe un alambre de densidad variable dada por  $\sigma(\mathbf{x})$ , la **masa del alambre** será:  $M = \int_C \sigma ds$  (tanto en el plano como en el espacio).

El **centro de gravedad** (centroide si  $\sigma$  constante) del alambre, tendrá por coordenadas:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x \sigma ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y \sigma ds; \quad \text{si } n=3, \text{ además } \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z \sigma ds.$$

Y en general, también sirven para hallar el **valor medio** de cualquier  $f$  sobre  $C$ :  $\bar{f} = \frac{1}{L} \int_C f ds$ .

Hacemos un sencillo primer ejemplo de integral sobre curva  $C^1$  sólo a trozos e interpretamos el resultado:

**Ej 7.** Integremos  $f(x, y) = x - y$  sobre la curva  $C^1$  a trozos  $\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (0, 1-t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 0), & t \in [1, 2] \end{cases}$ .

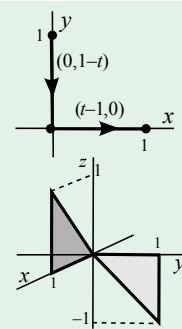
Integramos sobre cada segmento y sumamos el resultado.

Sobre el vertical,  $f(\mathbf{c}_1(t)) = t-1$ ,  $\|\mathbf{c}'_1(t)\| = 1 \rightarrow \int_{c_1} f ds = \int_0^1 (t-1) dt = -\frac{1}{2}$ .

Sobre el otro,  $f(\mathbf{c}_2(t)) = t-1$ ,  $\|\mathbf{c}'_2(t)\| = 1$ ,  $\int_{c_2} f ds = \int_1^2 (t-1) dt = \frac{1}{2}$ .

La integral total es, por tanto:  $\int_C f ds = \int_{c_1} + \int_{c_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ .

[El área de la valla positiva sobre el eje de las  $x$  se cancela con el área negativa de la valla bajo el eje de las  $y$ ].



Otras de las curvas para las que  $\|\mathbf{c}'\|$  lleva a cálculos sencillos son las hélices:

**Ej 8.** Sea el alambre en forma de hélice:  $\mathbf{c}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $t \rightarrow (\cos t, \sin t, t)$  y de densidad  $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Como  $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{2}$ , se tiene que:

Su longitud es  $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.9$ .

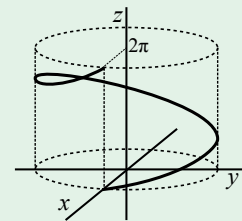
Su masa será  $M = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) dt = \sqrt{2} (2\pi + \frac{8}{3}\pi^3) \approx 125.8$ .

[Su densidad media es, por tanto:  $1 + \frac{4}{3}\pi^2 \approx 14.2$ ].

Su centro de gravedad:  $\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \cos t (1+t^2)\sqrt{2} dt = \frac{6}{3+4\pi^2} \approx 0.014$ ,

$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \sin t (1+t^2)\sqrt{2} dt = -\frac{6\pi}{3+4\pi^2} \approx -0.44$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} t (1+t^2)\sqrt{2} dt = 3\pi \frac{1+2\pi^2}{3+4\pi^2} \approx 4.60$ .

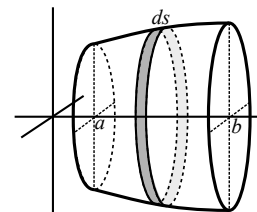
Y su centroide:  $\bar{x} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \cos t \sqrt{2} dt = 0$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \sin t \sqrt{2} dt = 0$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} t \sqrt{2} dt = \pi$ .



Otra aplicación de este tipo de integrales de  $f$  escalares. Si una curva  $C$  viene dada por  $x=x(t)$ ,  $y=y(t) \geq 0$ ,  $t \in [a, b]$ , el **área de la superficie de revolución** obtenida al hacer girar  $C$  en torno al eje  $y=0$  es:

$$A = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

[pues el área de la banda de anchura  $ds$  es  $\approx 2\pi y ds$ ].



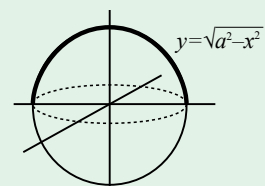
En el caso particular de que  $C$  sea la gráfica de  $y=y(x)$  queda:  $A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} dx$ .

**Ej 9.** Hallemos el área de la superficie esférica de radio  $a$ .

Se puede ver como el giro de  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  en torno a  $y=0$ , y por tanto:

$$A = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{-x^2}{a^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-a}^a a dx = 4\pi a^2.$$

O con  $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ :  $A = 2\pi \int_0^\pi a \sin t a dt = 4\pi a^2$ .



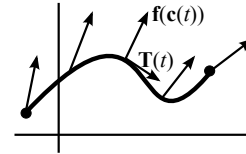
## 5.2. Integrales de campos vectoriales y de gradientes.

Sean  $\mathbf{c}(t): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  de  $C^1$  y  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  campo vectorial continuo sobre la gráfica de  $\mathbf{c}$ . La integral de línea del campo  $\mathbf{f}$  a lo largo de  $\mathbf{c}$  se define  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt$ . Si  $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$  es sólo continua a trozos, dividimos el intervalo y sumamos la integrales.

Si  $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t$  será  $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$  es el vector tangente unitario, y así:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds.$$

Puede verse la integral de línea de  $\mathbf{f}$  como la integral del campo escalar  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$ , componente tangencial de  $\mathbf{f}$  en la dirección de  $\mathbf{c}$ . Por tanto:



$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas  $\mathbf{f}$  sobre la partícula que recorre  $\mathbf{c}$ .

Se usa otra **notación** (la damos para el plano). Si  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ :

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [f(x(t), y(t)) x'(t) + g(x(t), y(t)) y'(t)] dt \equiv \int_{\mathbf{c}} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

[La notación es similar para  $n > 2$ . ¡Cuidado!, pese a su aspecto sigue siendo integral de línea].

**Ej 1.** Calculemos varias integrales del línea del campo  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 2y+x)$  sobre distintos caminos. Los tres primeros describen el mismo segmento (el tercero en sentido contrario).

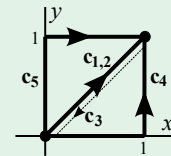
$$\mathbf{c}_1(t) = (t, t), t \in [0, 1] \rightarrow \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, 3t) \cdot (1, 1) dt = \frac{11}{6},$$

$$\mathbf{c}_2(t) = (4t^2, 4t^2), t \in [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (16t^4, 12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = \frac{11}{6},$$

$$\mathbf{c}_3(t) = (1-t, 1-t), t \in [0, 1] \rightarrow \int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t)^2, 3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = -\frac{11}{6}.$$

$$\mathbf{c}_4(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, 1] \\ (1, t-1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t^2, 2t-1) \cdot (0, 1) dt = \frac{7}{3}.$$

$$\mathbf{c}_5(t) = \begin{cases} (0, t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, 2t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 ((t-1)^2, 2+t) \cdot (1, 0) dt = \frac{5}{6}.$$



[La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre; para algunos campos no va a depender siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final].

**Ej 2.** Hallemos la integrales para los mismos  $\mathbf{c}_k$  de arriba, pero ahora para el campo  $\mathbf{g}(x, y) = (y, x-4y)$ :

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -3t) \cdot (1, 1) dt = -\int_0^1 2t dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (4t^2, -12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = -\int_0^{1/2} 16t^3 dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t), -3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 2(1-t) dt = 1 \text{ [única distinta].}$$

$$\int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t-1, 5-4t) \cdot (0, 1) dt = \int_1^2 (5-4t) dt = -1.$$

$$\int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -4t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 (1, t-5) \cdot (1, 0) dt = -\int_0^1 4t dt + 1 = -1.$$

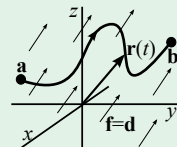
**Ej 3.** Para  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1)$ , es la integral  $\int_{\mathbf{c}} zx^2 dx + xy dy + y^3 dz = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^3 \cdot 2t + t^6 \cdot 0) dt = \frac{11}{15}$ .

**Ej 4.** Hallemos el trabajo realizado por una fuerza constante  $\mathbf{f} = \mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$  al recorrer una partícula una trayectoria  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  que une dos puntos del espacio  $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$ :

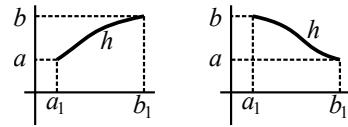
$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt = d_1(x(b)-x(a)) + d_2(y(b)-y(a)) + d_3(z(b)-z(a)) \\ &= \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \text{ independiente del camino } \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Para  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{r}(a+b-t)$ ,  $t \in [a, b]$ , que describe esa curva en sentido opuesto, el

trabajo es  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (-x'(t), -y'(t), -z'(t)) dt = -\mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ .



Veamos lo que sucede con la integral al hacer un cambio en el parámetro que describe la curva  $C$ . Sea  $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  y  $h: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$  una biyección  $C^1$ . Si llamamos  $\mathbf{r} = \mathbf{c} \circ h: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , las trayectorias  $\mathbf{r}(s)$ ,  $s \in [a_1, b_1]$  y  $\mathbf{c}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , describen la misma curva, en el mismo sentido o en el opuesto según sea, respectivamente,  $h(a_1) = a$ ,  $h(b_1) = b$  o  $h(a_1) = b$ ,  $h(b_1) = a$  [la reparametrización conserva o invierte la orientación de  $C$ ].



**Teor 1.** Si  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{r}$  describen la misma curva  $C$ , entonces según  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{r}$  lo hagan en el mismo sentido o en el opuesto se tiene, respectivamente:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \text{ o bien } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$$

Si  $C$  es  $C^1$  (si no, dividimos y sumamos las integrales), como  $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{c}'(h(s)) h'(s)$  es:

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{f}(\mathbf{c}(h(s))) \cdot \mathbf{c}'(h(s)) h'(s) ds \text{ e } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt.$$

Haciendo en la integral de la izquierda  $h(s) = t$ , se tiene + o - la de la derecha, según se conserve o no la orientación, pues no cambian o sí los límites de integración.

Si estuviésemos integrando un **campo escalar**  $f$ , se tendría siempre que:

$$\int_{\mathbf{r}} f ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{c}(h(s))) \|\mathbf{c}'(h(s))\| |h'(s)| du = \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} f ds,$$

y con esto tenemos probado el teorema de la sección anterior.

**La integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva  $C$  y el sentido en que se recorre** (la un campo escalar sólo de  $C$ ). Podemos elegir las  $\mathbf{c}$  más sencillas para calcularlas.

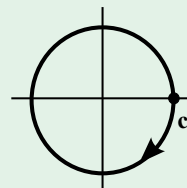
**Ej 5.** Tiene un sentido preciso hablar de la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$  a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

[Las integrales sobre curvas cerradas suelen representarse con el símbolo  $\oint$ ].

Eligiendo  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, -\sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  (o  $[-\pi, \pi]$ , o ...),

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi.$$

Con cualquier otra parametrización que proporcionase el mismo sentido se llegaría a lo mismo.



**Ej 6.** Calculemos la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, e^y, xy)$  desde el punto  $(1, 0, 0)$  hasta el  $(1, 2, 3)$  a lo largo del segmento que une los puntos.

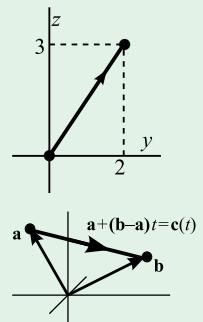
Hay muchas formas de parametrizar un segmento en el espacio. Para este, con  $x = 1$  constante, una  $\mathbf{c}$  casi salta a la vista:  $\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

[O también, con el dibujo de la derecha:  $\mathbf{c}_*(y) = (1, y, \frac{3}{2}y)$ ,  $y \in [0, 2]$ ].

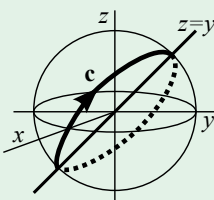
En general, vimos en 1.1 que  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t$ ,  $t \in [0, 1]$  da el segmento que une  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , pues es una recta, si  $t = 0$  estamos en  $\mathbf{a}$  y si  $t = 1$  en  $\mathbf{b}$ .

Calculemos ya la integral pedida (con la primera parametrización dada):

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (3t, e^{2t}, 2t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 (2e^{2t} + 6t) dt = e^2 + 2.$$



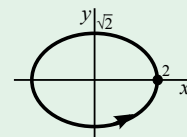
**Ej 7.** Halleemos el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$  a lo largo de la curva  $C$  intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y el plano  $z = y$ , si  $C$  es recorrida de modo que, vista desde las  $z$  positivas, el sentido es contrario a las agujas del reloj.



Sobre  $C$ , como  $z = y$ , es  $x^2 + 2y^2 = 4$  (elipse).

$$\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} (0, \sqrt{2} \sin t - 2 \cos t, 2 \cos t - \sqrt{2} \sin t) \cdot (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \quad (\text{el campo es perpendicular a la trayectoria}). \end{aligned}$$



[Se verá más adelante que serán 0 las integrales sobre un camino cerrado de los campos que sean gradientes de un campo escalar; pero, a pesar de ser  $\oint_C = 0$ , este campo no lo será, pues  $\text{rot } \mathbf{f} = (-2, -2, -2) \neq \mathbf{0}$ ].

## Integrales de gradientes

Generalicemos ahora el 2° teorema fundamental del cálculo infinitesimal  $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$ .

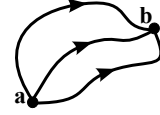
**Teor 2.** Sea  $U: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  un campo escalar  $C^1$  y  $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  un camino  $C^1$  a trozos.  
Entonces:  $\int_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ .

Si  $\mathbf{c} \in C^1$  (si no, dividimos),  $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b (U \circ \mathbf{c})'(t) dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ .  
regla de la cadena  $\uparrow$

Por tanto, **la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final.** Si sabemos que un campo es un gradiente, su integral

pasa a ser sencilla. Además, si  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ , la curva descrita por  $\mathbf{c}$  es cerrada e

$\oint_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = 0$ : **la integral de línea de un gradiente a lo largo de cualquier curva cerrada es 0.**



Si un campo vectorial  $\mathbf{f}$  es gradiente de alguna función  $U$ , a  $U$  se le llama **función potencial para  $\mathbf{f}$** , y se dice que el campo  $\mathbf{f}$  es **conservativo**.

¿Cómo saber si un  $\mathbf{f}$  es conservativo? Condiciones necesarias sencillas para  $n=2$  y  $n=3$  son:

**Teor 3.** Si  $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  de  $C^1$  es conservativo  $\Rightarrow f_y \equiv g_x$ .  
Si  $\mathbf{f}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$  de  $C^1$  es conservativo  $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ .

Si  $\mathbf{f} = (f, g) = (U_x, U_y) = \nabla U$ , con  $U \in C^2$ , por la igualdad de Schwartz de las derivadas cruzadas  $[U_{xy} = U_{yx}]$  debe ser  $f_y \equiv g_x$ . Y el mismo argumento se aplica para  $n=3$ .

Si las derivadas cruzadas no coinciden, no puede  $\mathbf{f}$  derivar de un potencial. Cuando son iguales, es muchas veces sencillo hallar una  $U$  tal que  $\nabla U = \mathbf{f}$ . Aunque pronto veremos con un contraejemplo que **la implicación  $\Leftarrow$  no es cierta en general.**

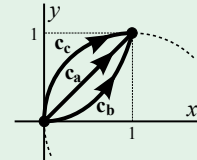
**Ej 8.** Sea  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2xy)$ . Hallemos la integral entre  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  a lo largo de diferentes curvas:  
a) la recta que une los puntos, b) la parábola  $y = x^2$ , c) la circunferencia  $x^2 + y^2 = 2x$ .

Posibles parametrizaciones: a)  $\mathbf{c}_a = (t, t)$ , b)  $\mathbf{c}_b = (t, t^2)$ , c)  $\mathbf{c}_c = (t, \sqrt{2t - t^2})$ , con  $t \in [0, 1]$  todas.

Las integrales en cada caso son:

$$a) \int_0^1 (t^2, 2t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1, \quad b) \int_0^1 (t^2, 2t^3) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1,$$

$$c) \int_0^1 (2t - t^2, 2t\sqrt{2t - t^2}) \cdot \left(1, \frac{1-t}{\sqrt{2t - t^2}}\right) dt = \int_0^1 (4t - 3t^2) dt = 1.$$



Como se cumple  $\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$ , esto nos hace sospechar que  $\mathbf{f}$  es un campo conservativo.

Es fácil en este caso identificar una función potencial (y habremos probado que lo es):

Si  $U_x = y^2$ , debe ser  $U = xy^2 + p(y)$  para alguna función  $p \Rightarrow U(x, y) = xy^2$ .

Si  $U_y = 2xy$ , debe ser  $U = xy^2 + q(x)$  para alguna función  $q$

$[U = xy^2 + C$  para cualquier constante  $C$  es también potencial, desde luego].

Por tanto, todas las parametrizaciones y cálculos de integrales anteriores han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer  $U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1$ .

Por no depender del camino, hay otras formas de calcular una  $U$ : eligiendo caminos sencillos que unan el origen con el punto  $(x, y)$  y evaluando la integral de línea. Por ejemplo, con el  $C^1$  a trozos:

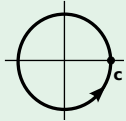
$$\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, x] \\ (x, t), & t \in [0, y] \end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^x (0, 0) \cdot (1, 0) dt + \int_0^y (t^2, 2xt) \cdot (0, 1) dt = xy^2.$$

Haciendo lo mismo para un  $\mathbf{f} = (f, g)$  general, obtendríamos:  $\int_0^x f(t, 0) dt + \int_0^y g(x, t) dt = U(x, y)$ .

Veamos qué campos de los vistos hasta ahora son conservativos. El  $(x^2, 2y+x)$  del 1 no lo es por ser  $f_y = 0 \neq 1 = g_x$ . El  $(y, x-4y)$  del 2 sí:  $1 \equiv 1$  y  $U = xy - 2y^2$  es su potencial. No lo es el del 3,  $(zx^2, xy, y^3)$  por no ser  $\text{rot } \mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ . El  $\mathbf{f} = \mathbf{d}$  del 4 sí lo es [con  $U = (d_1x, d_2y, d_3z)$ ]. El  $(y, 0)$  del 5 no: vimos que su integral sobre un camino cerrado era no nula y también lo asegura  $1 \neq 0$ . Para 6 y 7 el  $\text{rot } \mathbf{f}$  es, respectivamente,  $(x, 1-y, 0)$  y  $(-2, -2, -2)$  y no pueden derivar de una función potencial  $U$ .

En el siguiente ejemplo la integral a lo largo de un camino cerrado resulta ser no nula, a pesar de ser iguales las derivadas  $f_y$  y  $g_x$ :

**Ej 9.** Calculemos la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$  a lo largo de  $x^2+y^2=1$  en sentido antihorario.



Si  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi$ .

Como esta integral no es 0, no puede haber un potencial  $U \in C^1$  que contenga la curva.

Y, sin embargo, coinciden las derivadas cruzadas:  $f_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = g_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$ .

Por tanto, **no es suficiente la igualdad de las derivadas cruzadas para ser conservativo.**

Pero hay que pedir muy poco más al campo  $\mathbf{f}$  para que sí baste. [Aceptamos los dos teoremas que faltan de esta sección, pues son más difíciles de demostrar y necesitan el teorema de Stokes de 6.2].

**Teor 4.** Si  $\mathbf{f}$  es  $C^1$  en todo  $\mathbf{R}^2$  [ $\mathbf{R}^3$ ] y  $f_y \equiv g_x$  [ $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ ]  $\Rightarrow \mathbf{f}$  es conservativo.

[El campo  $\mathbf{f} \in C^1$  del ejemplo 8 sabemos ahora que es conservativo desde que vimos que  $f_y \equiv g_x$ . Para el 9,  $\mathbf{f}$  no era  $C^1$  en  $(0,0)$ , el teorema no dice que haya potencial, y no lo hay en todo  $\mathbf{R}^2$ ].

Hacemos ahora nuestro primer ejemplo en  $\mathbf{R}^3$ :

**Ej 6\*.** Calculemos la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (4x, 3z-2y, 3y)$  desde  $(1, 0, 0)$  hasta  $(1, 2, 3)$  a lo largo del segmento que une los puntos.

En el ejemplo 6 ya parametrizamos el segmento, y podemos hallar la integral directamente:

$$\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t), t \in [0, 1] \rightarrow \int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (1, 5t, 6t) \cdot (0, 2, 3) dt = 14.$$

Pero para este campo se cumple que  $\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4x & 3z-2y & 3y \end{vmatrix} = (3-3)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (0-0)\mathbf{k} = \mathbf{0}$ .

Además, obviamente  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbf{R}^3)$ . Existe, pues, una función potencial  $U(x, y, z)$  para el campo  $\mathbf{f}$ .

Los cálculos de los potenciales en  $\mathbf{R}^3$  son similares a los de  $\mathbf{R}^2$ :

$$\begin{aligned} U_x = 4x &\rightarrow U = 2x^2 + p(y, z) \\ \text{Debe ser } U_y = 3z-2y &\rightarrow U = 3yz - y^2 + q(x, z), \quad U = 2x^2 + 3yz - y^2 \Rightarrow \\ U_z = 3y &\rightarrow U = 3yz + r(x, y) \end{aligned} \quad \int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U(1, 2, 3) - U(1, 0, 0) = 16 - 2 = 14.$$

Este es el valor de la integral sobre cualquier camino que una los puntos, por complicado que sea.

Por ejemplo, hallemos la integral a lo largo de  $\mathbf{c}_*(t) = (e^{t-t^2}, 2t^3, 3t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \int_{c_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 (4e^{t-t^2}, 9t^2-4t^3, 6t^3) \cdot ((1-2t)e^{t-t^2}, 6t^2, 6t) dt = \int_0^1 (2(2-4t)e^{2t-2t^2} + 90t^4 - 24t^5) dt \\ &= 2e^{2t-2t^2} + 18t^5 - 4t^6 \Big|_0^1 = 14. \end{aligned}$$

El teorema 3 se puede refinar exigiendo hipótesis menos fuertes. No es preciso que  $\mathbf{f}$  sea  $C^1$  en todo  $\mathbf{R}^2$  o  $\mathbf{R}^3$ . Basta que lo sea en un conjunto  $D$  'simplemente conexo': toda curva cerrada contenida en el  $D$  conexo ('de una sola pieza') debe poder contraerse a un punto de forma continua sin salir del  $D$  (en el ejemplo 2 no se puede). En  $\mathbf{R}^2$  esto significa que  $D$  no tiene 'agujeros'. En  $\mathbf{R}^3$ , puntos sueltos de discontinuidad no molestan, pero sí, por ejemplo, no serlo en toda una recta.

**Ej 9\*.** En  $D = \{x > 0\}$  sí debe existir potencial  $U$  para  $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ .

Escribiendo  $\left(\frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}, \frac{1/x}{1+(y/x)^2}\right)$ , es claro que lo es  $U(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ .

Sobre cualquier curva cerrada contenida en  $D$  la integral sí debe ser nula.

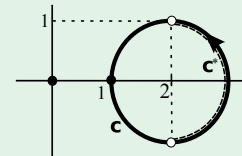
Por ejemplo, sobre la circunferencia  $\mathbf{c}(t) = (2+\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi] \rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{-s}{5+4c}, \frac{2+c}{5+4c}\right) \cdot (-s, c) dt = \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{3}{5+4\cos t}\right) dt = \left[s = \tan \frac{t}{2}\right] = \pi - \int_0^{\infty} \frac{3 ds}{9+s^2} = \pi - \left[2 \arctan \frac{s}{3}\right]_0^{\infty} = 0.$$

La  $U$  da el valor de otras integrales, por ejemplo, de  $(2, -1)$  hasta  $(2, 1)$  será  $\int_{c_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 2 \arctan \frac{1}{2}$ .

Retocando el cálculo de arriba se llega al valor  $\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{1}{3} \approx 0.93$ , que coincide con el anterior,

ya que  $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ , puesto que  $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \Rightarrow \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \cdot 1/3} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$ .



En este ejemplo hay una  $\mathbf{f}$  discontinua que, sin embargo, deriva de un potencial  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ .

**Ej 10.** Hallemos directamente la integral de línea de  $\mathbf{f}(x, y) = (5 - \frac{x}{x^2+y^2}) \mathbf{i} - \frac{y}{x^2+y^2} \mathbf{j}$ , entre  $(-1, 1)$  y  $(1, 1)$ , siguiendo el tramo más corto de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 2$ . ¿Existe función potencial  $U$  para  $\mathbf{f}$ ?

La parametrización más sencilla  $\mathbf{c}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$ ,  $t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow$

$$\int_{3\pi/4}^{\pi/4} (5 - \frac{\sqrt{2} \cos t}{2}, -\frac{\sqrt{2} \sin t}{2}) \cdot \sqrt{2} (-\sin t, \cos t) dt = 5\sqrt{2} \cos t \Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} = 10.$$

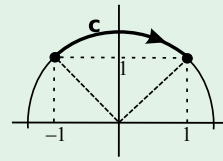
Es claramente  $f_y = g_x = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$ , pero como sólo  $\mathbf{f}$  es  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , conjunto plano con agujero, podría no existir una función potencial global.

Pero salta a la vista nuestra  $U(x, y) = 5x - \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ . Comprobamos la integral con ella:

$$\int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U(1, 1) - U(-1, 1) = 5 - \frac{1}{2} \log 2 + 5 + \frac{1}{2} \log 2 = 10.$$

A lo largo de la circunferencia completa la existencia de la  $U$  nos asegura que la integral es nula.

También es claro, mirando la integral de arriba, que directamente se tendría  $5\sqrt{2} \cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ .



Y también es conservativo este campo (gravitatorio) del espacio, discontinuo sólo en el origen:

**Ej 11.** Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \mathbf{i} - y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \mathbf{j} - z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \mathbf{k}$ .

$\mathbf{f}$  es  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ , que es simplemente conexo en el espacio. Debe, pues, existir  $U$ .

Se ve casi a ojo:  $U(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ . [En esféricas es  $U = \frac{1}{\rho}$  y  $\mathbf{f} = -\frac{1}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho = f_\rho \mathbf{e}_\rho$ ].

La integral a lo largo de cualquier camino  $\mathbf{c}$  entre  $(0,0,1)$  y  $(1,2,2)$  será  $\int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ .

Por ejemplo debemos obtener este valor siguiendo el segmento  $\mathbf{c}(t) = (t, 2t, 1+t)$ ,  $t \in [0, 1]$ :

$$\mathbf{c}'(t) = (1, 2, 1), \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) = -(4t^2 + t^2 + (t+1)^2)^{-3/2} (t, 2t, t+1) \rightarrow$$

$$\int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 -(6t+1)(6t^2+2t+1)^{-3/2} dt = \left[ (6t^2+2t+1)^{-1/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

Concluamos nuestra teoría sobre los sistemas conservativos admitiendo este resultado general:

Sea  $\mathbf{f}$  continua en  $D \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Entonces son equivalentes las afirmaciones:

**Teor 5.**

- $\mathbf{f}$  es gradiente de una función potencial  $U$  en  $D$ .
- La integral de línea de  $\mathbf{f}$  es independiente del camino en  $D$ .
- La integral de  $\mathbf{f}$  a lo largo de todo camino cerrado contenido en  $D$  es nula.

Que la integral de un campo sobre un camino cerrado se anule no significa, desde luego, que ese campo sea conservativo. El teorema anterior pide que lo sea sobre **todo** camino cerrado.

**Ej 12.** Calculemos la integral de línea de  $\mathbf{f}(x, y) = (1, x^2)$  a lo largo de la circunferencia  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ , recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj. ¿Deriva  $\mathbf{f}$  de un potencial?

La parametrización más sencilla es  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 1 + \sin t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ . Con ella

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1, \cos^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} [c(1-s^2) - s] dt = [s + c - \frac{1}{3}s^3]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Pero claramente no es conservativo, pues  $g_x - f_y = 2x \neq 0$ . Así pues, se debe poder encontrar algún camino cerrado para el que la integral del campo no se anule.

Tanteando un poco (o mirando en el teorema de Green de 5.3) podemos encontrar, por ejemplo:

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t), t \in [-\pi, \pi] \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [c + 2c^2 + c^3 - s] dt = 2\pi \neq 0.$$

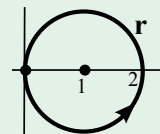
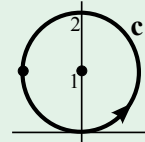
Perdamos bastante tiempo volviendo a calcular la última integral en cartesianas.

La circunferencia  $x^2 - 2x + y^2 = 0$  lleva a dos funciones distintas  $y = \pm \sqrt{2x - x^2}$ .

Y a dos parametrizaciones:  $\mathbf{r}_1(x) = (x, -\sqrt{2x - x^2})$ ,  $x \in [0, 2]$  (parte inferior)

$\mathbf{r}_2(x) = (x, \sqrt{2x - x^2})$ ,  $x \in [0, 2]$  (en sentido opuesto)

$$\text{A partir de ellas: } \int_0^2 (1, x^2) \cdot (1, \frac{x-1}{\sqrt{\cdot}}) dx - \int_0^2 (1, x^2) \cdot (1, \frac{1-x}{\sqrt{\cdot}}) dx = \int_0^2 \frac{2x^2(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \dots = 2\pi.$$





Para acabar la sección hacemos dos ejemplos más, provenientes de exámenes, para repasar las integrales de línea de escalares, de vectoriales, de gradientes y, también, temas anteriores.

**Ej 13.** Sea  $f(x, y, z) = y$ . a) Calcular  $\iiint_V f$ , para  $V$  sólido acotado en  $x, y \geq 0$  por  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 2$ .

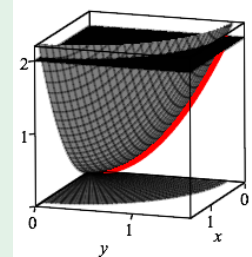
b) Si  $C$  es el corte de  $z = x^2 + y^2$  con  $x = 0$ , para  $y \geq 0, 0 \leq z \leq 2$ , parametrizar la curva  $C$  y hallar:

i)  $\int_C f \, ds$ , ii)  $\int_C \nabla f \cdot ds$ , en el sentido las  $z$  crecientes.

a) Paraboloides y plano se cortan cuando  $x^2 + y^2 = 2$ . Cilíndricas o cartesianas:

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^2 r^2 \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} (2r^2 - r^4) \, dr \\ &= \left[ \frac{2}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{15} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 y \, dz \, dy \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2y - x^2 y - y^3) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left( 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} \right) dx = \frac{8}{15} \sqrt{2}. \end{aligned}$$



b) Parametrizaciones de  $C$ :  $\mathbf{c}(t) = (0, t, t^2)$ ,  $t \in [0, \sqrt{2}]$  o  $\mathbf{c}_*(t) = (0, \sqrt{t}, t)$ ,  $t \in [0, 2]$ .

i)  $\mathbf{c}'(t) = (0, 1, 2t)$ ,  $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{1+4t^2}$ ,  $\int_C f \, ds = \int_0^{\sqrt{2}} t (1+4t^2)^{1/2} dt = \frac{1}{12} (1+4t^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}$ .

$\mathbf{c}'_*(t) = (0, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 1)$ ,  $\|\mathbf{c}'_*\| = \sqrt{\frac{1}{4t} + 1}$ ,  $\int_C f \, ds = \int_0^2 \frac{1}{2} (1+4t)^{1/2} dt = \frac{1}{12} (1+4t)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{13}{6}$ .

ii)  $\int_C \nabla f \cdot ds = f(0, \sqrt{2}, 2) - f(0, 0, 0) = \sqrt{2}$ . Así de corto, aunque comprobamos con la definición:

$$\int_0^{\sqrt{2}} (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 2t) \, dt = \int_0^{\sqrt{2}} (0, 1, 0) \cdot (0, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 1) \, dt = \sqrt{2}.$$

**Ej 14.** Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2, 2xy, -2z)$ . a) Hallar  $\text{div } \mathbf{f}$ ,  $\text{rot } \mathbf{f}$ ,  $\nabla(\text{div } \mathbf{f})$  y  $\Delta(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f})$ . ¿Es  $\mathbf{f}$  conservativo?

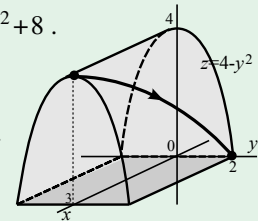
b) Calcular  $\iiint_V \text{div } \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz$ , con  $V$  sólido acotado por  $z = 4 - y^2$  y los planos  $x = 0$ ,  $x = 3$  y  $z = 0$ .

c) Hallar la integral de línea de  $\mathbf{f}$  de  $(3, 0, 4)$  a  $(0, 2, 0)$  sobre la curva  $\mathbf{c}(t) = (3 - \frac{3t}{2}, t, 4 - t^2)$ ,  $t \in [0, 2]$ .

a)  $\text{div } \mathbf{f} = 2x - 2$ .  $\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & xy & -2z \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (2y - 2y)\mathbf{k} = (0, 0, 0) \xrightarrow{\mathbf{f} \in C^1} \mathbf{f}$  deriva de un potencial.  
 $\nabla(\text{div } \mathbf{f}) = (2, 0, 0)$ .  $\Delta(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) = \Delta(y^4 + 4x^2 y^2 + 4z^2) = 20y^2 + 8x^2 + 8$ .

b)  $z = 4 - y^2$  corta  $z = 0$  en las rectas  $y = \pm 2$ .  $V$  es el del dibujo. Por tanto:

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{f} = \int_0^3 \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} (2x-2) \, dz \, dy \, dx = \int_0^3 (2x-2) \, dx \int_{-2}^2 (4-y^2) \, dy = 32.$$



c) Por ser conservativo, podemos hallar la integral hallando el potencial  $U$ :

$$U_x = y^2 \rightarrow U = xy^2 + p(y, z)$$

$$U_y = 2xy \rightarrow U = xy^2 + q(x, z), \quad U = xy^2 - z^2 \Rightarrow \int_C \mathbf{f} \cdot ds = U(0, 2, 0) - U(3, 0, 4) = 16.$$

$$U_z = -2z \rightarrow U = -z^2 + r(x, y)$$

O directamente:  $\int_C \mathbf{f} \cdot ds = \int_0^2 (t^2, 6t - 3t^2, 2t^2 - 8) \cdot (-\frac{3}{2}, 1, -2t) \, dt = \int_0^2 (22t - \frac{9}{2}t^2 - 4t^3) \, dt = 16$ .

O hallar la integral siguiendo un camino más sencillo, por ejemplo el segmento que une los puntos:

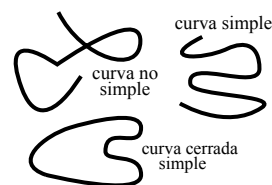
$$\mathbf{c}^*(t) = (3, 0, 4) + t[(0, 2, 0) - (3, 0, 4)] = (3 - 3t, 2t, 4 - 4t), \quad t \in [0, 1] \rightarrow$$

$$\int_0^1 (4t^2, 12t - 12t^2, 8t - 8) \cdot (-3, 2, -4) \, dt = \int_0^1 (32 - 8t - 36t^2) \, dt = 16.$$

### 5.3. Teoremas de Green y de la divergencia en el plano

Ambos van a relacionar **integrales dobles** e **integrales de línea** sobre **curvas cerradas en el plano**. (Veremos otros similares en el capítulo 6 siguiente con integrales de campos en  $\mathbf{R}^3$ . De hecho, se podrán mirar estos como casos particulares de aquellos).

Una **curva simple** será la imagen de una  $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $C^1$  a trozos e **inyectiva**. Si además es  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ , se le llama **curva cerrada simple**. Una curva de estas puede recorrerse en dos sentidos diferentes. Para indicar que se recorre en sentido antihorario escribiremos la integral  $\oint$ .



#### Teorema de Green:

Sea  $D \subset \mathbf{R}^2$  limitado por  $\partial D$  curva cerrada simple y el campo  $\mathbf{f} = (f, g) \in C^1(D)$ . Entonces:

$$\iint_D [g_x - f_y] dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \equiv \oint_{\partial D} f dx + g dy.$$

[Obsérvese que si  $\mathbf{f}$  es conservativo, el teorema de Green dice  $0 = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  como debía ser].

El caso de que  $D$  fuese del primer tipo de recintos que consideramos para las integrales dobles:  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$  se tendría:

$$-\iint_D f_y dx dy = -\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x, y) dy dx = \int_a^b [f(x, c(x)) - f(x, d(x))] dx.$$

Parametrizando los cuatro tramos de la frontera:

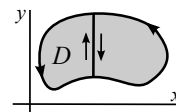
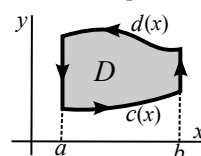
$$(x, c(x)), x \in [a, b]; (b, y), y \in [c(b), d(b)]; (x, d(x)), x \in [a, b]; (a, y), y \in [c(a), d(a)] \rightarrow$$

$$\oint_{\partial D} f dx = \int_a^b f(x, c(x)) \cdot 1 dx + \int_{c(b)}^{d(b)} f(b, y) \cdot 0 dy - \int_a^b f(x, d(x)) \cdot 1 dx - \int_{c(a)}^{d(a)} f(a, y) \cdot 0 dy = -\iint_D f_y.$$

Análogamente, para recintos  $D = \{(x, y) : c \leq y \leq b, a(y) \leq x \leq b(y)\}$  se ve que  $\oint_{\partial D} g dy = \iint_D g_x$ .

Se cumplirá, pues  $\oint_{\partial D} f dx + g dy = \iint_D [g_x - f_y]$  en un recinto  $D$  que sea de los dos tipos anteriores.

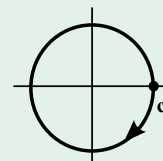
Dividiendo cualquier recinto más general  $D$  en otros de estos últimos y teniendo en cuenta que se cancelan las integrales de línea sobre segmentos comunes, por ser recorridos en sentido opuesto, se llega al resultado.



**Ej 1.** Encontramos, utilizando Green, el valor  $\pi$  de la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$  sobre la circunferencia unidad calculado ya en el ejemplo 5 de 5.2.

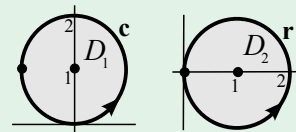
Como el sentido de recorrido es opuesto al que pide Green y  $g_x - f_y = -1$  es:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_D (-1) dx dy = \iint_D dx dy = \text{área de } D = \pi \cdot 1^2 = \pi.$$



**Ej 2.** Volvemos a recalcular ejemplos de esa sección. Ahora el Ej.12, donde integramos  $\mathbf{f}(x, y) = (1, x^2)$  sobre otro par de circunferencias. Es aquí  $g_x - f_y = 2x$ .

En el primer caso el teorema de Green vuelve a darnos el valor 0 sin necesidad de hacer ninguna primitiva, por ser la integral de la impar  $2x$  sobre el círculo  $D_1$  simétrico respecto del eje  $x$ .



En el segundo sí necesitamos trabajar. Por ejemplo utilizando las polares centradas en  $(1, 0)$ :

$$x = 1 + r \cos \theta, y = r \sin \theta, J = r, \iint_{D_2} 2x = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (2r + 2r^2 \cos \theta) d\theta dr = 2\pi \text{ (como allá).}$$

[Las polares usuales  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  llevan a integrar  $\cos^4 \theta$  y todavía es más largo en cartesianas].

**Ej 3.** Comprobemos aquí el teorema para  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 2x)$  y la región  $D$  limitada por  $y = -x^2$  e  $y = -1$ . Casi siempre es más corto el cálculo de la integral doble:

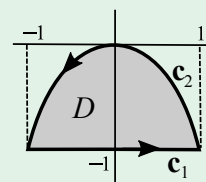
$$\iint_D [g_x - f_y] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-x^2} dy dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

La  $\partial D$  está formada por dos curvas distintas fácilmente parametrizables:

$$\mathbf{c}_1(x) = (x, -1), x \in [-1, 1], \quad \mathbf{c}_2(x) = (x, -x^2), x \in [1, -1].$$

escribir esto equivale a cambiar el signo a la integral<sup>†</sup>

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^1 (-x^2, 2x) \cdot (1, -2x) dx + \int_{-1}^1 (-1, 2x) \cdot (1, 0) dx = \int_{-1}^1 5x^2 dx - \int_{-1}^1 1 dx = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}.$$



Más comprobaciones de Green. La doble es mejor en cartesianas y más corto integrando  $dy dx$ :

**Ej 4.** Comprobemos Green para  $\mathbf{f}(x, y) = (x^3, xy)$  sobre el  $D$  del primer cuadrante acotado por la curva  $x^2 + y^2 = 1$  y el segmento que une  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ .

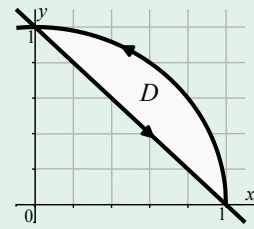
$$g_x - f_y = y \cdot \iint_D y \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x - 2x^2) \, dx = \frac{1}{6}.$$

[Peor  $dx \, dy$  o utilizar la expresión polar  $r = 1/(\cos \theta + \text{sen } \theta)$ ].

Parametrizando  $\partial D$ :  $\mathbf{c}_1 = (x, 1-x)$ ,  $x \in [0, 1]$ .  $\mathbf{c}_2 = (\cos t, \text{sen } t)$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

$$\int_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^3, t-t^2) \cdot (1, -1) \, dt + \int_0^{\pi/2} (c^3, cs) \cdot (-s, c) \, dt = \frac{1}{6}.$$

[Circunferencia en cartesianas:  $\mathbf{c}_1^* = (t, \sqrt{1-t^2})$ ,  $t \in [1, 0] \rightarrow \int_1^0 (t^3, t\sqrt{t}) \cdot (1, -\frac{t}{\sqrt{t}}) \, dt = \int_0^1 (t^2 - t^3) = \frac{1}{12}$ ].



En este se obliga, para repasar integrales trigonométricas, a hacer una doble en polares no adecuadas:

**Ej 5.** Comprobar Green para  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 5xy)$  y  $D$  la región definida por  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $y \geq \frac{1}{3}x^2$  y  $x \geq 0$ , calculando la integral doble i) en cartesianas y ii) en polares.

Con  $y^2 + 3y = 4$  (o a ojo) se halla el corte de circunferencia y parábola  $(\sqrt{3}, 1)$ .

i) Para calcular  $\iint_D [g_x - f_y] = \int_D 5y$  en cartesianas es más corto:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_{x^2/3}^{\sqrt{4-x^2}} 5y \, dy \, dx = \int_0^{\sqrt{3}} (10 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{18}x^4) \, dx = 7\sqrt{3}.$$

Peor:  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{3y}} 5y \, dx \, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} 5y \, dx \, dy = 5\sqrt{3} \int_0^1 y^{3/2} + 5 \int_1^2 y\sqrt{4-y^2} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ .

ii) Bastante más largo en polares. Hay 2 casos dependiendo de  $\theta$ . Uno fácil para la circunferencia y más complicado con la parábola:  $r \text{ sen } \theta = \frac{1}{3}r^2 \cos^2 \theta \rightarrow r = 3 \text{ sen } \theta / \cos^2 \theta$ .

$$\iint_D 5y = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{3 \text{ sen } \theta / \cos^2 \theta} 5r^2 \text{ sen } \theta \, dr \, d\theta + \int_0^{\pi/6} \int_0^{3 \text{ sen } \theta / \cos^2 \theta} 5r^2 \text{ sen } \theta \, dr \, d\theta = \frac{20}{3}\sqrt{3} + 45 \int_0^{\pi/6} \frac{\text{sen}^4 \theta}{\cos^6 \theta} \, d\theta = 7\sqrt{3}.$$

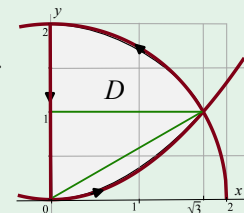
•  $\tan \theta = u$ ,  $du = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \rightarrow 45 \int_0^{1/\sqrt{3}} u^4 \, du = \frac{9}{9\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ .

Parametrizando. Circunferencia:  $\mathbf{c}_1 = (2 \cos t, 2 \text{ sen } t)$ ,  $t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ . Parábola:  $\mathbf{c}_2 = (x, \frac{x^2}{3})$ ,  $x \in [0, \sqrt{3}]$ . El segmento ni lo parametrizamos, pues es claramente  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  cuando  $x = 0$  y su integral es nula.

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 8 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (c^2, 5cs) \cdot (-s, c) \, dt = \frac{32}{3} [-\cos^3 t]_{\pi/6}^{\pi/2} = 4\sqrt{3}.$$

[En cartesianas:  $\mathbf{c}_* = (x, \sqrt{4-x^2})$ ,  $x \in [\sqrt{3}, 0]$ .  $\int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \dots = \int_{\sqrt{3}}^0 -4x^2 \, dx = \frac{4}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ ].

Parábola:  $\int_{\mathbf{c}_2} = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2, \frac{5}{3}x^3) \cdot (1, \frac{2x}{3}) \, dx = [\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^5]_0^{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ .  $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 0 = 7\sqrt{3}$ .

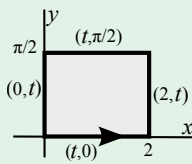


En este es claramente más corta la integral doble:

**Ej 6.** Hallemos  $\oint_{\partial D} e^x \text{ sen } y \, dx + e^{2x} \text{ cos } y \, dy$ , con  $D$  rectángulo  $[0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ .

$$\int_0^2 (0 \cdot 1 + 0) \, dt + \int_0^{\pi/2} (0 + e^4 \text{ cos } t \cdot 1) \, dt - \int_0^2 (e^t \cdot 1 + 0) \, dt - \int_0^{\pi/2} (0 + \text{cos } t \cdot 1) \, dt$$

Con Green:  $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2e^{2x} \text{ cos } y - e^x \text{ cos } y) \, dx \, dy = [\text{sen } y]_0^{\pi/2} [e^{2x} - e^x]_0^2 = e^4 - e^2$ .



Se suele usar Green para reducir integrales de línea a integrales dobles, normalmente más sencillas. Pero a veces conviene lo contrario para calcular un área. Utilizaremos esta fórmula clásica de los libros de Cálculo:

$$A = \iint_D dx \, dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x \, dy - y \, dx \quad (\text{pues } g_x - f_y = 2, \text{ aunque para más campos sencillos esa diferencia sea constante}).$$

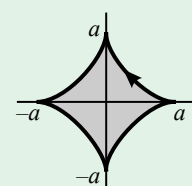
**Ej 7.** Calculemos el área encerrada por la 'hipocicloide'  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

Utilizando la fórmula de arriba  $A = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x \, dy - y \, dx$  se tiene aquí:

$\mathbf{c}(\theta) = (a \text{ cos }^3 \theta, a \text{ sen }^3 \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  es la mejor parametrización.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \text{ cos }^3 \theta)(3a \text{ sen }^2 \theta \text{ cos } \theta) - (a \text{ sen }^3 \theta)(-3a \text{ cos }^2 \theta \text{ sen } \theta)] \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \text{ sen }^2 \theta \text{ cos }^2 \theta \, d\theta = \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} [1 - \text{cos } 4\theta] \, d\theta = \frac{3}{8} \pi a^2.$$



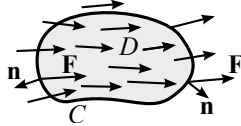
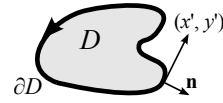
[Los picos de la curva aparecen para  $\mathbf{c}' = 0$ ].

A partir del teorema de Green se obtiene fácilmente el **teorema de la divergencia en el plano**:

Sean  $D \subset \mathbf{R}^2$  limitado por  $\partial D$  curva cerrada simple,  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbf{R}^2$  campo  $C^1$  y  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario exterior a  $\partial D$ . Entonces es  $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds$ .

Si  $\partial D$  viene dada por  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ , la normal es  $\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ .

Si  $\mathbf{f} = (f, g)$ ,  $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_a^b [f(x(t), y(t)) y'(t) - g(x(t), y(t)) x'(t)] dt$   
 $= \oint_{\partial D} f \, dy - g \, dx \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_D (f_x + g_y) \, dx \, dy$ .



[Imaginemos una curva cerrada  $C$  sobre la superficie de un fluido y sea  $\mathbf{F} = f \mathbf{v}$ , donde  $f$  es la densidad del fluido y  $\mathbf{v}$  su velocidad. Entonces  $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$  mide el ritmo con el que el fluido entra o sale de  $D$ .

Si la cantidad de fluido en  $D$  disminuye (aumenta) será  $\oint_C < 0$  ( $\oint_C > 0$ ). La integral coincide con  $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}$ . Por tanto, la  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  describe la tendencia del fluido a acumularse o dispersarse].

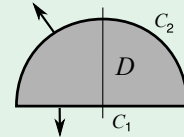
**Ej 8.** Comprobemos este teorema para  $\mathbf{f}(x, y) = (7, y^2 - 1)$  y  $D$  el semicírculo  $r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi$ .

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 2y, \quad \iint_D 2y \, dx \, dy = \int_0^\pi \int_0^3 2r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta = 36.$$

Para  $C_1$ , si  $\mathbf{c}(x) = (x, 0), x \in [-3, 3], \mathbf{n} = (0, -1), \int_{C_1} (1 - y^2) \, ds = \int_{-3}^3 dx = 6$ .

Para  $C_2$ , si  $\mathbf{c}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), t \in [0, \pi], \|\mathbf{c}'(t)\| = 3$ .

Como  $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t), \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = 3 \int_0^\pi (7 \cos t + 9 \sin^3 t - \sin t) \, dt = 30. \quad 36 = 6 + 30$ .



**Ej 9.** Comprobemos los teoremas de Green y de la divergencia para el campo  $\mathbf{f}(x, y) = (x^3, x^2 y)$  y el recinto  $D$  del primer cuadrante acotada por  $y = 2x$  e  $y = x^2$ .

Green:  $\iint_D [g_x - f_y] = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 2xy \, dy \, dx = \int_0^2 (4x^3 - x^5) \, dx = [x^4 - \frac{x^6}{6}]_0^2 = \frac{16}{3}$ .

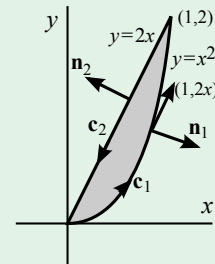
Posibles parametrizaciones de los dos tramos de  $\partial D$ :

$\mathbf{c}_1(x) = (x, x^2), x \in [0, 2], \mathbf{c}'_1 = (1, 2x), \mathbf{f}(\mathbf{c}_1) = (x^3, x^4) \rightarrow$   
 $\mathbf{c}_2(x) = (x, 2x), x \in [2, 0], \mathbf{c}'_2 = (1, 2), \mathbf{f}(\mathbf{c}_2) = (x^3, 2x^3)$

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 (x^3 + 2x^5) \, dx - \int_0^2 (x^3 + 4x^3) \, dx = \frac{2^6}{3} - 2^4 = \frac{16}{3}.$$

Divergencia:  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 4x^2. \mathbf{n}_1 = \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}}, \mathbf{n}_2 = \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}}. \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 4x^2 \, dy \, dx = \int_0^2 (8x^3 - 4x^2) \, dx = \frac{32}{5}$ .

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_0^2 (x^3, x^4) \cdot \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}} \sqrt{1+4x^2} \, dx - \int_0^2 (x^3, 2x^3) \cdot \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}} \sqrt{5} \, dx = \int_0^2 x^4 \, dx = \frac{32}{5}.$$



Se podría pensar que los cálculos del teorema de la divergencia serán complicados, porque lo eran las integrales de línea de campos escalares. Pero el  $\|\mathbf{c}'\|$  aparece también en los denominadores de las  $\mathbf{n}$  exteriores.

# 6. Integrales de superficie

## 6.1. Definiciones y cálculo

Generalizamos las integrales de línea (de campos escalares y de campos vectoriales).

Una **superficie** a veces viene dada por  $F(x, y, z) = 0$ . Si se puede despejar la  $z$ , por  $z = f(x, y)$ . Pero lo más general es que se puede describir **paramétricamente** mediante:

$$\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \text{ con } \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D \quad [2 \text{ grados de libertad frente al único } t \text{ de las curvas}].$$

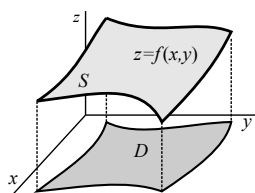
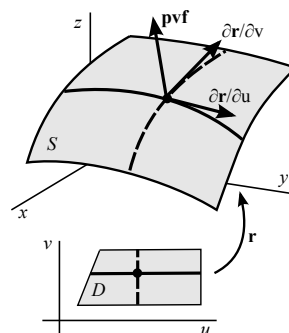
Suponemos que la superficie  $S = \mathbf{r}(D)$  es  $C^1$  [que lo es  $\mathbf{r}$ ]. Entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

serán vectores tangentes a las curvas contenidas en  $S$  que se obtienen tomando, respectivamente,  $v = k$  y  $u = k$ . Su producto vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{será un vector normal a } S. \quad [\text{Y al plano tangente, si es } \neq \mathbf{0}].$$

producto vectorial fundamental



Cuando la superficie está escrita en la forma  $z = f(x, y)$  una parametrización posible de  $S$  es  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , con  $(x, y) \in D$  proyección de  $S$  sobre  $z=0$ . El producto vectorial fundamental queda en este caso:

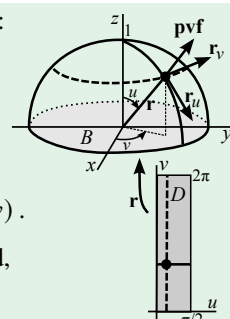
$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1).$$

**Ej 1a.** Parametricemos la semisuperficie esférica unidad superior. Una posibilidad:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \cos u \cos v & u \in [0, \frac{\pi}{2}] & \quad \mathbf{r}_u = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} - \sin u \mathbf{k} \\ y(u, v) &= \cos u \sin v & v \in [0, 2\pi] & \quad \mathbf{r}_v = -\sin u \sin v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} \\ z(u, v) &= \sin u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k} = \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) = \sin u \mathbf{r}(u, v).$$

O podemos parametrizarla:  $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ , con  $(x, y) \in B$  círculo unidad, que nos proporciona este otro **pvf**:  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

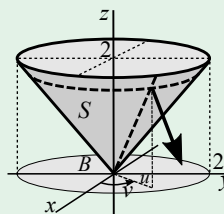


**Ej 2.**  $x = u \cos v$   $u \in [0, 2]$  Por ser  $x^2 + y^2 = z^2$ , nos da la superficie cónica de la derecha, comprendida entre  $z=0$  y  $z=2$ .  
 $y = u \sin v$   $v \in [0, 2\pi]$   
 $z = u$

[ $v = k$  sigue una recta y  $u = k$  una circunferencia]. El **pvf** es  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u \cos v, -u \sin v, u)$ . sentido opuesto al del dibujo →  
 [Para  $u=0$  el **pvf** =  $\mathbf{0}$  y en ese punto no hay plano tangente].

De otra forma:  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ , con  $(x, y) \in B$  círculo de radio 2.

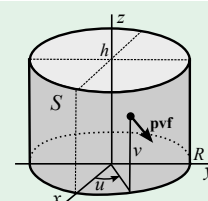
Siendo ahora el producto vectorial fundamental:  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-x(x^2 + y^2)^{-1/2}, -y(x^2 + y^2)^{-1/2}, 1)$ .



**Ej 3.**  $x = R \cos u$   $u \in [0, 2\pi]$  Describe una superficie cilíndrica de radio  $R$   
 $y = R \sin u$   $v \in [0, h]$  (pues  $x^2 + y^2 = R^2$ ) y de altura  $h$ .  
 $z = v$

Como  $\mathbf{r}_u = (-R \sin u, R \cos u, 0)$  es  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = R(\cos u, \sin u, 0)$ .  
 $\mathbf{r}_v = (0, 0, 1)$

No se puede escribir como  $z = f(x, y)$  [sí, por ejemplo, como  $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ ].



## Integrales de superficie de campos escalares

Sea  $S$  la superficie  $C^1$  dada por  $\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  inyectiva y sea  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $f(\mathbf{r}(u, v))$  es continua. Entonces:  $\iint_S f dS \equiv \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$ .

[Si  $S$  está formada por varias superficies  $C^1$  se suman las integrales].

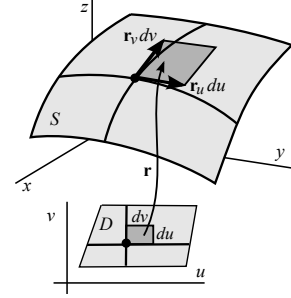
Como en las de línea, se prueba que la integral de una  $f$  escalar **sólo depende de la superficie** y no de cómo se parametrize. La notación  $\iint_S f dS$  es, pues, inequívoca.

Si  $f \equiv 1$  el valor de la integral representará el **área de la superficie**  $S$ :

$$\text{Área de } S: \quad A = \iint_S dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

[Pues un rectángulo  $du dv$  de  $D$  da lugar a un diferencial de superficie  $dS$  aproximadamente igual al rectángulo dado por los vectores  $\mathbf{r}_u du$  y  $\mathbf{r}_v dv$ , cuyo área es el módulo de su producto vectorial].

Para una superficie  $z = f(x, y)$  queda  $A = \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dx dy$ .



**Ej 1b.** Hallemos la integral de  $f(x, y, z) = z^2$  sobre la semisuperficie esférica  $S$  del ejemplo 1a.

Primero con  $\mathbf{r}(u, v) = (\text{sen } u \cos v, \text{sen } u \text{ sen } v, \cos u)$ .  $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = |\text{sen } u| \|\mathbf{r}\| = \text{sen } u$  [ $\mathbf{r}$  es unitario y  $\text{sen } u \geq 0$ ].

$$\text{Por tanto, } \iint_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \text{sen } u du dv = -\frac{2\pi}{3} [\cos^3 u]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Con la parametrización  $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$  el módulo del producto vectorial fundamental resulta ser:

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \left[ \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \Rightarrow$$

$$\iint_S z^2 dS = \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr d\theta = \frac{2\pi}{3} [-(1-r^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Veamos ahora que la integral de superficie nos calcula bien el **área** de  $S$ :

$$A = \iint_S 1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen } u du dv = -2\pi [\cos u]_0^{\pi/2} = 2\pi \quad [\text{el de toda la superficie esférica era } 4\pi \cdot 1^2].$$

Como siempre, los cálculos se complican si se usan las cartesianas en vez de las esféricas:

$$A = \iint_S dS = \iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2} dr d\theta = 2\pi [-(1-r^2)^{1/2}]_0^1 = 2\pi.$$

[impropias convergentes]

Al margen de integrales, como el **pvf** es un vector  $\mathbf{n}$  normal a una superficie, nos proporciona una tercera forma (además de las vistas en 2.1) de calcular el **plano tangente** a dicha superficie.

Por ejemplo, el plano tangente a  $S$  en el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  [para  $u=v=\frac{\pi}{4}$ ] se puede hallar así:

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1, 1, \sqrt{2}) \rightarrow (1, 1, \sqrt{2}) \cdot (x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 - x - y).$$

**Ej 4.** Sea  $S$  la porción de la superficie  $z = x + y^2$  sobre el triángulo  $D$  dado por  $0 \leq y \leq 1$  y  $0 \leq x \leq y$ . Hallemos su área y la  $\iint_S (z-x) dS$ .

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x + y^2) \rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-1, -2y, 1)$$

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{4y^2 + 2} \quad [ = ((f_x)^2 + (f_y)^2 + 1)^{1/2} ] \rightarrow$$

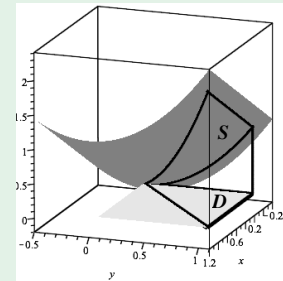
$$A = \iint_D \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dx dy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{4y^2 + 2} dx dy = \int_0^1 y \sqrt{4y^2 + 2} dy$$

$$= \frac{1}{12} (4y^2 + 2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \sqrt{6} - \frac{1}{6} \sqrt{2} \approx 0.99.$$

[La presencia de la raíz muchas veces, no aquí, conduce a integrales complicadas o no calculables].

$$\iint_S (z-x) dS = \iint_D y^2 \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dx dy = \int_0^1 \int_0^y y^2 \sqrt{4y^2 + 2} dx dy = \int_0^1 y^2 y \sqrt{4y^2 + 2} dy$$

$$\stackrel{4y^2+2=u}{=} \frac{1}{32} \int_2^6 (u-2) \sqrt{u} du = \frac{1}{32} \left[ \frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{4}{3} u^{3/2} \right]_2^6 = \frac{1}{5} \sqrt{6} + \frac{1}{30} \sqrt{2} \approx 0.54.$$



## Integrales de superficie de campos vectoriales

Sea  $S$  la superficie de  $C^1$  dada por  $\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  inyectiva y sea  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  continua sobre  $S$ . Entonces:  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du dv$ .

Observemos que la integral anterior, si  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie con el mismo sentido que el producto vectorial fundamental, se puede escribir así:

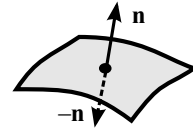
$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Esta expresión simplifica a veces algún cálculo y además clarifica el significado físico de este tipo de integrales: el **flujo** del campo vectorial  $\mathbf{f}$  a través de la superficie  $S$ .

Como sucedía con las integrales de línea de los campos vectoriales, se puede demostrar que, **salvo el signo**, esta integral es **independiente de la parametrización**.

Hay dos vectores unitarios normales a una superficie orientada:  $\mathbf{n}$  y  $-\mathbf{n}$  (que conste que hay superficies no orientadas como la banda de Moebius).

Parametrizaciones diferentes proporcionan **pvf** que pueden tener el sentido de uno u otro. Si nos dan el mismo, las integrales coinciden. Si no, tienen el signo opuesto.  $\mathbf{f}$ ,  $S$  y el sentido de la normal sí determinan la integral.



[Una notación más precisa sería:  $\iint_r \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ , incluyendo explícitamente la parametrización].

Los cuatro primeros ejemplos son integrales sobre las superficies parametrizadas hasta ahora.

**Ej 1c.** Integremos  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  sobre la semisuperficie esférica  $S$  del 1ab, con los  $\mathbf{r}$  de siempre.

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{r}(u, v) \cdot \left[ \underset{\substack{\text{r unitario} \\ \uparrow}}{\text{sen } u} \mathbf{r}(u, v) \right] du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen } u du dv = 2\pi [-\cos u]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

Con la otra parametrización:  $\mathbf{f} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right) \Rightarrow$

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \stackrel{\text{polares}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2} dr d\theta = 2\pi [-(1-r^2)^{1/2}]_0^1 = 2\pi.$$

Las integrales coinciden porque el **pvf** apuntaba en ambos casos en la misma dirección: hacia el exterior de la esfera. Y el valor es positivo porque el campo  $\mathbf{f}$  tiene también esa dirección (y así el flujo a través de  $S$  debe ser positivo).

**Ej 2\*.** Integremos la  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  de arriba, pero ahora sobre la superficie cónica  $S$  del ejemplo 2.

Teníamos:  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ,  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, 2]$ .

Por lo tanto:  $\mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = (u \cos v, u \sin v, u) \cdot (-u \cos v, -u \sin v, u) = -u^2 + u^2 = 0$ .

Así pues:  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0$ . [Este campo era tangente a nuestro cono y el flujo debía ser nulo].

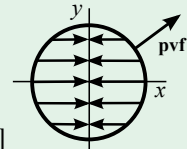
**Ej 3\*.** Sobre el cilindro  $S$  del ejemplo 3, integremos el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x, 0, z^3)$ .

Eran:  $\mathbf{r}(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$ ,  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (R \cos u, R \sin u, 0)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, h]$ .

$$\text{Luego: } \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^h \int_0^{2\pi} (-R \cos u, 0, v^3) \cdot (R \cos u, R \sin u, 0) du dv$$

$$= -R^2 \int_0^h \int_0^{2\pi} \cos^2 u du = -\frac{R^2 h}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2u) du = -\pi R^2 h.$$

[Es  $< 0$  pues  $\mathbf{f}$  siempre apunta hacia el interior del cilindro y el **pvf** hacia fuera].



**Ej 4\*.** Sobre la superficie  $S$  del ejemplo 4, calculemos  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  para el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (2z, y, 1)$ .

Como eran  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x+y^2)$  y  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-1, -2y, 1)$ , la integral resulta ser:

$$\iint_D (2x+2y^2, y, 1) \cdot (-1, -2y, 1) dx dy = \int_0^1 \int_0^y (1-2x) dx dy = \int_0^1 (y-y^2) dy = \frac{1}{6}.$$

[Integrando campos vectoriales no aparecen las raíces que daban problemas con los escalares].

Integramos ahora un campo escalar y otro vectorial sobre una superficie plana (fácil de parametrizar, pues).

**Ej 5.** Parametrizamos el triángulo plano  $S$  en el espacio cuyos vértices son  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  y calculamos: a) su área, b)  $\iint_S x \, dS$ , c)  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ , si  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, z, -z)$ .

El plano por los puntos es claramente  $x+y+z=1$  y la parametrización de  $S$ :

$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1-x-y)$ , con  $(x, y) \in T$  triángulo del dibujo.

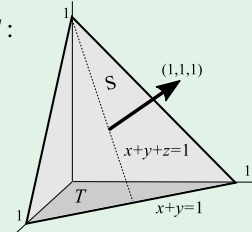
Entonces el **pvf** será  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (1, 1, 1)$  y  $\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{3}$ .

a) El área de  $S$  será:  $A = \iint_S dS = \sqrt{3} \iint_T dx \, dy = \sqrt{3} \cdot \text{área de } T = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ .

[Era el área de un triángulo cuya base es  $\sqrt{2}$  y cuya altura es  $\sqrt{3}/2$ ].

b)  $\iint_S x \, dS = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x \, dy \, dx = \sqrt{3} \int_0^1 (x-x^2) \, dx = \frac{1}{6} \sqrt{3}$  [valor menor, pues  $x$  es menor que 1 en  $S$ ].

c)  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_T (x, 1-x-y, -1+x+y) \cdot (1, 1, 1) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} x \, dy \, dx = \frac{1}{6}$  [la integral doble de b)].



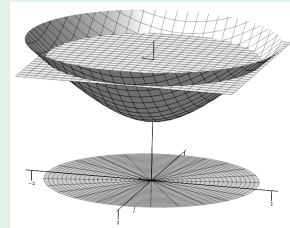
Integral de  $\mathbf{f}$  vectorial, sobre una superficie nueva que debemos parametrizar:

**Ej 6.** Halle el flujo del campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{k}$  hacia el exterior de la parte del hiperboloide de dos hojas  $z^2 = 1 + x^2 + y^2$  comprendida entre  $z=1$  (su vértice) y el plano  $z=2$ .

La parametrización más simple parece:

$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1+r^2})$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $r \in [0, \sqrt{3}]$ .

Con ella se tiene:  $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & s & r/\sqrt{c} \\ -rs & rc & 0 \end{vmatrix} = (-\frac{c}{\sqrt{c}} r^2, -\frac{s}{\sqrt{c}} r^2, r)$ .  
[apunta hacia dentro]



El flujo hacia el exterior será, pues:  $-\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (0, 0, 1) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta) \, dr \, d\theta = -\pi [r^2]_0^{\sqrt{3}} = -3\pi$ .

Trabajando en cartesianas también salen cálculos cortos:

$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{1+x^2+y^2})$ ,  $(x, y) \in B$  círculo centrado de radio  $\sqrt{3}$ .  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-\frac{x}{\sqrt{c}}, -\frac{y}{\sqrt{c}}, 1)$ .

Y ahora es:  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_B (0, 0, 1) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) \, dx \, dy = -\iint_B 1 = -\text{área de } B = -3\pi$ .

En el último ejemplo de la sección tratamos con superficies esféricas de radio distinto de 1.

**Ej 7.** Calculemos  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ , siendo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, 1, 2)$ ,  $S$  la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  y  $\mathbf{n}$  el exterior.

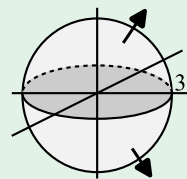
Para la parametrización mantenemos aquí los nombres de las esféricas:

$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (3 \sin \phi \cos \theta, 3 \sin \phi \sin \theta, 3 \cos \phi)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\phi \in [0, \pi]$ ,

Haciendo el producto vectorial:  $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = 3 \sin \phi \mathbf{r}(\phi, \theta)$  [sentido correcto].

$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 9 \sin \phi (3 \sin \phi \cos \theta, 1, 2) \cdot (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \, d\phi \, d\theta$

$= 9 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{3}{2} \sin^3 \phi (1 + \cos 2\theta) + \sin^2 \phi \sin \theta + \sin 2\phi \right] \, d\phi \, d\theta = 27\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \, d\phi = 36\pi$ .  
[se anula] [se anula] [se anula]



Haciendo integrales de superficie, que exigen evaluar bastantes integrales de una variable, hay que intentar ahorrarse el mayor número posible cálculos con argumentos de imparidad o, con las tan habituales trigonométricas, de periodicidad.

Integrando sobre la **superficie esférica general**  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  los cálculos serían muy similares. Sustituyendo treses por erres mayúsculas se obtendría:

$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = R \sin \phi \mathbf{r}(\phi, \theta) = R^2 (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$ ,  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi R^2$ .

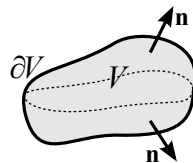


## 6.2. Teoremas de la divergencia y Stokes

### Teorema de la divergencia en el espacio (o de Gauss-Ostrogradsky)

Sea  $V$  región acotada del espacio cuya frontera  $\partial V$  es una superficie conexa,  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario exterior a  $V$  y sea  $\mathbf{f}$  de  $C^1$  en  $V$ . Entonces:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$



[La segunda integral es  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  si el producto vectorial fundamental apunta hacia el exterior].

Ni siquiera damos una idea de la demostración (mirar el Marsden-Tromba u otros libros de cálculo en  $\mathbf{R}^n$ ).

[Como la integral de superficie mide el flujo de un fluido sobre la frontera, es aplicable también aquí lo que dijimos en el plano al final del capítulo 5 sobre el significado de la divergencia: puede describir la tendencia de un fluido a acumularse o dispersarse].

[En el plano era necesario hallar el vector normal, pero en el espacio la parametrización nos da ya el  $\mathbf{p}v\mathbf{f}$ ].

**Ej 1.** Comprobemos el teorema para  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  y  $V$  la famosa semiesfera de la sección 6.1.

Por una parte:  $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_V dx \, dy \, dz = 3 \times \text{volumen de } V = 3 \times \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = 2\pi$ .

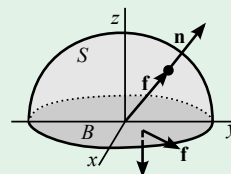
Por otra, la  $\partial V$  se compone de dos partes, la  $S$  superior y el círculo  $B$  de la base:  $\iint_{\partial V} = \iint_S + \iint_B$ .

Para la parte  $S$  de la frontera es  $\mathbf{n} = \mathbf{f} = \mathbf{r}$  [ $\Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 1$ ],

y para la  $B$  es  $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$  [ $\Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ ].

Por tanto,  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S 1 \, dS + 0 = \text{área de } S = 2\pi$ .

[Nos llevó más tiempo hacer la  $\iint_S$  en 6.1 usando parametrizaciones].



Esto es excepcionalmente sencillo: no necesitamos parametrizar nada para comprobar el teorema. Compliquemos algo el campo vectorial (y las integrales), manteniendo el recinto:

Ahora sea  $\mathbf{g}(x, y, z) = (xy, z, 1)$  y sea  $V$  la misma semiesfera. La integral triple:

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = y, \quad \iiint_V y \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \sin \theta \cos \theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{4} [-\cos \theta]_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta = 0.$$

[integrados función impar en volumen simétrico]

Hemos visto ya esta parametrización de  $S$  (le cambiamos el nombre a los parámetros):

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin \phi \, \mathbf{r}(\phi, \theta).$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi (\sin^2 \phi \cos \theta \sin \theta, \cos \phi, 1) \cdot (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^4 \phi \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^2 \phi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \phi) \, d\phi \, d\theta = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

[pues  $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = 0$ ,  $\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0$ ]

$$\text{[No sale mal con } \mathbf{r} = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \rightarrow \iint_B [y+1-x^2y(1-x^2-y^2)^{-1/2}] \, dy \, dx = \dots \text{].}$$

Sobre el círculo  $B$  de la base es  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (xy, 0, 1) \cdot (0, 0, -1) = -1$ , con lo que:

$$\iint_B \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iint_B 1 \, dS = -\text{área de } S = -\pi. \quad \text{Por tanto, } \iint_{\partial V} = \iint_S + \iint_B = \pi - \pi = 0.$$

**Ej 2.** Volvamos a comprobar el teorema, ahora para el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x, 0, z^3)$  y  $V$  el cilindro de los ejemplos 3 y 3\* de 6.1 cuya superficie lateral estaba descrita por:

$$\mathbf{r} = (R \cos u, R \sin u, v), \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (R \cos u, R \sin u, 0), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, h].$$

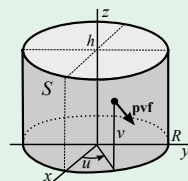
Debemos sumar a la  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = -\pi R^2 h$  calculada las integrales sobre las tapas.

En la tapa superior:  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (-x, 0, h^3) \cdot (0, 0, 1) = h^3 \rightarrow \iint_{B_R} h^3 = \pi R^2 h^3$ .

Y en la inferior:  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (-x, 0, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ . Así pues,  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \pi R^2 (h^3 - h)$ .

Por otra parte:  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 3z^2 - 1$ ,  $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r(3z^2 - 1) \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \frac{R^2}{2} (h^3 - h)$ .

cilíndricas

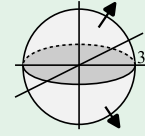


Es mucho más fácil hacer integrales triples que calcular flujos:

**Ej 3.** El flujo de  $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,1,2)$  que hemos calculado en el ejemplo 7 de 6.1 sería inmediato utilizando el teorema de la divergencia:

Era  $S = \partial V$ , esfera de radio 3 y es  $\text{div } \mathbf{f} = 1$ . La integral allí calculada coincide con:

$$\iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta = 36\pi = \text{volumen de } V = \frac{4}{3}\pi 3^3.$$



Las superficies cerradas (salvo una esfera) exigirán más de una parametrización:

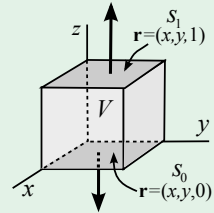
**Ej 4.** Verifiquemos Gauss sobre el cubo unidad  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  para  $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ .

Muy fácil es aquí la integral de volumen de  $\text{div } \mathbf{f} = 2x + 2y + 2z$ :

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{f} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 2z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 2x \, dx + \int_0^1 2y \, dy + \int_0^1 2z \, dz = 3.$$

Pero la integral de superficie sobre  $\partial V$  debe dividirse en 6, una para cada cara:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_0} + \iint_{S_1} + \iint_{L_0} + \iint_{L_1} + \iint_{F_0} + \iint_{F_1} \left[ \begin{array}{l} S \text{ abajo-arriba} \\ L \text{ izquierda-derecha} \\ F \text{ atras-frontendal} \end{array} \right].$$



Para la  $S_1$  de arriba:  $\mathbf{r} = (x, y, 1)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (x^2, y^2, 1)$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ,  $\iint_{\square} 1 \, dS = 1$ .

Para la  $S_0$  de abajo:  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (x^2, y^2, 0)$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ ,  $\iint_{\square} 0 \, dS = 0$ .

Y las otras cuatro son muy parecidas:

$$\mathbf{r} = (0, y, z), \mathbf{n} = (-1, 0, 0) \rightarrow \iint_{\square} 0 \, dS = 0. \quad \mathbf{r} = (1, y, z), \mathbf{n} = (1, 0, 0) \rightarrow \iint_{\square} 1 \, dS = 1.$$

$$\mathbf{r} = (x, 0, z), \mathbf{n} = (0, -1, 0) \rightarrow \iint_{\square} 0 \, dS = 0. \quad \mathbf{r} = (x, 1, z), \mathbf{n} = (0, 1, 0) \rightarrow \iint_{\square} 1 \, dS = 1.$$

Por tanto,  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3$  como debía ser.

Última comprobación del teorema de Gauss que, aparentemente, exigiría calcular 4 integrales de superficie, pero que acaba exigiendo hallar solamente una y utilizar un poco de geometría elemental.

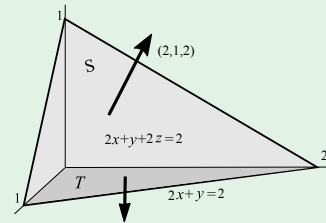
**Ej 5.** Comprobemos Gauss para  $\mathbf{f}(x,y,z) = (0, xy, -1)$  en el  $V$  limitado por los planos coordenados y el plano inclinado que pasa por los puntos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ .

No es difícil dar la ecuación del plano inclinado:  $2x + y + 2z = 2$ .

[O a simple vista o usando que un vector normal es  $(1, 0, -1) \times (0, 2, -1)$ ].

Como  $\text{div } \mathbf{f} = x$  la integral triple es (por ejemplo en ese orden):

$$\begin{aligned} \iiint_V x &= \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \int_0^{1-x-y/2} x \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \left[ x(1-x) - \frac{xy}{2} \right] dy \, dx \\ &= \int_0^1 [2x(1-x)^2 - x(1-x)^2] dx = \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$



Habría que hallar el flujo sobre los 4 triángulos que forman  $\partial V$  en la dirección de sus  $\mathbf{n}$  exteriores.

Pero sobre  $x=0$  e  $y=0$  es  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$  pues  $\mathbf{f} = (0, 0, -1)$  y sus normales son  $(-1, 0, 0)$  y  $(0, -1, 0)$ .

El flujo es 0 sobre ambos triángulos.

Sobre  $T$  es  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (0, 0, -1) \cdot (0, 0, -1) = 1$ , con lo que  $\iint_T 1 = \text{área de } T = 1$  (base 1 y altura 2).

$$\left[ \text{Sería una pérdida de tiempo hacer } \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} dy \, dx = \int_0^1 2(1-x) dx = -(1-x)^2 \Big|_0^1 = 1 \right].$$

Sólo necesitamos integrales para el triángulo inclinado  $S$  que describimos en la forma conocida:

$$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 1 - x - \frac{y}{2}), \quad (x, y) \in T.$$

Y sabemos que en estos casos es  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (1, \frac{1}{2}, 1)$ . Así que el flujo sobre  $S$  será:

$$\iint_T (0, xy, -1) \cdot (1, \frac{1}{2}, 1) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \left( \frac{xy}{2} - 1 \right) dy \, dx = \int_0^1 [x(1-x)^2 - 2(1-x)] dx = \frac{1}{12} - 1.$$

El flujo total sobre la frontera de  $V$  es, sumando las dos integrales no nulas,  $1 + \frac{1}{12} - 1 = \frac{1}{12}$ .

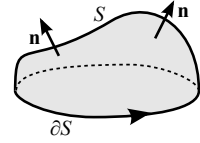
Hemos comprobado, pues, que coinciden las integrales  $\iiint_V \text{div } \mathbf{f} = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$ .

Si el teorema de la divergencia relacionaba una integral en un volumen con una de superficie en su borde, el de Stokes relaciona una de superficie con una de línea:

### Teorema de Stokes

Sean  $S$  una superficie en el espacio limitada por la curva  $\partial S$  y  $\mathbf{f} \in C^1$  en  $S$ .

Entonces:  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ , con  $\mathbf{n}$  vector unitario normal a  $S$  y los sentidos de  $\mathbf{n}$  y de recorrido de  $\partial S$  indicados en el dibujo.



[Caminando por la  $\partial S$ , la superficie quedará a nuestra izquierda y la normal apunta de los pies a la cabeza. Estamos suponiendo con esto que nuestra superficie es orientable para poderlo afirmar].

[Podríamos alternativamente escribir  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  cuando la  $\mathbf{r}$  que utilizamos da el sentido de  $\mathbf{n}$  adecuado].

[Cuando  $S$  es una región del plano  $xy$  es  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , con lo que  $\text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = g_x - f_y$ , y  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  se reduce a  $f \, dx + g \, dy$ : el teorema de Stokes pasa a convertirse en el de Green. Y como sucedía allí, para un campo conservativo las dos integrales son nulas, por anularse el rotacional y por ser  $\partial S$  un camino cerrado].

Resumamos la demostración para una superficie de la forma  $(x, y, k(x, y))$  con  $k$  de  $C^2$  en  $D$ .

Llamando  $\mathbf{f} = (f, g, h)$ , es  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [-k_x(h_y - g_z) - k_y(f_z - h_x) + (g_x - f_y)] \, dx \, dy \, dz$ .

Sea  $\mathbf{d}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , una parametrización (en sentido adecuado) de  $\partial D$ .

Entonces  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), k(x(t), y(t)))$ ,  $t \in [a, b]$  será una parametrización de  $\partial S$  y se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot (x', y', k_x x' + k_y y') \, dt = \int_a^b [(f(\mathbf{c}) + h(\mathbf{c}) k_x) x' + (g(\mathbf{c}) + h(\mathbf{c}) k_y) y'] \, dt \\ &= \int_{\partial D} (f + h k_x) \, dx + (g + h k_y) \, dy \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_D (g_x + g_z k_x + h_x k_x - f_y - f_z k_y - h_y k_x) \, dx \, dy \uparrow \end{aligned}$$

**Ej 1\*.** Comprobamos el teorema para i)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  y ii)  $\mathbf{g}(x, y, z) = (0, 0, y)$ , y la  $S$  habitual.

Para i) es  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0} \Rightarrow \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$ . Además es  $C^1(\mathbf{R}^3)$  con lo que  $\mathbf{f}$  deriva de un potencial

[y casi a ojo se ve que  $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$  cumple  $\nabla U = \mathbf{f}$ ]. Por tanto,  $\oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 0$  también.

Para ii) debemos echar alguna cuenta más pues  $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{i}$  [ $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (1, 0, 0) \cdot (x, y, z) = x$ ].

Entonces:  $\iint_S \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S x \, dS = \int_0^{2\pi} \cos v \, dv \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du = 0$  [la primera integral lo es].

La integral también se puede hacer:  $\iint_B \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (1-r^2)^{-1/2} \cos \theta \, dr \, d\theta = 0$ .

Una posible parametrización de  $\partial S$  es  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = (0, 0, \sin t)$ .

Así pues,  $\oint_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (0, 0, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0$ , como debía ser.

[La integral de línea a lo largo de la circunferencia se ha anulado, a pesar de no ser el campo conservativo. En este caso,  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{c}'$  eran ortogonales. Sobre otras curvas cerradas, la integral de  $\mathbf{g}$  será distinta de 0. Dijimos que para que  $\mathbf{g}$  fuese conservativo, su integral a lo largo de **todo** camino cerrado debía ser nula].

**Ej 6.** Comprobamos ahora Stokes para el triángulo del ejemplo 5 de 6.1 y  $\mathbf{f}(x, y, z) = (z^3, 0, -3(x+y))$ .

La parametrización de  $S$  era  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1-x-y)$ , con  $(x, y) \in T$  y el **pvf** era  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (1, 1, 1)$  (que apunta en el sentido que pide Stokes).

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^3 & 0 & -3(x+y) \end{vmatrix} = 3(-1, 1+z^2, 0). \text{ Por tanto:}$$

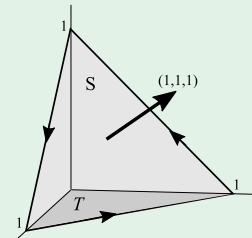
$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= 3 \iint_T z^2 \, dx \, dy = 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 [-(1-x-y)^3]_0^{1-x} \, dx = \int_0^1 (1-x)^3 \, dx = -\frac{1}{4}(1-x)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

[Elijiendo parametrizaciones (no habituales)  $\mathbf{r}(x, z)$  o  $\mathbf{r}(y, z)$  se simplificarían algo algunos cálculos].

Parametrizaciones posibles de los 3 segmentos de  $\partial S$  en el sentido dibujado son, por ejemplo:

$$(t, 1-t, 0), t \in [1, 0], \quad (0, t, 1-t), t \in [1, 0], \quad (t, 0, 1-t), t \in [0, 1] \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_1^0 (0, 0, 3t) \cdot (1, -1, 0) + \int_1^0 ((1-t)^3, 0, -3t) \cdot (0, 1, -1) + \int_0^1 ((1-t)^3, 0, -3t) \cdot (1, 0, -1) \\ &= \int_1^0 0 + \int_1^0 3t + \int_0^1 (1+3t^2-t^3) = 0 - \frac{3}{2} + 1 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



**Ej 7.** Verificamos ahora el teorema con  $\mathbf{g}(x, y, z) = (x+y, 2x, z)$  para el hiperboloide  $z^2 = 1+x^2+y^2$ , con  $1 \leq z \leq 2$ , tratado en el ejemplo 6 de 6.1.

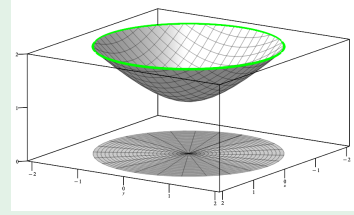
$$\operatorname{rot} \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & 2x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1), \text{ que es el campo } \mathbf{f} \text{ integrado allí.}$$

Ahora escogeremos la  $\mathbf{n}$  hacia arriba y será  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 3\pi$ .

Parametrizamos la  $\partial S$  en el sentido adecuado para Stokes:

$$\mathbf{c}(t) = (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t, 2), \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{Y es entonces: } \oint_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}(c+s), 2\sqrt{3}c, 2) \cdot (-\sqrt{3}s, \sqrt{3}c, 0) dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} (2c^2 - s^2 - sc) dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (3 \cos 2t + 1) dt = 3\pi, \text{ como debía.} \end{aligned}$$



**Ej 8.** Comprobemos otra vez Stokes, ahora para el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, 1, y)$  y la superficie  $S$  descrita por  $y+z=0$  y  $x^2+y^2 \leq 4$ .

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & 1 & y \end{vmatrix} = (1, 1, 0). \quad \begin{aligned} \mathbf{r}(x, y) &= (x, y, -y) \text{ con } D = B_2(\mathbf{0}), \\ \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y &= (-f_x, -f_y, 1) = (0, 1, 1). \end{aligned}$$

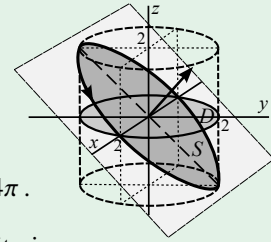
$$\rightarrow \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (-y, 1, y) \cdot (0, 1, 1) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r - r^2 \sin \theta) dr d\theta = 4\pi.$$

O bien, sin parametrizar: viendo el plano, es  $\mathbf{n} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  su normal unitaria.

Luego  $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{2}} dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{área de } S = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2$ . [El área de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$  es  $\pi ab$ ].

La elipse  $\partial S$  (en sentido correcto) se puede parametrizar:  $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, -2 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= 2 \int_0^{2\pi} (-2 \sin t, 1, 2 \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, -\cos t) dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t + \cos t - 2 \sin t \cos t) dt = 4\pi. \end{aligned}$$
 [Se anulan todas menos la integral de la constante].



**Ej 9.** Comprobemos Stokes para la superficie  $z = 4 - 4x^2 - y^2$  con  $z \geq 0$  y  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, 2x, 1 + yz)$ .

La parametrización más sencilla de la elipse que limita  $S$  (en el sentido del dibujo) es:  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 2 \sin t, 0)$ .

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (2 \sin t, 2 \cos t, 1) \cdot (-\sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t - 2 \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} (1 + 3 \cos 2t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Una posible parametrización de la superficie  $S$  es

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 4 - 4x^2 - y^2), \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (8x, 2y, 1), \quad (x, y) \in D, \text{ región elíptica.}$$

[El **pvf** apunta en el sentido adecuado al recorrido de  $\partial D$  para aplicar Stokes].

$$\text{Ahora calculamos la integral de superficie de } \operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & 2x & 1 + yz \end{vmatrix} = (z, 0, 1).$$

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [8x(4 - 4x^2 - y^2) + 1] dx dy = \iint_D 1 \quad [= \text{área de } D = \pi \cdot 2 \cdot 1].$$

Para hallar el área integrando hacemos (ejemplo de 4.1):  $x = \cos \theta$ ,  $y = 2 \sin \theta$ , con  $J = 2r \rightarrow$

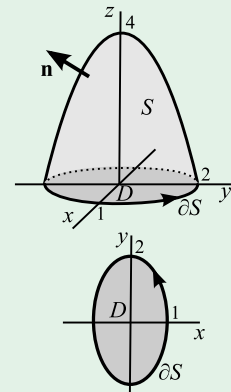
$$\text{Área de } D = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r dr d\theta = 2\pi. \quad [\text{Sin usar la imparidad, saldría } \int_0^{2\pi} \int_0^1 16r^2 c(4 - 4r^2) dr d\theta = 0].$$

$$[\text{En cartesianas (tras simplificar) aparece: } \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\pi].$$

También podíamos parametrizar  $S$  usando las polares anteriores típicas de las elipses:

$$\mathbf{r} = (r \cos \theta, 2r \sin \theta, 4 - 4r^2), \quad \begin{aligned} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & 2s & -2r \\ -rs & 2rc & 0 \end{vmatrix} = 2r(8r \cos \theta, 4r \sin \theta, 1).$$

$$\text{Con ellas queda: } \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r(4 - 4r^2, 0, 1) \cdot (8r \cos \theta, 4r \sin \theta, 1) dr d\theta = 2\pi \text{ como antes.}$$



- Sean  $\mathbf{x} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ . Hallar y dibujar  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  y  $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$ , y hallar el módulo de estos 3 vectores. Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz para  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . ¿Forman  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  un ángulo agudo u obtuso entre ellos? Hallar la distancia de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  y el ángulo formado por  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$ .
- Sean  $\mathbf{x} = (2, 0, -3)$ ,  $\mathbf{y} = (0, 1, 3)$ . Hallar  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  e  $\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ . Encontrar dos vectores unitarios  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  que no sean múltiplo uno del otro y que ambos sean ortogonales a  $\mathbf{x}$ .
- Si  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , calcular  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ,  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  y  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .
- a) Dar tres expresiones paramétricas distintas del segmento que une los puntos  $(-1, 0)$  y  $(1, 1)$ .  
b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $(-2, 7)$  y es perpendicular al vector  $4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ .
- Hallar la ecuación de los planos que cumplen las siguientes propiedades:
  - Pasa por los puntos  $(1, 3, 2)$ ,  $(4, -1, 1)$  y  $(3, 0, 2)$ .
  - Es perpendicular a la recta  $(3, 0, 2)t + (3, -1, 1)$  y pasa por  $(5, -1, 0)$ .
  - Contiene a la recta  $(-1, 1, 2)t + (3, 2, 4)$  y es perpendicular al plano  $2x + y - 3z + 4 = 0$ .
- Sean  $\mathbf{p} = (1, 0, -1)$ ,  $\mathbf{q} = (-2, 2, 1)$ . a) Hallar  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$  y  $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})$ . Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz. Hallar la distancia de  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$  y el ángulo que forman.  
b) Escribir una expresión paramétrica y la expresión cartesiana del plano que contiene a  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ .  
c) Dar dos expresiones paramétricas del segmento que une  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  que lo describan en sentidos opuestos.
- Dibujar los siguientes subconjuntos de  $\mathbf{R}^2$ , identificar su interior, su frontera y su cierre y precisar si son o no abiertos, cerrados, acotados y compactos:  

$$A = \{(x, y) : |x| < 1, |y| \leq x^2\} \quad B = \{\mathbf{x} : 1 < \|\mathbf{x}\| < 2, \mathbf{x} \cdot (1, 1) < 0\} \quad C = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = q, q \in \mathbf{Q}, q \leq 1\}$$
- Probar que si  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos en  $\mathbf{R}^n$  entonces  $A \cap B$  es también un abierto. ¿Necesariamente es un abierto la intersección de una sucesión infinita de conjuntos abiertos?
- Con las curvas de nivel y algunas secciones dibujar las gráficas de los siguientes campos escalares:
  - $f(x, y) = 4 - 2x - y$
  - $f(x, y) = |y|$
  - $f(x, y) = 4x^2 + y^2$
  - $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$
- Dibujar en el espacio las siguientes superficies:
  - $z^2 = 4 - x^2 - 4y^2$
  - $z^2 = x^2$
  - $z^2 = 1 + x^2 + y^2$
  - $z^2 = x^2 + y^2 - 1$
- Obtener información sobre la gráfica de  $f$  y estudiar en qué puntos tiene límite, si  $f(x, y)$  es:
  - $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$
  - $\frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$
  - $\frac{x^2}{y}$
  - $\log(x^2 + y^2)$
  - $\arctan \frac{1}{x^2 + y^2}$
  - $\text{th} \frac{x^6}{y^2}$
- Determinar los puntos en que son continuos los campos escalares:
  - $f(x, y) = \sqrt{16 - y^4}$
  - $\begin{cases} g(x, y) = \frac{x^2y e^{-y}}{x^4 + 4y^2} \\ g(0, 0) = 0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} h(x, y) = xy \cos \frac{1}{y} \\ h(x, 0) = 0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} k(x, y) = e^{-1/xy} \\ k(x, 0) = k(0, y) = 0 \end{cases}$
- Estudiar en qué puntos del plano son continuas y tienen límite: a)  $f(x, y) = \frac{\text{sen } xy}{x^2 + y^2}$ , b)  $h(x, y) = \frac{\text{sen } xy}{xy}$ .
- Probar que  $f(x, y) \rightarrow L$  si  $(x, y) \rightarrow (a, b) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)) = L$  (límites iterados).  
 Sea  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Probar que  $f$  no tiene límite en  $(0, 0)$  hallando los límites iterados.  
 Sea  $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ . Probar que los límites iterados coinciden, pero que no tiene límite en  $(0, 0)$ .
- Hallar, si existen, los límites de a)  $f(x, y, z) = \frac{1 - e^{xyz}}{x}$ , b)  $g(x, y, z) = \frac{x^2 - 1}{y + z - 1}$ , cuando  $(x, y, z)$  tiende a:
  - $(0, 0, 0)$
  - $(0, 1, 0)$
  - $(1, 1, 1)$
  - $(1, 1, 0)$

1. Hallar  $f_x$  y  $f_y$  en todos los puntos en que estén definidas para:

$$f(x, y) = e^{3x+x^4y^2} \quad g(x, y) = \log|y-x^2| \quad \begin{cases} h(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{sen}(xy) \\ h(x, 0) = h(0, y) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ k(0, 0) = 0 \end{cases}$$

2. Sea  $f(x, y) = \frac{x^3}{y^2}$ ,  $f(x, 0) = 0$ . Dibujar sus curvas de nivel  $f = 0, \pm 1, \pm 8$ . Precisar los puntos en que  $f$  es continua. Calcular, si existen, el  $\nabla f$  y la derivada según el vector  $(\frac{4}{3}, \frac{3}{5})$  en i)  $(0, 0)$  y en ii)  $(1, 1)$ .
3. Sean: a)  $f(x, y) = xy$ ; b)  $g(x, y) = y^2$ ; c)  $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ . Dibujar algunas curvas de nivel y el vector gradiente  $\nabla f$  en algunos puntos. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto  $(1, 1)$ .
4. Sea  $f(x, y) = \frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$ . Hallar en  $(0, 0)$  sus parciales y, con la definición, su derivada según el vector  $(1, -1)$ . Estudiar si  $f$  es continua en  $(0, 0)$ . Precisar si  $f$  es diferenciable o no en  $(0, 0)$ .
5. Sea  $f(x, y) = y \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$ . Estudiar en qué puntos: a) es continua, b) existen las parciales, c) es diferenciable. Hallar (si existe) la derivada de  $f$  según  $\mathbf{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  en el punto  $(1, 0)$ .
6. Sea  $f(x, y) = \frac{x^3}{y-1}$ ,  $f(x, 1) = 0$ . Estudiar si  $f$  es continua y diferenciable en el punto  $(0, 1)$ . Precisar en la dirección de qué vector unitario es mínima la derivada direccional en el punto  $(1, 0)$  y hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en ese punto.
7. Sea  $f(x, y) = \frac{x^6}{y^2}$ , con  $f(x, 0) = 0$ . Dibujar las curvas  $f(x, y) = 1$  y precisar si  $f$  es continua en  $(0, 0)$ . Hallar, si lo hay, un  $\bar{\mathbf{u}}$  unitario para el que la derivada  $D_{\bar{\mathbf{u}}}f(1, -1)$  tenga por valor: i) 0, ii) 2, iii) 8.

8. Precisar si i) son continuos, ii) tienen derivadas parciales, iii) son diferenciables, en el punto  $(0, 0)$ :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x, y) = (y - x^3)^{1/3} & \text{b) } \begin{cases} g(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} \\ g(0, 0) = 0 \end{cases} & \text{c) } r(x, y) = \sqrt{|xy|} \\ \text{e) } \begin{cases} h(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ h(0, 0) = 0 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} k(x, y) = \frac{3x^2 y^2 - x^6}{x^2 + y^2} \\ k(0, 0) = 0 \end{cases} & \text{g) } \begin{cases} l(x, y) = \frac{x e^{x^2 + y^2} - x}{x^2 + y^2} \\ l(0, 0) = 0 \end{cases} \end{array}$$

9. Sea  $f(x, y) = \frac{2xy + y^3}{x^2 + y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$ . Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0$ . Estudiar si tiene derivadas parciales, si es continua y si es diferenciable en  $(0, 0)$ . Hallar un  $\bar{\mathbf{u}}$  unitario tal que  $D_{\bar{\mathbf{u}}}f(-2, 2) = 0$ .
10. Sea  $f(x, y)$  diferenciable en todo  $\mathbf{R}^2$ . Se sabe que  $f(1, 2) = 2$  y que sus derivadas direccionales en el punto  $(1, 2)$  según los vectores  $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  y  $(3/5, 4/5)$  son  $-\sqrt{2}$  y 3, respectivamente. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal a gráfica de  $f(x, y)$  en el punto  $(1, 2)$ .
11. Sea  $f(x, y, z) = y e^{2x-z}$ . Hallar  $\nabla f(1, -1, 2)$  y escribir uno de los infinitos vectores unitarios  $\mathbf{u}$  para los que la derivada de  $f$  en  $(1, -1, 2)$  en la dirección del vector  $\mathbf{u}$  es 0.
12. Sea  $f(x, y, z) = ax^2y + by^2z + cz^2x$ . Hallar las constantes  $a, b$  y  $c$  para las que la derivada direccional en el punto  $(1, 1, 1)$  es máxima en la dirección de  $\mathbf{u} = (1, 5, 0)/\sqrt{26}$  y vale 13.
13. Calcular la derivada direccional de  $f(x, y, z) = \arctan(xy) - zy$  en el punto  $(0, 1, 1)$  en la dirección del vector  $(3, 0, 4)$  y la ecuación del plano tangente a  $f(x, y, z) = -1$  en el mismo punto.
14. Hallar los planos tangentes a las superficies en los puntos que se indican:  
 a)  $z = x^2 + y^3$  en  $(3, 1, 10)$     b)  $x^2 + (y-2)^2 + 2z^2 = 4$  en  $(1, 3, -1)$     c)  $yz = \log(x+z)$  en  $(0, 0, 1)$
15. Sea la superficie  $S$  dada por  $F(x, y, z) \equiv e^{z-x^2} - y^2 = 1$ . a] Escribir en  $(-1, 0, 1)$  la ecuación de su plano tangente y una expresión paramétrica de la recta normal a  $S$ . b] Volver a calcular el plano con la otra expresión de los planos tangentes tras despejar  $z$ . c] Hallar el otro punto en que la recta normal corta  $S$ .

16. Hallar las parciales de segundo orden de:  $f(x, y) = x e^{x-y}$ ,  $g(x, y) = \frac{\cos(xy)}{x}$ ,  $h(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .
17. Sea  $f(x, y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ ,  $f(0,0) = 0$ . Hallar  $f_x$  y  $f_y$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Probar que  $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ,  $f_{xy}(0,0) = -1$ ,  $f_{yx}(0,0) = 1$ . ¿Por qué las derivadas cruzadas no coinciden en  $(0, 0)$ ?
18. Comprobar que las siguientes funciones  $u(x, t)$  satisfacen la 'ecuación de ondas'  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ :
- a)  $u(x, t) = \text{sen}(x-t)$     b)  $u(x, t) = \text{sh } 2t \text{ ch } 2x$     c)  $u(x, t) = \arctan(x+t)$     d)  $u(x, t) = \int_{x-t}^{x+t} e^{-s^2} ds$
19. Hallar los desarrollos de Taylor de orden 2 en torno a los puntos que se indican:
- a)  $f(x, y) = (x-y)^2$  en  $(1, 2)$     b)  $g(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$  en  $(0, 0)$     c)  $h(x, y) = e^{xy} \cos(x+y)$  en  $(0, \pi)$
20. Sea  $f(x, y) = \frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{x^2+y^2}$ ,  $f(0,0) = 0$ . a) Desarrollar el numerador por Taylor hasta orden 2 en torno a  $(0,0)$ . b) Precisar si  $f$  en  $(0,0)$ : i) es continua, ii) tiene derivadas parciales, iii) es diferenciable.
21. Sea la curva descrita por  $\mathbf{c}(t) = (e^t, t^2)$ ,  $t \in [-2, 2]$ . Hallar: i) expresiones de la recta tangente en el punto  $(e, 1)$ , ii) un vector unitario normal a la curva en ese punto, iii) el vector aceleración para  $t=0$ , iv) el punto de corte y el ángulo de intersección con la curva  $\mathbf{r}(s) = (s, s-1)$ ,  $s \in [0, 5]$ .
22. Calcular el plano tangente a la superficie  $x^2 + y^2 + 3z^2 = 16$  en el punto  $(3, 2, 1)$  y hallar el ángulo con el que la curva  $\bar{\mathbf{c}}(t) = (3e^t, 2e^t, e^{3t})$  corta esa superficie.
23. Sean  $f(x, y) \in C^2$  y  $h(t) = f(e^t, \cos t)$ . Utilizando la regla de la cadena hallar la expresión de  $h''(t)$  en función de las derivadas de  $f$ . Comprobar la expresión anterior en el caso de que  $f(x, y) = xy$ .
24. Sea  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ . a) Dibujar las curvas  $f = 8, 5, 0, -7$ , el corte con  $x=0$  y la gráfica. b) Hallar un  $\mathbf{u}$  unitario tal que  $D_{\mathbf{u}}f(2,1) = 0$ . c) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica en el punto  $(2, 1)$ . d) Si  $\mathbf{c}(t) = (2t, t^3)$ , hallar la derivada de  $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$  en  $t=1$  utilizando la regla de la cadena.
25. Sea  $f(x, y) = \frac{x^4}{y^2}$ ,  $f(x, 0) = 0$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0, 1, 4$ . b) Precisar si  $f$  es continua, tiene derivadas parciales y es diferenciable en  $(0, 0)$ . c) Hallar un  $\mathbf{u}$  unitario tal que  $D_{\mathbf{u}}f(1, -1) = -4$ . d) Si  $\mathbf{c}(t) = (e^t, t-1)$ , calcular, mediante la regla de la cadena, la derivada de  $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$  en  $t=0$ .
26. Sea  $f(x, y) = \frac{x^4}{y^2 + x^4}$ ,  $f(0,0) = 0$ . a) Dibujar  $f = 0, \frac{1}{2}, 1$  y  $\nabla f(1, -1)$ . b) Precisar si existen  $f_x$  y  $f_y$  y si  $f$  es continua y diferenciable en  $(0,0)$ . c) Hallar el  $\mathbf{u}$  unitario que hace  $D_{\mathbf{u}}f(1, -1)$  máxima y el valor de la derivada. d) Si  $\mathbf{c}(t) = (t+1, t^2-1)$  y  $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$ , calcular  $h'(0)$  con la regla de la cadena en  $\mathbf{R}^n$ .
27. Sea  $f(x, y) = \frac{x^4}{3y^2 + x^6}$ ,  $f(0,0) = 0$ . a) Precisar si existen  $f_x$ ,  $f_y$  y si es continua y diferenciable en  $(0,0)$ . b) Hallar el plano tangente a su gráfica en  $(1,1)$ . c) Si  $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{3t})$ , calcular, utilizando la regla de la cadena en  $\mathbf{R}^n$ , la derivada de  $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$  en  $t=0$ .
28. Sean  $\mathbf{f}(u, v) = (e^{u+2v}, 2u+v)$  y  $\mathbf{g}(x, y, z) = (2x^2 - y + 3z^3, 2y - x^2)$ . Calcular la matriz de la diferencial de  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  en  $(2, -1, 1)$ , i) utilizando la regla de la cadena, ii) componiendo y diferenciando.
29. Sea  $f(x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$ . a) Hallar su plano tangente en el punto  $(0, 2)$  y la recta tangente a la curva de nivel de  $f$  que pasa por dicho punto. b) Si  $h(u, v) = f(u^3 + v^2 - 1, e^v + 1)$ , hallar la derivada direccional de  $h$  según el vector  $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  en el punto  $(u, v) = (1, 0)$ .
30. Escribir, con la regla de la cadena, la ecuación en derivadas parciales  $(y-2)u_y - xu_x = x^2y$  en las nuevas variables  $s = xy - 2x$ ,  $t = x$ . Comprobar que es solución  $u(x, y) = f(xy - 2x) + x^2 - x^2y$ ,  $\forall f \in C^1$ .
31. Escribir la ecuación en derivadas parciales  $y^2u_{yy} - x^2u_{xx} = 0$  en las nuevas variables  $s = xy$ ,  $t = \frac{x}{y}$ . Comprobar que  $u(x, y) = f(xy) + xg(\frac{x}{y})$ , con  $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ , cumple la ecuación.
32. Las ecuaciones  $u = f(x, y, z)$ ,  $x = s^2 + t^2$ ,  $y = s^2 - t^2$ ,  $z = 2st$  definen  $u$  en función de  $s$  y  $t$ :  $u = F(s, t)$ . Expresar las derivadas segundas de  $F$  respecto a  $s$  y  $t$  en función de las derivadas de  $f$  (es  $f \in C^2$ ).

33. Sean  $\mathbf{a} = (-1, 0, 3)$  y  $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz, y^2, x)$ . a) Calcular: i)  $\mathbf{a} \times \mathbf{f}(\mathbf{a})$ , ii) el ángulo que forman  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ , iii)  $\text{div } \mathbf{f}$ , iv)  $\nabla(\text{div } \mathbf{f})$ , v)  $\text{rot } \mathbf{f}$  y vi)  $\mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{f}$ . b) Precisar el punto de corte con el plano  $z=5$  de la recta perpendicular a la superficie  $\text{div } \mathbf{f} = 3$  en el punto  $\mathbf{a}$ .
34. Sean  $\mathbf{g}(x, y, z) = (x^2 + z, x, y + z^2)$ ,  $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$  y la curva  $\mathbf{c}(t) = (e^t, t^2, -e^{-t})$ . a) Hallar  $\text{div } \mathbf{g}$ ,  $\text{rot } \mathbf{g}$ , el determinante jacobiano  $|\mathbf{Dg}|$ , el vector  $\mathbf{a} \times \mathbf{g}(\mathbf{a})$  y el ángulo que forman  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ . b) Probar que la curva  $\mathbf{c}(t)$  corta perpendicularmente en el punto  $\mathbf{a}$  a la superficie  $\text{div } \mathbf{g} = 0$ .
35. Sean  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, 1, y^2)$ ,  $g(x, y, z) = z$ . a) Hallar  $\text{div } \mathbf{f}$ ,  $\text{rot } \mathbf{f}$ ,  $\nabla g$ ,  $\Delta g$ ,  $\text{rot}(\nabla g)$ ,  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{f})$ ,  $\nabla(\mathbf{f} \cdot \nabla g)$ ,  $\text{rot}(\mathbf{f} \times \nabla g)$ ,  $\text{rot}(\nabla(\mathbf{f} \cdot \nabla g))$ ,  $\text{div}(\text{rot}(\mathbf{f} \times \nabla g))$ . b) Probar que en general es:  $\text{rot}(g \mathbf{f}) = g \text{rot } \mathbf{f} + \nabla g \times \mathbf{f}$ ,  $\text{div}(g \mathbf{f}) = g \text{div } \mathbf{f} + \nabla g \cdot \mathbf{f}$ , y comprobarlo con los campos anteriores.
36. Sean  $F(x, y, z) = x^4 + 5y^2 + z^4 + 2xyz$ , la superficie  $S$  dada por  $F = 9$  y la curva  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, t)$ , con  $t \geq 0$ . a) Escribir en el punto  $\mathbf{p}$  de corte entre ambas el plano tangente a  $S$  y la recta tangente a la curva. Hallar el ángulo con el que la recta corta el plano. b) Si  $h(t) = F(\mathbf{c}(t))$ , calcular, mediante la regla de la cadena en  $\mathbf{R}^n$ , el valor de  $h'(1)$ . c) Calcular paso a paso, a partir de la definición, el  $\text{rot}(\nabla F)$ .
37. Sea  $\bar{\mathbf{f}}(x, y, z) = (xz^2, -x^2y, -y^2z)$ . a) Hallar  $\text{div } \bar{\mathbf{f}}$ ,  $\nabla(\text{div } \bar{\mathbf{f}})$  y  $\text{rot } \bar{\mathbf{f}}$ . b) Obtener la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie  $\text{div } \bar{\mathbf{f}} = 0$  en el punto  $(3, 4, 5)$ . ¿Corta esa recta alguno de los ejes? c) Hallar  $\mathbf{D}\bar{\mathbf{f}}$ . Si  $\bar{\mathbf{c}}(t) = (3, 5 - t^2, 5t)$  y  $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{f}} \circ \bar{\mathbf{c}}$ , hallar  $\bar{\mathbf{c}}'(1)$  y, con la regla de la cadena,  $\bar{\mathbf{r}}'(1)$ .
38. Sea  $\bar{\mathbf{f}}(x, y, z) = (xz^2, yx^2, zy^2 - 3z^2)$ . a) Calcular: i)  $\text{div } \bar{\mathbf{f}}$ , ii)  $\nabla(\text{div } \bar{\mathbf{f}})$ , iii)  $\Delta(\text{div } \bar{\mathbf{f}})$  y iv)  $\text{rot } \bar{\mathbf{f}}$ . b) Dibujar la superficie  $\text{div } \bar{\mathbf{f}} = 0$ , hallar la recta perpendicular a ella en el punto  $(1, 2, 1)$  y precisar su punto de corte con el plano  $x = 0$ .
39. Si  $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz, y^2, 2xz)$  y  $\mathbf{c}(t) = (1, t, 1 - t^3)$ , a) hallar: i)  $\text{div } \mathbf{f}$ , ii)  $\text{rot } \mathbf{f}$ , iii)  $\mathbf{Df}$ , iv)  $\mathbf{Jf}$ , v)  $\mathbf{c}'(-1)$ . b) Si  $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{c})(t)$ , calcular  $\mathbf{r}'(-1)$  con la regla de la cadena en  $\mathbf{R}^n$ . c) Hallar la recta tangente en  $(1, -1, 2)$  a la curva dada por  $\mathbf{c}$  y otro punto en el que la tangente corta la curva.
40. Comprobar que las siguientes funciones  $u(x, y)$  satisfacen la ‘ecuación de Laplace’  $\Delta u = 0$ :  
a)  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$     b)  $u(x, y) = \text{sen } x \text{ ch } y$     c)  $u(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$     d)  $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$
41. Sea  $f(x, y) = \frac{3xy^2 - x^3}{x^2 + y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$ . a) Probar que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ . Hallar  $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$  y la derivada  $D_{(1, 2)}f(0, 0)$ . Precisar si  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ . b) Dibujar las curvas de nivel  $f = 0$  y dar un vector  $\mathbf{v}$  tal que  $D_{\mathbf{v}}f(-\sqrt{3}, 1) = 0$ . c) Calcular  $\Delta f(1, 1)$  [mejor en polares].
42. Sea  $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/4}$ . Dibujar aproximadamente su gráfica. Hallar  $\nabla f$  en cartesianas y polares. Estudiar en qué puntos es  $f$  diferenciable. Calcular  $\Delta f(0, 1)$ . Determinar en qué punto del segmento que une  $(0, 1)$  y  $(-2, 0)$  y en la dirección de qué vector el campo  $f$  crece más rápidamente.
43. Sea  $\begin{cases} g(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ g(0, 0) = 0 \end{cases}$ . a) Precisar si  $g$  es continua, si tiene parciales y si es diferenciable en  $(0, 0)$ . b) Calcular  $\Delta g$  en cartesianas y en polares (y comprobar que coinciden). c) Determinar si  $g$  crece o decrece en el punto  $(4, 3)$  en la dirección de  $\mathbf{v} = (2, -1)$  y hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel de  $g$  que pasa por  $(4, 3)$ . d) Si  $\mathbf{c}(t) = (t^2, 3t - 3)$ , hallar, con la regla de la cadena en  $\mathbf{R}^n$ , la derivada de  $h(t) = g(\mathbf{c}(t))$  en  $t = 2$ .
44. Sea  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ , y  $\nabla f(2, 1)$ . Hallar el vector unitario  $\mathbf{u}$  tal que la derivada  $D_{\mathbf{u}}f(2, 1)$  sea máxima. Hallar  $\text{div}(\nabla f)$  en cartesianas y polares.
45. Sea  $\mathbf{c} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Probar que en coordenadas polares  $\mathbf{c}''(t) = \mathbf{a}(t) = (r'' - r(\theta')^2) \mathbf{e}_r + (r\theta'' + 2r'\theta') \mathbf{e}_\theta$ . Sea  $\mathbf{c}(t)$  definida por  $r(t) = 2$ ,  $\theta(t) = \log t$ ,  $t \in [1, e^{2\pi}]$ . Dibujar la curva. Calcular  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{a}(t)$  si  $t = 1$ ,  $t = e^\pi$  y  $t = e^{2\pi}$ . Comprobar el resultado trabajando con la expresión cartesiana de  $\mathbf{c}$ .



- Sean las curvas: a)  $2x^2y - y^3 - x^5 = 0$ , b)  $x - 2 \log x + 3y - 6 \log y = 4$ , c)  $y^2 - x e^{x-xy} = 0$ .  
 i) Probar que definen a  $y$  como función de  $x$  cerca del punto  $(1, 1)$ , hallar la recta tangente a la curva en ese punto y calcular  $y''(1)$ .  
 ii) Encontrar puntos de estas curvas en los que no se pueda aplicar el teorema de la función implícita.
- Sea  $F(x, y) = e^{x+y} - 2y$ . a) Encontrar el desarrollo de Taylor de orden dos de  $F$  en torno a  $(0, 0)$ .  
 b) Si  $h(u, v) = F(u - v^3, v + u - 2)$ , hallar, utilizando la regla de la cadena en  $\mathbf{R}^n$ ,  $\nabla h$  en  $(u, v) = (1, 1)$ .  
 c) Probar que  $F = 1$  define una  $y(x)$  de  $C^1$  cerca del punto  $(0, 0)$  y hallar la recta tangente a la curva en ese punto. Hallar un punto de la curva  $F = 1$  donde no sea aplicable el teorema de la función implícita.
- Sean  $F(x, y, z) = z^3 + x^2 + y^2$ , la superficie  $S$  dada por  $F = 10$  y el punto  $\mathbf{p} = (-1, 1, 2) \in S$ . a) Hallar en  $\mathbf{p}$  el plano tangente a  $S$ , su recta normal y el punto en que la recta corta  $z = 0$ . b) Dibujar los cortes de  $S$  con  $z = 0$  y  $x = 0$  y su gráfica aproximada [ $\sqrt{10} \approx 3.16$ ,  $\sqrt[3]{10} \approx 2.15$ ]. c) Comprobar que el teorema de la función implícita asegura que  $F = 10$  define una  $z(x, y)$  de  $C^1$  cerca de  $\mathbf{p}$  y calcular  $z_x$  y  $z_y$  en  $(-1, 1)$  derivando implícitamente. ¿Hay  $z(x, y)$  implícita  $C^1$  cerca de  $(1, 3, 0)$ ?
- Sea  $F(x, y, z) = x^3 - 2yz + e^x z^2$ . a) Hallar la ecuación del plano tangente a  $F = 0$  en  $(0, 1, 2)$ .  
 b) Probar que  $F = 0$  define implícitamente una  $z(x, y)$  de  $C^1$  cerca de  $(0, 1, 2)$  y dar el valor de  $z_x(0, 1)$ .  
 c) Encontrar un  $\mathbf{u}$  unitario que sea perpendicular al vector  $(1, 0, 1)$  y tal que  $D_{\mathbf{u}}F(0, 1, 2) = 0$ .
- Utilizando el teorema general de la función implícita:  
 a) Hallar la recta tangente a la curva intersección de  $z = x^2 + y^2$  y  $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$  en el punto  $(-1, 1, 2)$ .  
 b) Probar que  $\begin{cases} y^2 + 2xz + u^2 = 4 \\ yzu + x - uv = 1 \end{cases}$  define  $u(x, y, z)$  y  $v(x, y, z)$  cerca de  $(1, 1, 1, 1, 1)$  y hallar  $v_y(1, 1, 1)$ .
- Precisar dónde el teorema de la función inversa asegura inversa local, estudiar si hay inversa global y dar una expresión para  $u_x$  (si existe) derivando implícitamente:  
 a)  $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x = u \\ y = v + u^2 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} x = v^2 - u^2 \\ y = uv \end{cases}$       d)  $\begin{cases} x = e^{v+w} \\ y = u - w \\ z = u - v \end{cases}$
- Sea  $f(x, y) = x \sin 2y$ . Hallar  $\mathbf{v}$  unitario tal que  $D_{\mathbf{v}}f(1, 0)$  sea: i) máxima, ii) mínima, iii) 0, iv) 1. Hallar su desarrollo de Taylor de orden 2 en  $(0, 0)$  y precisar si tiene o no un extremo local en ese punto.
- Localizar y clasificar los puntos críticos de:  
 a)  $f(x, y) = 3x - 3y - x^2 + xy - y^2$       b)  $g(x, y) = x^3 - 3x - 3x^2y + y^2 + 3y$   
 c)  $h(x, y) = x - x^3 - xy^2$       d)  $k(x, y) = 2y^3 + 3x^2y^2 - 6xy - 6y$   
 e)  $G(x, y, z) = x^4 + 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2y$       f)  $H(x, y, z) = x^3 - 3y^2 - z^2 - 6xy - 9x + 2z$
- Hallar y clasificar los puntos críticos de: a)  $f(x, y) = (x-1)^3 + (y-x)^2 - 3x$ , b)  $g(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$ . En caso de existir extremos precisar si son o no absolutos.
- Determinar  $p$  sabiendo que  $f(x, y) = x^3 + x^2y + y^2 + 2y + p$  tiene un mínimo local con valor 0.
- Sea  $h(x, y) = y^2 - 2x^2y + 2x^4 - 2x^2$ . a) Clasificar sus puntos críticos. b) Probar, completando cuadrados, que hay mínimos globales. c) Escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 de  $h$  en torno al punto  $(1, 1)$ . d) Hallar  $y'(1)$  si  $y(x)$  viene definida implícitamente por  $h = 0$  cerca de  $(1, 2)$ , probando que existe.
- a) Probar que  $F(x, y, z) \equiv 3x^2 + 2xz + 2y^2 + 3z^2 = 24$  define implícitamente una  $z = f(x, y)$  en un entorno del punto  $P = (-1, 0, 3)$ . b) Comprobar que  $(-1, 0)$  es punto crítico de  $f$  hallando implícitamente sus derivadas. c) Sabiendo que las parciales  $f_{xx}$  y  $f_{yy}$  son negativas en  $(-1, 0)$ , clasificar el punto crítico.
- Hallar los valores máximo y mínimo de  $f(x, y) = 5 - x^2 + xy - y^2$  sobre el círculo  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

- 14.** Sea  $A$  la región interior a la elipse  $5x^2+6xy+5y^2=8$ . a) Hallar el punto de la elipse con coordenada  $x$  máxima. b) Calcular las distancias máxima y mínima de los puntos de  $\partial A$  al origen de coordenadas. c) Encontrar los extremos absolutos de  $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$  sobre  $A$ .
- 15.** Sea  $g(x, y) = y^3 - 2x^2 + 2xy - 2y^2$ . a) Encontrar sus extremos locales. ¿Posee  $g$  extremos absolutos? b) Hallar los puntos críticos de  $g$  sobre  $y - 2x = 1$  con multiplicadores de Lagrange. c) Justificar que  $g(x, y) = 0$  define una función  $y(x)$  de  $C^1$  cerca de  $(0, 2)$  y dar la recta tangente a  $y(x)$  en ese punto. d) Si  $\bar{c}(t) = (t-1, t+t^2)$  y  $h(t) = g(\bar{c}(t))$ , calcular  $h'(1)$  utilizando la regla de la cadena en  $\mathbf{R}^n$ .
- 16.** Hallar los extremos de  $f(x, y) = 1 - 2x^2 + xy - y^2$  sobre: i)  $x^2 + y^2 \leq 1$ , ii)  $y + x^2 = 4$ , iii)  $y^2 - x^2 + 2x = 1$ .
- 17.** Hallar los máximos y mínimos de estas funciones cuando se restringen a las regiones indicadas:  
a)  $f(x, y) = 6x^2 + 6y^2 - 18y + 17$ , con  $(x, y)$  sobre la curva  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ .  
b)  $g(x, y, z) = x + y + z$ , sobre la superficie esférica dada por  $x^2 + y^2 + z^2 + x - y + z = \frac{9}{4}$ .
- 18.** Calcular los extremos absolutos de  $f(x, y, z) = x - y + 2z$  en la región  $x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 2$ .
- 19.** La suma de tres reales positivos es 27. Encontrar su producto máximo.
- 20.** Hallar los puntos de la curva intersección de  $x^2 + z^2 = 2$  e  $y + z = 0$  que hacen máximo y mínimo el valor de  $f(x, y, z) = 2x + 3y + z$ .

1. Calcular los valores de las siguientes integrales sobre el rectángulo  $R = [0,1] \times [-1,1]$  :

a)  $\iint_R (x^2+y^2) dx dy$     b)  $\iint_R y e^{xy} dx dy$     c)  $\iint_R |x-y| dx dy$     d)  $\iint_R (xy)^2 \cos x^3 dx dy$

2. Calcular las integrales dobles  $\iint_D f dx dy$  de las  $f$  que se dan en los recintos  $D \subset \mathbf{R}^2$  que se indican:

- a)  $f(x, y) = \log(xy)$ ,  $D$  rectángulo  $[1, 2] \times [1, 2]$ .
- b)  $f(x, y) = x^3 y$ ,  $D$  región acotada por el eje  $y$  y  $x = 4 - y^2$ .
- c)  $f(x, y) = xy$ ,  $D$  región encerrada entre  $y = x$  e  $y = x^2$ .
- d)  $f(x, y) = e^{x-y}$ ,  $D$  cuadrilátero de vértices  $(0,0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 2)$  y  $(-1, 0)$ .
- e)  $f(x, y) = \sin x$ ,  $D$  triángulo limitado por las rectas  $y = 0$ ,  $y = x$  e  $y = \pi - x$ .
- f)  $f(x, y) = x$ ,  $D$  triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 4)$  y  $(-4, 7)$ .
- g)  $f(x, y) = x^2 + 6xy^2$ ,  $D$  limitada por  $y = x - x^2$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = 0$  y  $x = 2$ .

3. Evaluar la integral  $\int_0^2 \int_y^2 e^{-x^2} dx dy$  cambiando el orden de integración.

4. Sea  $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ . a) Dibujar las curvas de nivel  $f = 0, 1, -1$ . Hallar  $\Delta f$  y  $D_{\mathbf{v}} f(0, 1)$  para  $\mathbf{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ .

b) Si  $D$  es el triángulo de vértices  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(1, 1)$ , calcular  $\iint_D f dx dy$ .

5. Calcular las siguientes integrales de dos formas: i) directamente, ii) haciendo un cambio lineal adecuado.

a)  $\iint_D (2x-y)^3 dx dy$ , con  $D$  cuadrilátero de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 2)$  y  $(1, 2)$ .

b)  $\iint_D e^{y-x} dx dy$ , para  $D$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(0, 2)$ .

6. Calcular mediante el cambio de variable  $u = y - x$ ,  $v = y + x$ , la integral  $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)} dx dy$ , con  $D$  región acotada por los ejes y la recta  $x + y = 2$ .

7. Hallar  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  con  $D$  región del primer cuadrante acotada por las curvas  $xy = 1$ ,  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $xy = 2$ ,  $x^2 - y^2 = 4$ .

8. Calcular sobre el círculo unidad  $x^2 + y^2 \leq 1$  la integral de: a)  $f(x, y) = x^3$ , b)  $g(x, y) = x^4$ .

9. Trabajando en coordenadas i) cartesianas y ii) polares, hallar las siguientes integrales dobles  $\iint_D f$  :

a)  $f(x, y) = x^2 y$ ,  $D$  parte del círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ , con  $x, y \geq 0$ .

b)  $f(x, y) = x$ ,  $D$  región definida por  $x^2 + y^2 \leq 2$ ,  $x \geq 1$ ,  $y \geq 0$ .

c)  $f(x, y) = 1$ ,  $D$  curva dada en polares por  $r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$ .

10. Sea  $g(x, y) = \frac{xy - x^3}{x^2 + y^2}$ ,  $g(0, 0) = 0$ . a) En  $(0, 0)$  hallar  $g_x$  y  $g_y$  y decidir si es  $g$  continua y diferenciable.

b) Si  $D$  es el conjunto definido por  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x, y \geq 0$ , calcular  $\iint_D g$  (mejor integrando en polares).

11. Sea  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ . a) Estudiar si tiene derivadas parciales y si es diferenciable en  $(0, 0)$ .

b) Dibujar la curva de nivel  $f(x, y) = 1$  y precisar para qué vector  $\bar{u}$  unitario es mínima  $D_{\bar{u}} f(0, -1)$ .

c) Hallar  $\iint_D f$ , siendo  $D$  el semicírculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \leq x$ .

12. Calcular el área de la región plana definida por  $x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , utilizando el cambio de variables  $x = r \cos^3 \theta$ ,  $y = r \sin^3 \theta$ .

13. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie  $z = x^2 + y$  sobre el rectángulo  $[0, 1] \times [1, 2]$ .

14. Calcular el volumen encerrado entre el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 0$  sobre el círculo de centro  $(0, 1)$  limitado por  $x^2 + y^2 = 2y$ .

15. a) Precisar si  $g(x,y) = (x^2+y^2)^{1/3}$  es diferenciable en  $(0,0)$ . b) Hallar su plano tangente en  $(2,-2)$ .  
c) Hallar el volumen del sólido acotado por su gráfica y el plano  $z=1$  (integrando en polares o cilíndricas).
16. Sea  $g(x,y) = 2e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ . a) Dibujar su corte con  $x=0$  y su gráfica. ¿Es  $g$  diferenciable en  $(0,0)$ ?  
b) Calcular el volumen del recinto limitado por la gráfica de  $g$  y el plano  $z=1$ .
17. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies  $z=x^2+y^2$  y  $z=2-x^2-7y^2$ .
18. Hallar el centro de masas de una lámina de densidad  $\sigma(r,\theta) = \cos \theta$  que ocupa la región  $r \leq \cos \theta$ .
19. Determinar el centroide de las regiones:  
a)  $\{0 \leq y \leq \sin^2 x, 0 \leq x \leq \pi\}$       b)  $\{\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
20. Calcular  $\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz$  para las funciones  $f$  y los sólidos  $V$  que se indican:  
a)  $f(x,y,z) = 2x+3y+z$ , para el paralelepípedo  $V = [1,2] \times [-1,1] \times [0,1]$ .  
b)  $f(x,y,z) = x^2 \cos z$ , con  $V$  acotado por los planos  $z=0, z=\pi, y=0, x=0, x+y=1$ .  
c)  $f(x,y,z) = e^y$ , con  $V$  limitado por los planos  $x=0, x=2, y=1, z=0, y+z=0$ .  
d)  $f(x,y,z) = xy^2z^3$ ,  $V$  limitado en  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  por  $y=x$  y  $x=1$  y la superficie  $z=xy$ .
21. Hallar  $\iiint_V xy dx dy dz$  donde  $V$  es el sólido comprendido en  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$  entre el plano  $z=-1$  y el plano tangente a la superficie  $x^2+y^2+z=4$  en el punto  $(1,1,2)$ .
22. Dados los puntos  $P = (0,2,-4)$  en rectangulares,  $Q = (4, \frac{4\pi}{3}, 3)$  en cilíndricas y  $R = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  en esféricas, escribir cada uno de ellos en los dos sistemas de coordenadas restantes.
23. Dibujar los siguientes conjuntos y expresarlos en los otros dos sistemas de coordenadas:  
 $A = \{(x,y,z) : x=0, z=-2y\}$        $B = \{(r,\theta,z) : r=1\}$        $C = \{(\rho,\theta,\phi) : \phi \leq \frac{\pi}{4}, \rho \leq 1\}$
24. Calcular  $\iiint_V \frac{y^2}{x^2+y^2} dx dy dz$ , si  $V$  es la región de  $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$  acotada por  $z=-2$  y  $z=\sin(x^2+y^2)$ .
25. Calcular en cilíndricas  $\iiint_V z dx dy dz$ , siendo  $V$  el cono limitado por  $3z^2=x^2+y^2$  y  $z=1$  (en  $z \geq 0$ ).  
Comprobar el resultado calculando la integral en otro sistema de coordenadas (más corto en esféricas).
26. a) Calcular en cartesianas y polares  $\iint_D x dx dy$ , con  $D$  parte del círculo  $x^2+y^2 \leq 2y$  con  $x \geq 0, y \geq x$ .  
b) Hallar el volumen de la parte de la esfera  $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$  situada por encima del cono  $z=\sqrt{x^2+y^2}$ , integrando en: i) cilíndricas, ii) esféricas.
27. Calcular  $\iiint_V z dx dy dz$ , siendo  $V$  el sólido limitado por las superficies:  
a)  $x=0, y=0, x+y=2, z=0, z=e^{-x}$       b)  $z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2=4$
28. Calcular el volumen de las siguientes regiones utilizando más de un sistema de coordenadas:  
a) región limitada por el cilindro  $x^2+y^2=1$  y los planos  $z=0$  y  $z=y+2$ .  
b) región acotada por el cilindro  $x^2+y^2=1$ , el plano  $z=0$  y la superficie  $z+x^2=1$ .  
c) región encerrada entre las superficies  $z=x^2+y^2$  y  $x^2+y^2+z^2=2$ .
29. Calcular la integral de  $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$  sobre el sólido comprendido entre las superficies esféricas  $x^2+y^2+z^2=1$  y  $x^2+y^2+z^2=4$ .
30. Calcular el momento de inercia de una esfera de densidad constante respecto de su diámetro.

1. Hallar la longitud de las curvas:
  - a)  $x = |t|$ ,  $y = |t - \frac{1}{2}|$ ,  $t \in [-1, 1]$ ;    b)  $y = \log x$ ,  $x \in [1, e]$ ;    c)  $y = x^{2/3}$ ,  $x \in [1, 8]$ ;
  - d)  $x = 2 \cos t - \cos 2t$ ,  $y = 2 \sin t - \sin 2t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  (cardioide);
2. Sea  $R$  la región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la curva  $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ .
  - a) Calcular el área de  $R$ .    b) Hallar la longitud del perímetro de  $R$ .
3. Hallar  $\int_c f ds$  para la  $f$  y las curvas que se indican:
  - a)  $f(x, y, z) = yz$ ,  $\mathbf{c}(t) = (t, 3t, 2t)$ ,  $t \in [1, 3]$ .
  - b)  $f(x, y, z) = x + z$ ,  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$ ,  $t \in [0, 1]$ .
4. Un alambre está sobre el tramo de espiral  $r = e^\theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . En cada punto  $(r, \theta)$  la temperatura es  $r$ . Calcular la longitud y la temperatura media del alambre.
5. Hallar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el plano  $x + y + z = 0$ , si la densidad en  $(x, y, z)$  es  $x^2$  por unidad de longitud.
6. Hallar el área de la superficie generada por el giro de
  - a)  $x = y^2$ ,  $y \in [1, 2]$
  - b)  $r = 1 + \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 alrededor del eje  $x$ .
7. Sean  $\mathbf{g}(x, y, z) = (3, z^2 - 1, 2yz)$  y  $\mathbf{c}(t) = (t^2, t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Hallar  $\operatorname{div} \mathbf{g}$  y  $\operatorname{rot} \mathbf{g}$ . Calcular las integrales de línea  $\int_c \operatorname{div} \mathbf{g} ds$  y  $\int_c \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$ .
8. Hallar  $\int_C (x^2 + y^2) dx + dy$  siendo  $C$ :
  - a)  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,
  - b)  $y = \frac{1}{2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,
  - c)  $x = 2$ ,  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ .
9. Hallar el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{f}(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$  al mover una partícula de  $(-1, 0)$  a  $(1, 0)$  siguiendo la mitad superior de la elipse  $b^2 x^2 + y^2 = b^2$ . ¿Para qué valor de  $b$  es mínimo el trabajo?
10. Calcular la integral de línea del campo  $\mathbf{f}(x, y) = (xy, 0)$  entre  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  a lo largo de:
  - a) el eje  $x$ ,
  - b)  $y = 1 - x^2$ ,
  - c)  $y = |x| - 1$ ,
  - d) la parte inferior de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ . ¿Es  $\mathbf{f}$  conservativo?
11. Sea  $\mathbf{c}(t) = (t^3, 2t^2)$ .
  - a) Hallar la longitud del tramo de curva descrita por  $\mathbf{c}$  cuando  $t \in [-1, 0]$ .
  - b) Si  $h(x, y) = e^{2x+y}$ , hallar la integral de línea de  $\nabla h$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(1, 2)$  sobre la curva dada por  $\mathbf{c}$ .
12. a) Sea  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Dibujar las curvas de nivel  $f(x, y) = 0$  y el vector  $\nabla f(1, 1)$ . Hallar la derivada de  $f$  en el punto  $(1, 1)$  según el vector  $\mathbf{v} = (-1, -1)$ . Hallar  $\Delta f(x, y)$ .    b) Hallar la integral de línea de  $\mathbf{g}(x, y) = (2x, -2y)$  desde  $(1, 0)$  hasta  $(0, 1)$  sobre el tramo de circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  con  $x, y \geq 0$ .
13. Sea  $D$  el cuadrilátero de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(4, -1)$  y  $(2, -1)$ .
  - a) Calcular  $\iint_D (x + 2y) dx dy$  de dos formas distintas.
  - b) Hallar la integral de línea de  $\mathbf{f}(x, y) = (1, \cos y)$  a lo largo de la frontera de  $D$ , recorrida en el sentido de las agujas del reloj.
14. Hallar la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = (\frac{y}{(y+x)^2}, \frac{x}{(y+x)^2})$  entre  $(2, 0)$  y  $(1, 1)$  a lo largo de la parábola  $x = 2 - y^2$ .
15. Para  $\mathbf{g}(x, y, z) = (2 - y, -x, 1)$  y  $\mathbf{c}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ , calcular:
  - a) la longitud de la curva dada por  $\mathbf{c}$ ,
  - b) el  $\operatorname{rot} \mathbf{g}$ ,
  - c) el valor de la integral de línea  $\int_c \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$ .
16. Sea  $g(x, y, z) = y e^{2x-z}$ .
  - a) Hallar  $\iiint_V g$ , siendo  $V$  el sólido acotado por los planos  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ ,  $z = 0$  y  $z = 2 - x$ .
  - b) Hallar el valor de la integral de línea de i)  $g$ , ii)  $\nabla g$  desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(1, 2, 2)$  a lo largo del segmento que une los puntos.
17. Sea el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy, 2x, -yz)$ . Hallar  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  y  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ . Calcular la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo del camino  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ ,  $t \in [0, \pi]$  y la longitud de la curva descrita por  $\mathbf{c}(t)$ .
  - a)  $\mathbf{c}(t) = (t, t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .
  - b)  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
18. Calcular la integral de  $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  a lo largo de:
  - a)  $\mathbf{c}(t) = (t, t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .
  - b)  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

19. Sea el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + y, x, x^2)$ . a) Escribir  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  y  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ . ¿Es  $\mathbf{F}$  conservativo?  
 b) Calcular  $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz$ , con  $V$  sólido acotado por los planos  $x=1$ ,  $y=-1$ ,  $y=1$ ,  $z=0$ ,  $z=2x$ .  
 c) Si  $\mathbf{c}(t) = (t, e^{t^2-1}, 2t)$ , hallar el valor de la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  desde  $(-1, 1, -2)$  hasta  $(1, 1, 2)$ .  
 d) Hallar la recta tangente a la curva dada por  $\mathbf{c}$  en el punto  $(1, 1, 2)$  y el punto en que la recta corta  $z=0$ .
20. Calcular la integral de línea del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2yz \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}$  entre  $(1, 0, 2)$  y  $(0, 3, 0)$  a lo largo del segmento que une esos puntos. ¿Para alguna curva que una ambos puntos la integral es 0?
21. Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (z^2, 2y, cxz)$ ,  $c$  constante. a) Hallar  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  y  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ . b) Precisar para qué valor de  $c$  deriva  $\mathbf{f}$  de un potencial  $U$ . c) Para este  $c$ , ¿cuánto vale la integral de línea de  $\mathbf{f}$  entre  $(0, 0, 0)$  y  $(1, 0, 1)$  a lo largo del segmento que une los puntos? d) Calcular la integral anterior para cualquier  $c$ .
22. Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = e^{-z} \mathbf{i} + \mathbf{j} - xe^{-z} \mathbf{k}$ . a) Calcular directamente la integral de línea de  $\mathbf{f}$  desde  $(1, 1, 0)$  hasta  $(1, 0, 3)$  a lo largo del segmento que une los puntos. b) Hallar, si existe, una función potencial para  $\mathbf{f}$ .
23. a) Calcular  $\iiint_V y \, dx \, dy \, dz$ , si  $V$  es el sólido acotado por  $y=x^2$  y los planos  $y=1$ ,  $z=0$  e  $y+z=0$ .  
 b) Hallar el valor de la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, x, z)$  desde  $(-1, 1, -1)$  hasta  $(1, 1, -1)$  sobre la curva intersección de  $y=x^2$  con  $y+z=0$ .
24. Sean  $f(x, y, z) = 2xz$ ,  $\mathbf{c}(t) = (2-t, t, 1-\frac{t}{2})$ ,  $t \in [0, 2]$  y el  $V$  limitado por  $x, y, z=0$ ,  $x+y=2$  y  $z=e^{-y/2}$ .  
 a) Calcular la integral triple  $\iiint_V f \, dx \, dy \, dz$ . b) Calcular la integral de línea del campo escalar  $\int_C f \, ds$ .  
 c) Hallar el valor de  $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s}$ . d) Dar un ejemplo de campo  $\mathbf{g}$  no constante para el que sea  $\int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = 0$ .
25. Sea  $\mathbf{f}(x, y) = (1, xy^2)$ . ¿Deriva  $\mathbf{f}$  de un potencial? Hallar el valor de la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$ , recorrida en sentido opuesto a las agujas del reloj: i) directamente, tras dar una parametrización, ii) mediante el teorema de Green (integrando en polares).
26. Sea  $D$  la región comprendida entre las gráficas de  $y = e^{-x}$ ,  $y = e^{x-2}$  y el eje  $y$ . a) Hallar  $\iint_D x e^x \, dx \, dy$ .  
 b) ¿Cuánto vale la integral de línea de  $\mathbf{f}(x, y) = (xy e^x, 1)$  a lo largo de  $\partial D$ , en sentido horario?
27. Comprobar el teorema de Green para los campos  $\mathbf{f}$  y recintos  $D$  que se indican:  
 a)  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2x)$  y  $D$  región del plano encerrada entre la parábola  $x=4-y^2$  y la recta  $y=x-2$ .  
 b)  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, xy)$  y  $D$  semicírculo girado dada por  $x^2 + y^2 \leq 2$  e  $y \geq x$ .  
 c)  $\mathbf{f}(x, y) = (-xy, y)$  y  $D$  limitado por  $y=x^2$  y el segmento que une los puntos  $(-1, 1)$  y  $(2, 4)$ .  
 d)  $\mathbf{f}(x, y) = (x, x^2)$  y  $D$  parte de la elipse  $4x^2 + 9y^2 = 1$  con  $x \geq 0$ .  
 e)  $\mathbf{f}(x, y) = (xy, 2-x^2)$  y  $D$  dado en polares por  $r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ .  
 f)  $\mathbf{f}(x, y) = (x^3, x^2y)$  y  $D$  acotada por las curvas  $y=x^2$  y  $x=y^2$ .  
 g)  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, x^2)$  y  $D$  semicírculo dado por  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $x \geq 0$ .
28. Hallar con una integral de línea el área encerrada entre el eje  $y=0$  y un arco de la cicloide  $x=t-\operatorname{sen} t$ ,  $y=1-\operatorname{cos} t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
29. Comprobar los teoremas de Green y la divergencia para el campo vectorial  $\mathbf{g}(x, y) = (x^2, -2xy)$  en el triángulo  $D$  cuyos vértices son los puntos  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(0, 4)$ .
30. Verificar el teorema de la divergencia para:  
 i)  $\mathbf{f}(x, y) = (x, y)$  y  $D$  el disco unidad  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  
 ii)  $\mathbf{f}(x, y) = (2xy, -y^2)$  y  $D$  el cuadrado unidad.

1. a) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie  $\mathbf{r}(u, v) = (2u, u^2+v, v^2)$  en el punto  $(0, 1, 1)$  a partir del producto vectorial fundamental. b) Escribir la superficie en la forma  $z = f(x, y)$  y calcular ese plano utilizando la fórmula del capítulo 2.
2. Comprobar que  $\mathbf{r}(u, v) = (ch u \cos v, ch u \sen v, sh u)$ ,  $u \in \mathbf{R}$ ,  $v \in [0, 2\pi]$ , parametriza el hiperboloide de una hoja  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Hallar de dos formas su plano tangente en el punto con  $u = 0$  y  $v = \frac{\pi}{4}$ .
3. Hallar el área del toro dado por  $\mathbf{r}(\theta, \phi) = ((2 + \cos \phi) \cos \theta, (2 + \cos \phi) \sen \theta, \sen \phi)$ ,  $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ .
4. Calcular  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , siendo  $S$  la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
5. Calcular la integral de superficie del campo  $f(x, y, z) = z$  sobre la parte del hiperboloide  $z^2 = 1 + x^2 + y^2$  comprendida entre  $z = 1$  y  $z = \sqrt{5}$ .
6. Sea  $S$  la superficie cilíndrica  $x^2 + y^2 = 4$  comprendida entre los planos  $z = 0$  y  $z = 3$ . a) Hallar el área de  $S$  utilizando integrales de superficie. b) Calcular la integral de superficie sobre  $S$  de: i)  $f(x, y, z) = x^2$ , ii)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz, yz, 2)$  (respecto de la normal exterior).
7. Sea  $S$  la parte de la superficie cónica  $z^2 = x^2 + y^2$  comprendida entre los planos  $z = 1$  y  $z = 2$ , y sea el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, 1)$ . a) Calcular el área de  $S$  y la integral de superficie de  $\mathbf{f}$  sobre  $S$  respecto de la normal exterior al cono. b) Calcular el rot  $\mathbf{f}$ . ¿Cuánto vale la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo de la circunferencia que limita superiormente la superficie?
8. Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x, y, z)$ . a) Hallar  $\text{div } \mathbf{F}$  y  $\text{rot } \mathbf{F}$ . b) Comprobar el teorema de la divergencia para  $\mathbf{F}$  sobre la esfera unidad.
9. Comprobar el teorema de Gauss para los campos  $\mathbf{f}$  y volúmenes  $V$  indicados:
  - a)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (4x, 4y, z^2)$  en el cilindro dado por  $x^2 + y^2 \leq 25$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
  - b)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$  en la parte del cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  con  $z \geq x$ .
10. Sean las superficies  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$  y  $B = \{x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0\}$ . Comprobar que se verifica el teorema de la divergencia sobre  $S \cup B$  para el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, 1)$ .
11. Comprobar el teorema de Gauss para  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, 1, y)$  y el sólido dado por  $0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)^2$ .
12. Hallar el flujo del campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = 3yz \mathbf{i} + 2xz \mathbf{j} + (z + xy) \mathbf{k}$ , hacia el exterior de la superficie de la esfera  $x^2 - 6x + y^2 + z^2 = 0$ .
13. Sea el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 2)$ . Comprobar: a) el teorema de Gauss para el mayor  $V$  limitado por las superficies  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y  $z = -1$  y b) el de Stokes para la  $S$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq -1$ .
14. Comprobar el teorema de Stokes para el campo vectorial  $\mathbf{g}(x, y, z) = (x, xz, 1)$  y la superficie  $S$  formada por la parte de  $z = y^2$  cuya proyección sobre  $z = 0$  es la elipse  $x^2 + 4y^2 \leq 4$ .
15. Comprobar el Teorema de Stokes para el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 2x + z, e^x)$  y la superficie  $D$  contenida en el plano  $z = 0$ , definida por  $y \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x^2 + 2y^2 \geq 1$ .
16. Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (yz, e^y, 1)$  y  $S$  el triángulo determinado por los puntos  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(-1, 1, 1)$ . Calcular la integral de superficie de  $\text{rot } \mathbf{f}$  sobre  $S$  directamente y utilizando el teorema de Stokes.
17. Comprobar el teorema de Stokes, calculando las integrales correspondientes, para el campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z) = -y \mathbf{i} + 2x \mathbf{j} + (x + z) \mathbf{k}$  en la parte de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  con  $z \geq 0$ .

18. Sea  $S$  la parte del paraboloido elíptico  $z = 4 - 4x^2 - y^2$  con  $z \geq 0$  y  $x \geq 0$ , y sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (3, x^2, y)$ . Comprobar el teorema de Stokes calculando la integral de superficie de  $\text{rot } \mathbf{f}$  sobre  $S$  y la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo del contorno cerrado que limita dicha superficie.

19. Sean  $V$  el sólido limitado por el paraboloido  $z = 1 - x^2 - y^2$  y el plano  $z = 0$ ,  $S$  la parte de dicho paraboloido con  $z \geq 0$ ,  $C$  la intersección del paraboloido con el plano  $z = 0$ ,  $S^*$  la superficie de  $V$  y  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, xy, 2z)$ . Comprobar que se cumplen los teoremas de Stokes y de la divergencia calculando:

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \quad \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad \iint_{S^*} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \text{e} \quad \iiint_V \text{div } \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz.$$

20. a) Comprobar que si  $u: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  es de  $C^2$  se satisface  $u \Delta u = \text{div}(u \nabla u) - \|\nabla u\|^2$ .

b) Deducir, con el teorema de la divergencia en el plano, que  $u \in C^2(D)$  cumple la ‘fórmula de Green’:

$$\iint_D u \Delta u \, dx \, dy = \oint_{\partial D} u u_{\mathbf{n}} \, ds - \iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx \, dy, \quad \text{con } u_{\mathbf{n}} \text{ derivada según la normal unitaria exterior.}$$

c) Escribir y probar la fórmula para  $\mathbf{R}^3$ . d) ¿Qué resultado de  $\mathbf{R}$  generalizan estas fórmulas?

(se utilizan demostrando la unicidad de las soluciones de algunas ecuaciones en derivadas parciales).