

# 4. Integrales múltiples

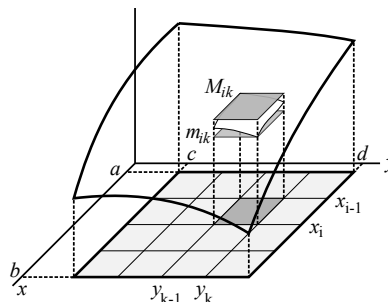
## 4.1 Integrales dobles

[Las demostraciones son similares a las de  $\mathbf{R}$  y hacemos pocas].

Generalizamos la definición de la integral en una variable. Sea  $f(x, y)$  **acotada** en un **rectángulo**  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ . Dividimos  $R$  en  $n \times n$  subrectángulos iguales  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , del mismo área  $\Delta x \Delta y = \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n}$ . Llamamos  $M_{ik}$  y  $m_{ik}$ , respectivamente, al supremo e ínfimo de  $f$  en cada  $R_{ij}$  y formamos las **sumas superior**  $U_n$  e **inferior**  $L_n$ :

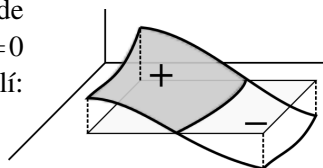
$$U_n = \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \Delta x \Delta y, \quad L_n = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \Delta x \Delta y$$

(sumas de volúmenes de prismas, una superior y otra inferior al volumen que encierra  $f(x, y)$  si  $f \geq 0$ ).



**Def.** Si ambas sucesiones  $\{L_n\}$  y  $\{U_n\}$  tienden hacia un mismo límite, decimos que  $f$  es **integrable** en  $R$ , representamos el límite común por  $\iint_R f$  ó  $\iint_R f(x, y) dx dy$  y le llamamos **integral** de  $f$  en  $R$ .

$\iint_R f$  representará (similar a lo que sucedía en  $\mathbf{R}$ ) la suma de los volúmenes encerrados entre la gráfica de  $f$  y el plano  $z=0$  en  $R$ , con signos + o - adecuados. Y al igual que sucedía allí:



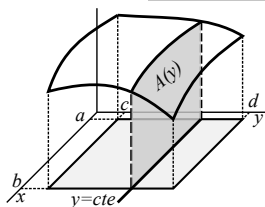
**Teorema:**  $f$  continua en  $R \Rightarrow f$  integrable en  $R$ .

También aquí las funciones 'poco' discontinuas siguen siendo integrables:

**Teorema:** Si el conjunto de puntos de  $R$  en que una  $f$  acotada es discontinua es como máximo en un número finito de puntos y un número finito de gráficas de funciones continuas, entonces  $f$  es integrable en  $R$ .

Para calcular integrales dobles no necesitaremos la definición, el problema se reduce a la realización de dos integraciones sucesivas de funciones de una variable:

**Teorema de Fubini:**  $f$  es continua en  $R \Rightarrow \iint_R f = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ .



Para cada  $y$  constante  $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  representa el área de la sección del sólido determinado por la gráfica de  $f$ ; integrando esta  $A(y)$  entre  $c$  y  $d$  obtenemos el volumen dado por  $\iint_R f = \int_c^d A(y) dy$ . La segunda igualdad es lo simétrico.

[Hay funciones raras (discontinuas, claro) para las que el teorema falla].

**Ej.** Sean  $R = [0, \pi] \times [0, 1]$  y  $f(x, y) = 2x - y \operatorname{sen} x$ . Calcular la integral es fácil:

$$\iint_R f = \int_0^\pi \left[ \int_0^1 (2x - y \operatorname{sen} x) dy \right] dx = \int_0^\pi \left[ 2xy - \frac{y^2 \operatorname{sen} x}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^\pi \left( 2x - \frac{\operatorname{sen} x}{2} \right) dx = \left[ x^2 - \frac{\cos x}{2} \right]_0^\pi = \pi^2 - 1.$$

O también podríamos hacer:

$$\iint_R f = \int_0^1 \left[ \int_0^\pi (2x - y \operatorname{sen} x) dx \right] dy = \int_0^1 \left[ x^2 - y \cos x \right]_0^\pi dy = \int_0^1 (\pi^2 - 2y) dy = \pi^2 - 1.$$

Generalicemos el recinto de integración. Sea ahora  $D$  **región acotada del plano**. Sobre un

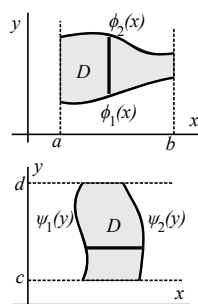
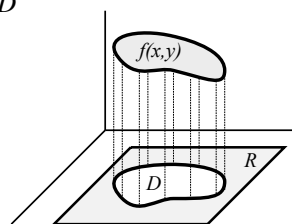
rectángulo  $R \supset D$  definimos la función  $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D \end{cases}$ .

Se define  $\iint_D f = \iint_R f^*$  si  $f^*$  es integrable.

Representa el **volumen** (si  $f \geq 0$ ) limitado por la gráfica de  $f$  en  $D$ . [Y en el caso particular en que  $f = 1$ , es el **área** de  $D$ ].

Si la frontera de  $D$  se puede poner como unión finita de gráficas de funciones continuas y  $f$  es continua ya sabemos que  $\iint_D f$  existirá.

Consideremos **dos tipos sencillos** de regiones  $D$  de integración (recintos más complicados se podrán descomponer en otros de esa forma). A la vista del significado de  $\iint_R f^*$  está claro que:



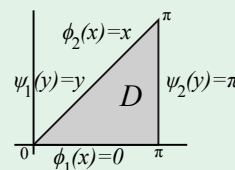
**Teorema:**

- i) Si  $f$  continua en  $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ , con  $\phi_1 \leq \phi_2$  continuas en  $[a,b] \Rightarrow \iint_D f = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy dx$ .
- ii) Si  $f$  continua en  $D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ , con  $\psi_1 \leq \psi_2$  continuas en  $[c,d] \Rightarrow \iint_D f = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx dy$ .

**Ej.** Integremos  $f(x,y) = x \cos(x+y)$  sobre el  $D$  del dibujo:

$$\iint_D f = \int_0^\pi \left[ \int_0^x x \cos(x+y) dy \right] dx = \int_0^\pi [x \sin 2x - x \sin x] dx = -\frac{3\pi}{2}.$$

O bien:  $\iint_D f = \int_0^\pi \left[ \int_y^\pi x \cos(x+y) dx \right] dy$   
 $= \int_0^\pi [-\pi \sin y - \cos y - y \sin 2y - \cos 2y] dy = -\frac{3\pi}{2}.$

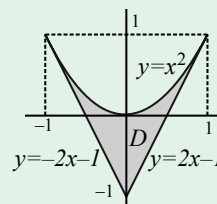


En recintos más complicados habrá que dividir. La integral sobre el recinto total  $D$  será la suma de las integrales sobre cada uno de los subconjuntos:

**Ej.**  $\iint_D f = \int_{-1}^0 \left[ \int_{-2x-1}^{x^2} f(x,y) dy \right] dx + \int_0^1 \left[ \int_{2x-1}^{x^2} f(x,y) dy \right] dx$

O como  $y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{y}$ ,  $y = \pm 2x - 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}(y+1)$ :

$$\iint_D f = \int_0^1 \left[ \int_{-(y+1)/2}^{-\sqrt{y}} f(x,y) dx \right] dy + \int_0^1 \left[ \int_{\sqrt{y}}^{(y+1)/2} f(x,y) dx \right] dy + \int_{-1}^0 \left[ \int_{-(y+1)/2}^{(y+1)/2} f(x,y) dx \right] dy.$$



Si en particular integramos  $f \equiv 1$  obtendremos el área de  $D$ :

$$A = \iint_D 1 = \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

[Integrales iguales por ser  $f \equiv 1$  par en  $x$  y  $D$  simétrico respecto a  $x=0$ ; bastaba hacer  $2 \int_0^1$ ].

O bien:  $A = \iint_D 1 = 2 \int_0^1 \left[ \frac{y}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{y} \right] dy + \int_{-1}^0 [y+1] dy = 2 \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$  [ $\frac{1}{2}$  = área triángulo].

Tomemos ahora  $f(xy) = 2xy$  y hallemos la integral por el primer camino:

$$\iint_D f = \int_{-1}^0 [xy^2]_{-2x-1}^{x^2} dx + \int_0^1 [xy^2]_{2x-1}^{x^2} dx = \int_{-1}^0 [x^5 - 4x^3 - 4x^2 - x] dx + \int_0^1 [x^5 - 4x^3 + 4x^2 - x] dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{5} + 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right] = 0.$$

[Debía anularse por ser  $f$  impar en  $x$  y  $D$  simétrico respecto a  $x=0$ ].

## 4.2. Cambios de variable

Generalicemos para integrales dobles la fórmula para integrales en  $\mathbf{R}$ :

$$\int_a^b f(g(u)) g'(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx, \text{ con } g \in C^1([a, b])$$

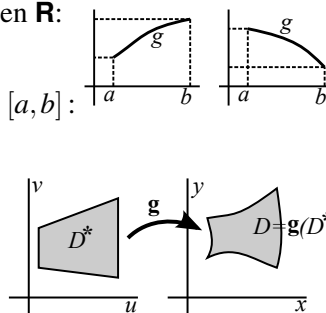
en concreto, el caso de  $g$  **inyectiva** (creciente o decreciente) en  $[a, b]$ :

$$\int_{[a,b]} f(g(u)) |g'(u)| du = \int_{g([a,b])} f(x) dx.$$

En  $\mathbf{R}^2$  nuestra situación será esta: para hallar  $\iint_D f(x, y) dx dy$ ;

realizaremos un cambio de variable  $\mathbf{g}: D^* \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbf{R}^2$   
 $(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$

con el fin de que el nuevo recinto de integración  $D^*$  o la nueva función a integrar sean más sencillas.



**Teorema:**

Sea  $\mathbf{g}: (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$  de  $C^1$ , inyectiva en  $D^*$ ,  $\mathbf{g}(D^*) = D$  y  $f$  integrable.

$$\text{Entonces: } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

La demostración es complicada y no se da. Pero hacemos observaciones sobre hipótesis y resultado.

- El teorema sigue siendo cierto aunque  $\mathbf{g}$  deje de ser inyectiva en puntos sueltos o curvas continuas.
- Si el determinante jacobiano  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$  en un punto, el ‘teorema de la función inversa’ asegura que  $\mathbf{g}$  es inyectiva en un entorno de ese punto, pero aunque no se anule en todo  $D^*$  esto no basta para que sea inyectiva en todo  $D^*$ .
- En el caso de que  $f \equiv 1$  queda  $\iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \text{área de } D$ , con lo que el jacobiano viene a ser una medida de cómo un cambio de variable distorsiona el área.

Si  $D^*$  es un **pequeño rectángulo** del plano  $uv$ , al ser  $\mathbf{g}$  diferenciable una buena aproximación es

$$\mathbf{g}(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v) \approx \mathbf{g}(u_o, v_o) + d\mathbf{g}_{(u_o, v_o)}(\Delta u, \Delta v),$$

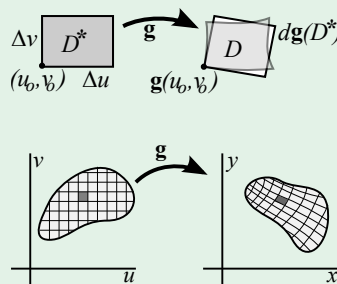
y por tanto  $D = \mathbf{g}(D^*)$  es ‘aproximadamente igual’ al paralelogramo  $d\mathbf{g}(D^*)$  de vértice  $\mathbf{g}(u_o, v_o)$  y de lados

$$d\mathbf{g}(\Delta u, 0) = \Delta u \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ y } d\mathbf{g}(0, \Delta v) = \Delta v \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix},$$

cuyo área es el valor absoluto de  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u \Delta v$ .

Si  $D^*$  es un **conjunto más general**, el área de  $D = \mathbf{g}(D^*)$

será aproximadamente  $\sum \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$ , expresión que en el límite será la integral sobre  $D^*$ .



Como primer ejemplo de cambio de variable consideramos los **cambios lineales**:

$$\begin{cases} x = Au + Bv \\ y = Cu + Dv \end{cases} \cdot \text{Si } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0 \text{ define biyección de } \mathbf{R}^2 \text{ en } \mathbf{R}^2.$$

$$\rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = |AD - BC| \iint_{D^*} f(Au + Bv, Cu + Dv) du dv$$

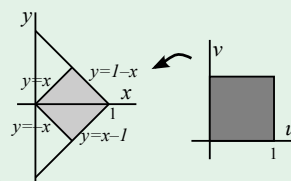
[Las regiones se transforman de forma sencilla por llevar las aplicaciones lineales rectas a rectas].

**Ej.** Sea  $D$  el cuadrado de la figura y calculemos  $\iint_D (x-y)^2 e^{x+y} dx dy$ .

$$\text{La forma de } f \text{ y el recinto sugieren: } \begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}.$$

Las rectas que definen los lados pasan a ser:  $u = 0, 1, v = 0, 1$ .

$$\text{El jacobiano } \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \text{ Así pues } \iint_D = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 v^2 e^u du dv = \frac{e-1}{6}.$$



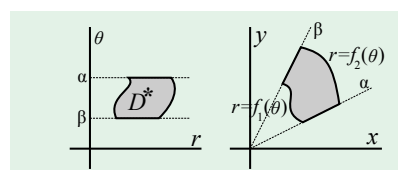
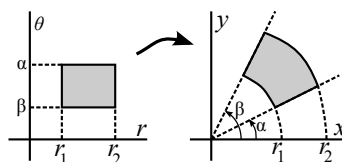
Más a menudo aparece y más útil es el **cambio a polares**:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}. \text{ El jacobiano es ahora: } \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Con lo que la fórmula del cambio de variable adopta la forma:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

¿Qué  $D$  provienen de conjuntos  $D^*$  sencillos del plano  $r\theta$ ? Un rectángulo  $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$  se transforma en un sector de corona circular limitado por las circunferencias de radio  $r_1$  y  $r_2$  y las rectas que pasan por el origen de pendientes  $\theta_1$  y  $\theta_2$  (líneas con  $r = \text{cte}$  y  $\theta = \text{cte}$ ).



Si queremos hallar el área en polares de una región  $D$  limitada en  $\theta \in [\alpha, \beta]$  por  $r = f_1(\theta)$  y  $r = f_2(\theta)$  será:  
 área =  $\int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f_2^2(\theta) - f_1^2(\theta)] d\theta$ ,  
 coincidente con lo visto en los apuntes de matemáticas.

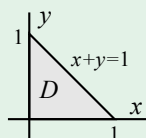
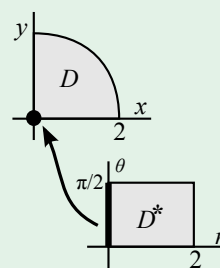
**Ej.** Hallemos  $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$ , con  $D$  el sector circular del dibujo:

La presencia de  $x^2+y^2$  y el aspecto de  $D$  piden a gritos las polares.

$$\iint_{D^*} r \sqrt{4-r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^2 r(4-r^2)^{1/2} dr \right] d\theta = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{(4-r^2)^{3/2}}{-3} \right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}$$

el  $[\cdot]$  no depende de  $\theta$       octante de esfera  $\nearrow$

Obsérvese que el cambio a polares no es inyectivo en lado izquierdo del rectángulo  $D^*$  (todos los puntos con  $r=0$  van al origen), pero como ya dijimos, no importa que falle la inyectividad en puntos o rectas sueltas.



En otros  $D$  el cambio a polares complicará normalmente el recinto. Por ejemplo, el triángulo del dibujo daría lugar a la integral:

$$\iint_D f = \int_0^{\pi/2} \int_0^{1/(\sin \theta + \cos \theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

y no haríamos el cambio salvo que la  $f$  se simplificase notablemente.

Además del **área** de  $D$ ,  $A = \iint_D dx dy$ , y del **volumen** en  $D$  bajo  $f(x,y) \geq 0$ ,  $V = \iint_D f dx dy$ , las integrales dobles tienen otra serie de aplicaciones (las fórmulas son análogas para  $\mathbf{R}^3$ ).

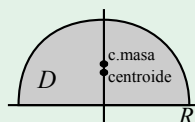
Por ejemplo el **promedio** de una magnitud  $f$  en  $D$  es  $\bar{f} = \frac{1}{A} \iint_D f$ .

La **masa** de una placa  $D$  es  $M = \iint_D \rho(x,y) dx dy$ , si  $\rho(x,y)$  es su densidad.

El **centro de masa** de  $D$  es el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  con  $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho$  (**centroide** si  $\rho = \text{cte}$ ).

Los **momentos de inercia** respecto a los ejes  $x$  e  $y$  son:  $I_x = \iint_D y^2 \rho$ ,  $I_y = \iint_D x^2 \rho$ .

**Ej.** Sea un semicírculo  $D$  de radio  $R$  de densidad directamente proporcional a la distancia al centro de  $D$ . Hallemos su centroide, su centro de gravedad y sus momentos de inercia respecto de los ejes.



Se puede probar que si una lámina tiene un eje de simetría, su centroide está en dicho eje (y si tiene dos, está en su intersección). Por tanto,  $\bar{x}_c = 0$ . La otra

$$\bar{y}_c = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42 R.$$

Para el centro de gravedad hay que incluir la densidad  $\rho(r) = kr$  (simétrica). También  $\bar{x} = 0$ .

Como la masa es  $M = \int_0^{\pi} \int_0^R kr^2 dr d\theta = \frac{\pi R^3 k}{3}$ , será  $\bar{y} = \frac{3}{\pi R^3} \int_0^{\pi} \int_0^R r^3 \sin \theta dr d\theta = \frac{3R}{2\pi} \approx 0.48 R$ .

Los momentos:  $I_x = k \int_0^{\pi} \int_0^R r^4 \sin^2 \theta dr d\theta = \frac{k\pi R^5}{10}$ ,  $I_y = k \int_0^{\pi} \int_0^R r^4 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{k\pi R^5}{10}$ .

### 4.3. Integrales triples

Análogamente al caso  $n=2$  se puede definir  $\iiint_B$  para  $f(x,y,z)$  acotada en un paralelepípedo  $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ , que representará un 'volumen' en un espacio de cuatro dimensiones, es decir, el 'volumen' de un 'sólido' de cuatro dimensiones con 'base'  $B$  y altura en cada punto la que le asigna  $f(x,y,z)$ . Esta integral se podrá de nuevo calcular mediante integrales iteradas:

$$f \text{ continua en } B \Rightarrow \iiint_B f = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy dz$$

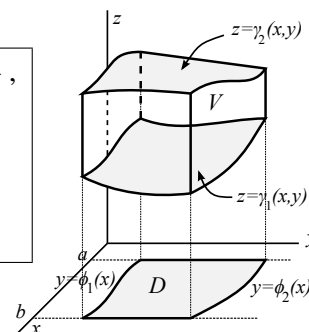
[o las otras 5 iteradas intercambiando los papeles de  $x, y, z$ ].

**Ej.** Si  $f(x,y,z) = 2yz - x$  y  $B = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$  es:

$$\iiint_B f = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2yz - x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^2 (9y - 3x) dy dx = \int_0^1 (18 - 6x) dx = 15.$$

También podemos integrar sobre recintos  $V \subset \mathbb{R}^3$  más generales.

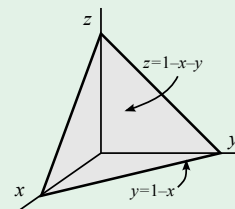
$$\begin{aligned} \text{Si } V = \{ (x,y,z) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y) \}, \\ \text{con } \phi_1 \leq \phi_2 \text{ continuas en } [a,b] \text{ y } \gamma_1 \leq \gamma_2 \text{ continuas} \\ \text{en } D = \{ (x,y) : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \}, \\ \text{y } f \text{ continua en } V \Rightarrow \iiint_V f = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx. \end{aligned}$$



Análogas fórmulas se obtienen variando los papeles de  $x, y, z$ , y muchos recintos que aparecen estarán incluidos en algunos de esos tipos (en ocasiones habrá que dividir  $V$  en trozos para conseguirlo).

**Ej.** Si  $f(x,y,z) = xyz$  y  $V$  es el tetraedro de vértices  $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ , es:

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{xy(1-x-y)^2}{2} dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{x(1-x)^4}{4} + \frac{x(1-x)^4}{8} - \frac{x(1-x)^4}{3} \right] dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{12} dx = \frac{1}{360}. \end{aligned}$$



En el caso de que  $f \equiv 1$ ,  $\iiint_V dx dy dz$  representará el **volumen de V**.

Con hipótesis análogas a las del plano se tiene la fórmula para los **cambios de variable**:

$$\begin{aligned} \text{Sea } \mathbf{g} : (u,v,w) \rightarrow (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \text{ de } C^1, \text{ inyectiva en } V^*, \mathbf{g}(V^*) = V \\ \text{y } f \text{ integrable} \Rightarrow \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\mathbf{g}(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

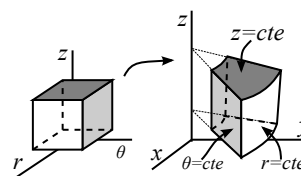
Válida aunque  $\mathbf{g}$  no sea inyectiva en un conjunto finito de gráficas de funciones continuas de dos variables (superficies).

En particular nos interesan los cambios a cilíndricas y esféricas.

$$\text{Cilíndricas: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sen \theta \\ z = z \end{cases} \cdot \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} r \cos \theta & r \sen \theta & 0 \\ -r \sen \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V^*} r f(r \cos \theta, r \sen \theta, z) dr d\theta dz$$

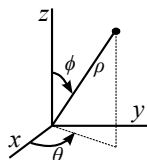
Los recintos sencillos en cilíndricas son los del dibujo.



**Esféricas:**  $r \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi$

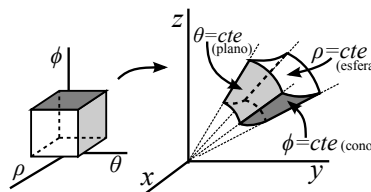
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \cdot \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi.$$

$$\rightarrow \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V^*} \rho^2 \sin \phi f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) d\rho d\theta d\phi$$



[En los libros de física se suelen cambiar los nombres de  $\phi$  y  $\theta$ ].

Un recinto simple en esféricas es el dibujado a la derecha.



**Ej.** Halleemos el volumen que encierran el cono  $z = \sqrt{x^2+y^2}$  y el plano  $z=0$  sobre el cuadrado  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Podemos hallarlo mediante integrales dobles o triples, en las coordenadas adecuadas en cada caso. Hacemos  $\iiint_V dx dy dz$ .

En cartesianas es fácil el recinto, pero difíciles las integrales:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \left[ \begin{array}{l} \text{tablas o} \\ \sqrt{x^2+y^2} = x+u \end{array} \right]$$

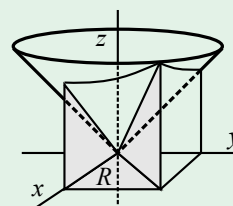
$$\frac{1}{2} \int_0^1 [\sqrt{1+y^2} - y^2 \ln y + y^2 \ln(1+\sqrt{1+y^2})] dy = \dots$$

En cilíndricas (o polares en la segunda integral):  $x=1 \rightarrow r = \frac{1}{\cos \theta}$ , cono y recinto simétricos,

$$2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos \theta} r^2 dr d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad u = \tan \theta \quad \frac{2}{3} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{6} [\log | \frac{1+u}{1-u} | - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} ]_0^{1/\sqrt{2}}$$

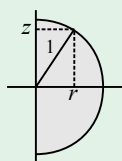
$$= \frac{1}{3} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})].$$

Esféricas:  $2 \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\cos \theta \sin \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\phi d\theta}{\sin^2 \phi \cos^3 \theta} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$  como antes



**Ej.** Calculemos el volumen de la esfera unidad. En esféricas:

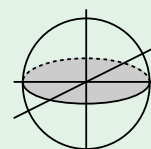
$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta = 2\pi \int_0^1 2\rho^2 d\rho = \frac{4\pi}{3}.$$



En cilíndricas por dos caminos (más largo):

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr dz d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{2} dz = \frac{4\pi}{3}.$$

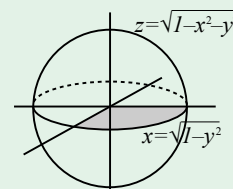
$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 2r \sqrt{1-r^2} dr = \frac{4\pi}{3}.$$



Las cartesianas son las coordenadas menos adecuadas aquí:

$$\text{vol} = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dx dy = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

$$= \dots [\text{cambio } x = \sqrt{1-y^2} \text{ sent}] \dots = 8 \int_0^1 \frac{\pi}{4} (1-y^2) dy = \frac{4\pi}{3}.$$



[Aplicaciones físicas similares a las vistas para las integrales dobles son:

**Masa** de un sólido  $V$  es  $M = \iiint_V \rho(x,y,z) dx dy dz$ , si  $\rho(x,y,z)$  es su densidad.

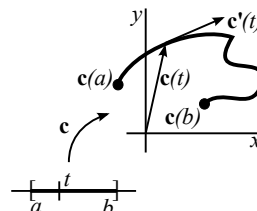
**Centro de masa** de  $V$  es  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  con  $\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho$ .

**Momento de inercia** respecto al eje  $z$ :  $I_z = \iiint_V (x^2+y^2) \rho$  (análogos los otros)].

# 5. Integrales de línea

## 5.1 Integrales de campos escalares a lo largo de curvas

Recordamos que una **función vectorial**, **trayectoria** o **camino** es una  $\mathbf{c} : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ , cuya gráfica  $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$  es una **curva**  $C$  en  $\mathbf{R}^n$  y su derivada  $\mathbf{c}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_m(t))$  describe el vector tangente a la curva (el vector velocidad, si  $\mathbf{c}(t)$  está describiendo un movimiento en  $\mathbf{R}^n$ ).



[La recta tangente a  $C$  en  $\mathbf{c}(t_0)$  era:  $\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t-t_0)\mathbf{c}'(t_0)$ ].

$\mathbf{c}$  es  $C^1$  si es continua y  $\mathbf{c}'$  existe y es continua  $\forall t \in (a, b)$ . Si  $C$  es continua y  $[a, b]$  se puede dividir en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales  $\mathbf{c}$  es  $C^1$ , se dice  $C^1$  a **trozos**. [Su gráfica será una curva continua sin recta tangente en un número finito de puntos].

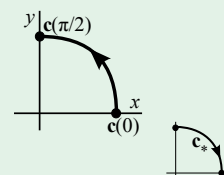
**Ej.**  $\mathbf{c} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$  con  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$  es una trayectoria  $C^1$  pues

$$\mathbf{c}'(t) = (-\sin t, \cos t) \text{ existe } \forall t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

$\mathbf{c}_* : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  con  $\mathbf{c}_*(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ ,  $\mathbf{c}'_*(t) = (1, -t(1-t^2)^{-1/2})$

es otro camino  $C^1$ , que describe esa misma curva en sentido opuesto.

Se dice que  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  son dos **parametrizaciones** de la misma curva  $C$ .



**Def.**

Sea  $\mathbf{c}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  una trayectoria  $C^1$  y sea  $f$  un campo escalar en  $\mathbf{R}^n$  tal que  $f(\mathbf{c}(t))$  es continua en  $[a, b]$ . La integral de  $f$  a lo largo de  $\mathbf{c}$  se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Si  $\mathbf{c}(t)$  es solamente  $C^1$  a trozos o  $f(\mathbf{c}(t))$  continua a trozos, definimos  $\int_{\mathbf{c}} f ds$  descomponiendo  $[a, b]$  en intervalos sobre los que  $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$  sea continua y sumando las integrales sobre cada uno de ellos.

**Ej.** Si  $f(x, y) = xy^2$  y  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}_*$  son los de arriba, las integrales a lo largo de las dos trayectorias son:

$$\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{\mathbf{c}_*} f ds = \int_0^1 t(1-t^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt = -\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Veremos que **la integral de línea de un campo escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva**, con lo que otra posible notación será  $\int_C f ds$  (integral de  $f$  sobre  $C$ ) donde el camino no aparece por ningún lado.

Interpretemos esta integral. Sea primero  $f \equiv 1$ . Si pensamos que  $\mathbf{c}(t)$  describe una partícula, al ser  $\|\mathbf{c}'(t)\|$  la velocidad escalar en el instante  $t$ , parece claro que  $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt$  ('diferencial de arco') representa la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo  $dt$ ' y por tanto:

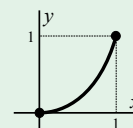
$$L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt \text{ representa la longitud de la curva } C \text{ definida por } \mathbf{c}.$$

**Ej.** Hallemos la longitud de la curva descrita por  $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} \Rightarrow L = \int_0^1 t \sqrt{4+9t^2} dt = \frac{1}{27} (4+9t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{13^{3/2}-8}{27} \approx 1.44.$$

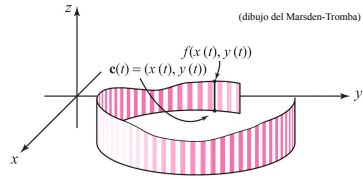
O con otra parametrización de la misma curva:

$$(x, x^{3/2}), x \in [0, 1] \Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9x}{4}} dx = \frac{8}{27} (1+\frac{9x}{4})^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} [\frac{13^{3/2}}{8} - 1].$$





Si ahora  $f$  es cualquier campo con  $f(\mathbf{c}(t)) \geq 0 \forall t \in [a, b]$ ,  $\int_C f ds$  representa para  $n=2$  el **área de la valla** de altura  $f(x,y)$  en cada  $(x,y)$  de la curva  $C$ , pues un 'diferencial de valla' tiene área  $f(\mathbf{c}(t)) ds = f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$ .



Estas integrales también sirven para hallar, el **valor medio** de  $f$  a lo largo de  $C$ :  $\frac{1}{L} \int_C f ds$ .

Otra posible interpretación para  $n=2$  o  $n=3$ : si  $\mathbf{c}(t)$  describe un alambre (en el plano o en el espacio) de densidad variable dada por  $\rho(\mathbf{x})$ , la **masa del alambre** será  $M = \int_C \rho ds$ .

El centro de gravedad (centroide si  $\rho$  constante) del alambre, si  $n=3$ , tendrá por coordenadas:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x \rho ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y \rho ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z \rho ds.$$

**Ej.** Sea el alambre en forma de hélice:  $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, t \rightarrow (\cos t, \sin t, t)$  y de densidad  $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Como  $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{2}$ , se tiene que:

Su longitud es  $M = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.9$ .

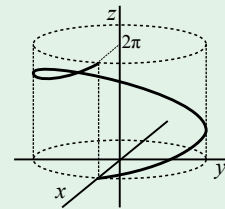
Su masa es  $M = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) dt = \sqrt{2} (2\pi + \frac{8}{3}\pi^3) \approx 125.8$

[Su densidad media es, por tanto:  $1 + \frac{4}{3}\pi^2 \approx 14.2$ ].

Su centro de gravedad:  $\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \cos t (1+t^2) \sqrt{2} dt = \frac{6}{3+4\pi^2} \approx 0.014$ ,

$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \sin t (1+t^2) \sqrt{2} dt = -\frac{6\pi}{3+4\pi^2} \approx -0.44$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} t (1+t^2) \sqrt{2} dt = 3\pi \frac{1+2\pi^2}{3+4\pi^2} \approx 4.60$ .

Su centroide:  $\bar{x} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \cos t \sqrt{2} dt = 0$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \sin t \sqrt{2} dt = 0$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} t \sqrt{2} dt = \pi$ .

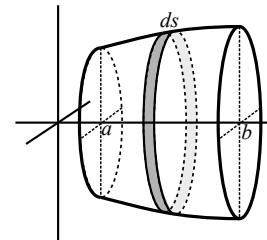


Otra aplicación de este tipo de integrales. Si una curva  $C$  viene dada por  $x=x(t), y=y(t) \geq 0, t \in [a, b]$ , el **área de la superficie de revolución** obtenida al hacer girar  $C$  en torno al eje  $y=0$  es:

$$A = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

[pues el área de la banda de anchura  $ds$  es  $\approx 2\pi y ds$ ].

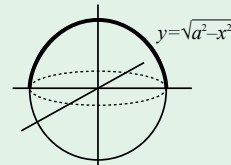
[En el caso particular de que  $C$  sea la gráfica de  $y=y(x)$  queda:  $A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} dx$ ].



**Ej.** Área de la superficie esférica de radio  $a$ . Se puede ver como el giro de  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  en torno a  $y=0$ , y por tanto:

$$A = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-a}^a a dx = 4\pi a^2.$$

O bien:  $(a \cos t, a \sin t), t \in [0, \pi] \rightarrow A = 2\pi \int_0^\pi a^2 \sin t dt = 4\pi a^2$ .





## 5.2. Integrales de línea de cambios vectoriales

Sean  $\mathbf{c}(t): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  una trayectoria  $C^1$  y  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  campo vectorial continuo sobre la gráfica de  $\mathbf{c}$ . Definimos la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo de  $\mathbf{c}$  por:

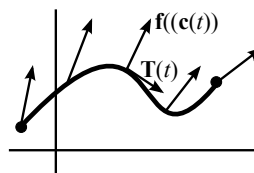
**Def.** 
$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt$$

Si  $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$  es sólo continua a trozos, dividimos el intervalo y sumamos.

Si  $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t$  y  $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$  es el vector tangente unitario:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds,$$

con lo que se puede ver la integral de línea de  $\mathbf{f}$  como la integral del campo escalar  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$ , componente tangencial de  $\mathbf{f}$  en la dirección de  $\mathbf{c}$ . El significado físico es evidente:



$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas  $\mathbf{f}$  sobre la partícula que recorre  $\mathbf{c}$ .

Demos otra **notación** (la damos para el plano). Si  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ :

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t)] dt \equiv \int_{\mathbf{c}} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

[La notación es similar para  $n > 2$ ; ¡cuidado!, sigue siendo integral de línea].

**Ej.** Si  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1)$ , la integral  $\int_{\mathbf{c}} zx^2 dx + xy dy + y^3 dz = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^3 \cdot 2t + t^6 \cdot 0) dt = \frac{11}{15}$ .

**Ej.** Calculemos varias integrales del línea del campo  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 2y+x)$ :

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, t), t \in [0, 1]$$

$$\mathbf{c}_2(t) = (4t^2, 4t^2), t \in [0, \frac{1}{2}] \quad [\text{describen la misma curva, la tercera en sentido contrario}].$$

$$\mathbf{c}_3(t) = (1-t, 1-t), t \in [0, 1]$$

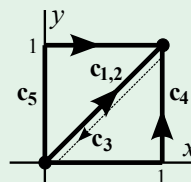
$$\int_{\mathbf{c}_1} = \int_0^1 (t^2, 3t) \cdot (1, 1) dt = \frac{11}{6},$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} = \int_0^{1/2} (16t^4, 12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = \frac{11}{6},$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} = \int_0^1 ((1-t)^2, 3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = -\frac{11}{6}.$$

$$\mathbf{c}_4(t) = \begin{cases} (t, 0), t \in [0, 1] \\ (1, t-1), t \in [1, 2] \end{cases}, \int_{\mathbf{c}_4} = \int_0^1 (t^2, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t^2, 2t-1) \cdot (0, 1) dt = \frac{7}{3}.$$

$$\mathbf{c}_5(t) = \begin{cases} (0, t), t \in [0, 1] \\ (t-1, 1), t \in [1, 2] \end{cases}, \int_{\mathbf{c}_5} = \int_0^1 (0, 2t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 ((t-1)^2, 2+t) \cdot (1, 0) dt = \frac{5}{6}.$$



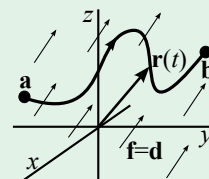
[La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre; para algunos campos no dependerá siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final].

**Ej.** Calculemos el trabajo realizado por una fuerza constante  $\mathbf{f} = \mathbf{d}$  al recorrer una partícula una trayectoria  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  que une dos puntos del espacio  $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\ &= d_1(x(b)-x(a)) + d_2(y(b)-y(a)) + d_3(z(b)-z(a)) \\ &= \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \text{ independiente de } \mathbf{r}. \end{aligned}$$

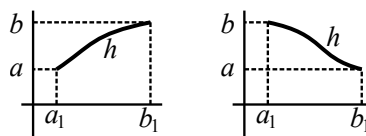
Si consideramos ahora  $\mathbf{c}(t) = \mathbf{r}(a+b-t)$ ,  $t \in [a, b]$ , que recorre la misma trayectoria en sentido contrario, el trabajo es:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} = (d_1, d_2, d_3) \cdot (-x'(t), -y'(t), -z'(t)) dt = -\mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$



Veamos lo que sucede con la integral al hacer un cambio en el parámetro que describe la curva. Sea  $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  y  $h: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$  una biyección  $C^1$ . Si llamamos  $\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , las trayectorias  $\mathbf{p}(u)$ ,  $u \in [a_1, b_1]$  y  $\mathbf{c}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , describen la misma curva, en el mismo sentido o en sentido opuesto según sea, respectivamente,

$$h(a_1) = a \text{ y } h(b_1) = b \text{ o } h(a_1) = b \text{ y } h(b_1) = a$$



[se dice la reparametrización conserva o invierte la orientación de la curva].

**Teorema:** Si  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{p}$  son dos trayectorias que describen la misma curva  $C$ , entonces:  
o bien  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{p}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ , o bien  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathbf{p}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ ,  
según  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{p}$  describan  $C$  en el mismo sentido o en el opuesto.

Si  $C$  es  $C^1$  (si no, dividimos y sumamos las integrales), como  $\mathbf{p}'(u) = \mathbf{c}'(h(u))h'(u)$  es:

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{f}(\mathbf{c}(h(u))) \cdot \mathbf{c}'(h(u))h'(u) du \text{ e } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt.$$

Haciendo en la integral de la izquierda  $h(u) = t$ , se tiene + o - la integral de la derecha, según se conserve o no la orientación, pues no cambian o sí los límites de integración.

Si estuviésemos integrando un **campo escalar**  $f$ , se tendría siempre que:

$$\int_{\mathbf{p}} f ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{c}(h(u))) \|\mathbf{c}'(h(u))\| |h'(u)| du = \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} f ds, \text{ es decir:}$$

**Teorema:** Si  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{p}$  describen la misma curva  $C$ , entonces  $\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_{\mathbf{p}} f ds$ .

**La integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva  $C$  y el sentido en que se recorre** (la un campo escalar sólo de  $C$ ). Podemos elegir las  $\mathbf{c}$  más sencillas.

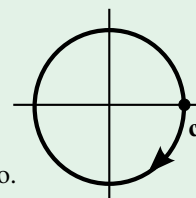
**Ej.** Tiene un sentido preciso hablar de la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$  a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

Elijiendo  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, -\sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  (o  $[-\pi, \pi]$ , o ...),

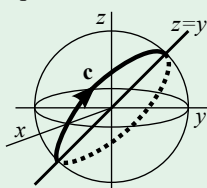
$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t) dt = \pi.$$

Con cualquier otra parametrización igualmente orientada se llega a lo mismo.

Las integrales sobre curvas cerradas se representan a veces con el símbolo  $\oint$ .



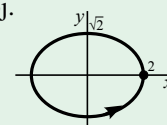
**Ej.** Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$  a lo largo de la curva  $C$  intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y el plano  $z = y$ , si  $C$  es recorrida de modo que, vista desde las  $z$  positivas, el sentido es contrario a las agujas del reloj.



Sobre  $C$ , como  $z = y$ , es  $x^2 + 2y^2 = 4$  (elipse).

$$\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} (0, \sqrt{2} \sin t - 2 \cos t, 2 \cos t - \sqrt{2} \sin t) \cdot (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \text{ (el campo es perpendicular a la trayectoria).} \end{aligned}$$



[Se verá más adelante que serán 0 las integrales sobre un camino cerrado de los campos que sean gradientes de un campo escalar; pero, a pesar de ser  $\oint_C = 0$ , este campo no lo será, pues  $\text{rot } \mathbf{f} = (-2, -2, -2) \neq \mathbf{0}$ ].

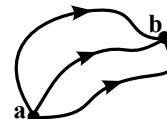
### 5.3. Integrales de gradientes y el teorema de Green

Generalizamos el 2º teorema fundamental del cálculo infinitesimal  $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$ .

**Teorema:** Sea  $U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  un campo escalar  $C^1$  y  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  trayectoria  $C^1$  a trozos.  
Entonces:  $\int_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ .

Si  $\mathbf{c} \in C^1$  (si no, dividimos),  $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b (U \circ \mathbf{c})'(t) dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ .

Por tanto, **la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final**. Si podemos identificar un campo como un gradiente, la integral es muy sencilla.



Si  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ ,  $\mathbf{c}$  describe una curva cerrada e  $\oint_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = 0$ .

**La integral de línea de un gradiente a lo largo de una curva cerrada es 0.**

**Def.** Si un campo vectorial  $\mathbf{f}$  es gradiente de alguna función  $U$ , a  $U$  se le llama **función potencial** para  $\mathbf{f}$ , y  $\mathbf{f}$  se dice **conservativo**.

¿Cómo saber si  $\mathbf{f}$  es conservativo? Resultados generales se verán tras estudiar el teorema de Stokes, pero demos ya un resultado parcial sencillo para  $n=2$  y  $n=3$ .

**Teorema:** Si  $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  de  $C^1$  es conservativo  $\Rightarrow f_y \equiv g_x$ .  
Si  $\mathbf{f}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$  de  $C^1$  es conservativo  $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ .

Si  $\mathbf{f} = (f, g) = (U_x, U_y) = \nabla U$ , con  $U \in C^2$ , por la igualdad de Schwartz de las derivadas cruzadas [ $U_{xy} = U_{yx}$ ] debe ser  $f_y \equiv g_x$ . Y el mismo argumento se aplica si  $n=3$ .

Si las derivadas cruzadas no coinciden, no puede  $\mathbf{f}$  ser gradiente. Si son iguales, muchas veces es sencillo hallar una  $U$  tal que  $\nabla U = \mathbf{f}$  [aunque la implicación  $\Leftarrow$  no sea cierta en general].

**Ej.** Sea  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2xy)$ . Hallemos la integral entre  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  a lo largo de diferentes curvas:  
a) la recta que une los puntos, b) la parábola  $y=x^2$ , c) la circunferencia  $x^2+y^2=2x$ .

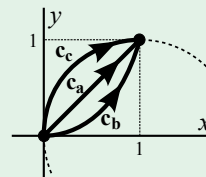
Posibles parametrizaciones: a)  $\mathbf{c}_a = (t, t)$ , b)  $\mathbf{c}_b = (t, t^2)$ , c)  $\mathbf{c}_c = (t, \sqrt{2t-t^2})$ , con  $t \in [0, 1]$  todas.

Las integrales en cada caso son:

$$a) \int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1,$$

$$b) \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1,$$

$$c) \int_0^1 (2t-t^2, 2t\sqrt{2t-t^2}) \cdot \left(1, \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}\right) dt = \int_0^1 (4t-3t^2) dt = 1.$$



Pero se cumple  $\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$ , lo que nos hace sospechar que  $\mathbf{f}$  es campo conservativo.

Es fácil en este caso identificar una función potencial:

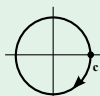
Si  $U_x = y^2$ , debe ser  $U = xy^2 + p(y)$  para alguna función  $p \Rightarrow U(x, y) = xy^2$ .

Si  $U_y = 2xy$ , debe ser  $U = xy^2 + q(x)$  para alguna función  $q$

Por tanto, las parametrizaciones y cálculos de integrales anteriores han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer  $U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1$ .

[La forma de calcular una  $U$  en el espacio para un campo con  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$  es similar].

**Ej.** Hallemos la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$  a lo largo de  $x^2+y^2=1$  en sentido antihorario.



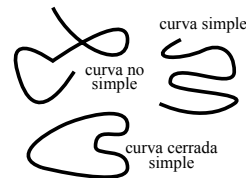
Si  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi$ .

No puede haber un potencial  $C^1$  que contenga la curva, pese a ser  $f_y = g_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ .

[No basta la igualdad de las derivadas cruzadas para ser conservativo. Se verá que si bastará si  $\mathbf{f}$  es  $C^1$  en todo  $\mathbf{R}^2$ , o incluso si lo es en lo que se llamará un 'conjunto simplemente conexo'].

Veamos teoremas que relacionan integrales dobles e integrales de línea sobre curvas cerradas en el plano. Se verán otros sobre integrales de campos vectoriales en el espacio (estos se pueden ver como casos particulares), tras estudiar las integrales de superficie.

Una **curva simple** es la imagen de un camino  $C^1$  a trozos **inyectivo**. Una **curva cerrada simple** en  $\mathbf{R}^2$  será la imagen de un  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ , inyectivo en  $[a, b]$  y tal que  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ . Una curva de estas puede recorrerse en dos sentidos diferentes; para indicar que una integral se recorre en sentido antihorario indicaremos  $\oint$ .



**Teorema de Green:**

Sea  $D \subset \mathbf{R}^2$  limitado por  $\partial D$  curva cerrada simple y sean los campos escalares  $P, Q \in C^1(D)$ .

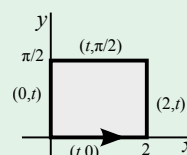
$$\text{Entonces: } \iint_D [Q_x - P_y] dx dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy.$$

[La prueba se puede ver en el Marsden-Tromba; si  $(P, Q)$  es conservativo, se tiene  $0 = \oint (P, Q) ds$ ].

**Ej.** Hallemos  $\oint_{\partial D} e^x \sin y dx + e^{2x} \cos y dy$  siendo  $D$  el rectángulo  $[0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ .

$$\int_0^2 (0 \cdot 1 + 0) dt + \int_0^{\pi/2} (0 + e^4 \cos t \cdot 1) dt - \int_0^2 (e^t \cdot 1 + 0) dt - \int_0^{\pi/2} (0 + \cos t \cdot 1) dt$$

$$\text{Con Green: } \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2e^{2x} \cos y - e^x \cos y) dx dy = [\sin y]_0^{\pi/2} [e^{2x} - e^x]_0^2 = e^4 - e^2.$$



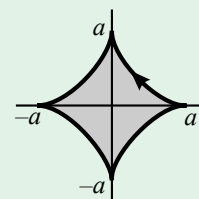
**Ej.** Calculemos el área encerrada por la ‘hipocicloide’  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

$$A = \iint dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx, \text{ pues } Q_x - P_y = 2. \text{ En este caso:}$$

$\mathbf{c}(\theta) = (a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  es una posible parametrización.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos^3 \theta)(3a \sin^2 \theta \cos \theta) - (a \sin^3 \theta)(-3a \cos^2 \theta \sin \theta)] d\theta$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} [1 - \cos 4\theta] d\theta = \frac{3}{8} \pi a^2.$$



Del teorema de Green se obtiene fácilmente:

**Teorema de la divergencia en el plano:**

Sean  $D \subset \mathbf{R}^2$  limitado por  $\partial D$  curva cerrada simple,  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbf{R}^2$  campo vectorial  $C^1$ , y  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario exterior a  $\partial D$ . Entonces  $\iint_D \text{div } \mathbf{f} dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds$ .

Si  $\partial D$  viene dada por  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ , la normal es  $\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ .

$$\text{Si } \mathbf{f} = (P, Q), \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = \int_a^b [P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)] dt$$

$$= \oint_{\partial D} P dy - Q dx \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_D (P_x + Q_y) dx dy.$$



**Ej.** Comprubemos este teorema para  $\mathbf{f}(x, y) = (7, y^2 - 1)$  en el semicírculo  $r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi$ :

$$\text{div } \mathbf{f} = 2y, \iint_D 2y dx dy = \int_0^\pi \int_0^3 2r^2 \sin \theta dr d\theta = 36.$$

$$\text{Para } C_1, \text{ si } \mathbf{c}(x) = (x, 0), x \in [-3, 3], \mathbf{n} = (0, -1), \int_{C_1} (1 - y^2) ds = \int_{-3}^3 dx = 6.$$

$$\text{Para } C_2, \text{ si } \mathbf{c}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), t \in [0, \pi], \|\mathbf{c}'(t)\| = 3. \text{ Como } \mathbf{n} = (\cos t, \sin t),$$

$$\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = 3 \int_0^\pi (7 \cos t + 9 \sin^3 t - \sin t) dt = 30.$$

