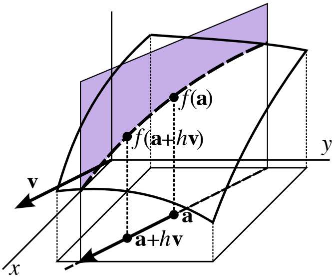
# 1. Conceptos básicos (este pdf)

1.1 Es espacio $\mathbf{R}^n$

1.2 Gráficas de funciones escalares

1.3 Límites y continuidad en $\mathbf{R}^n$




# 2. Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

2.1 Campos escalares y sus derivadas

2.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena

# 3. Funciones implícitas. Máximos y mínimos.

3.1 Funciones implícitas e inversas

3.2 Extremos de funciones escalares

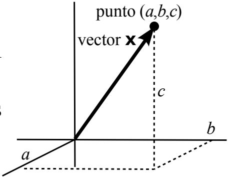
Aquí hablamos de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ (en general en apuntes).

$\mathbf{R}^2 \equiv \{\mathbf{x}=(a,b) : a,b\in\mathbf{R}\}$ es espacio vectorial de dimensión $2$ con:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \text{ y } k\mathbf{x}=(ka,kb)\,,\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^2,\ k\in\mathbf{R}\,.$$

Además se llama **producto escalar** de dos vectores a $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = ac+bd$ , la **norma** o **módulo** es $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{a^2+b^2}$ y la **distancia** $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ .

En vez de $\mathbf{x}$ se puede poner $\bar{x}$ o $\vec{x}$ . Será $\mathbf{R}^3 \equiv \{\mathbf{x}=(a,b,c)\}$ .

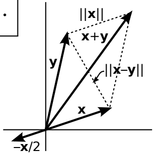



Se dice que $\mathbf{x}$ es **punto** o **vector** de $\mathbf{R}^n$. Un $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2$ se puede ver como el punto de coordenadas $(a,b)$ o como el vector que une el origen $(0,0)$ con $(a,b)$ [igual en $\mathbf{R}^3$]. $\mathbf{R}$ es un caso particular y a los reales se les llama a veces **escalares**.

Se prueban fácil varias de estas propiedades:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}\,,\ \ (k\,\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=k\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot(k\,\mathbf{y})\,,\ \ \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}\,,\ \ \|k\,\mathbf{x}\|=|k|\,\|\mathbf{x}\|\,,$$

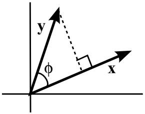
$$\|\mathbf{x}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}\,,\ \ \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\| \ \text{(desigualdad triangular)}\,,\ \ |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\le\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \ \text{(desigualdad de Cauchy-Schwartz)}\,.$$




Mucho tiene claro significado geométrico. Suma es el vector diagonal del paralelogramo de lados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ . O el vector cuya punta es el final de $\mathbf{x}$ si llevamos paralelamente su base al final de $\mathbf{y}$ . La desigualdad triangular dice que un lado mide menos que la suma de lo que miden los otros dos...

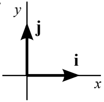
# Mas **espacio $\mathbf{R}^n$** y ejemplos

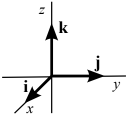
En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ el producto escalar se puede escribir $\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\phi}$ , $\phi$ ángulo que forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Por tanto, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$ si son perpendiculares.




Los vectores de la base de $\mathbf{R}^2$ se escriben $\mathbf{i}=(1,0)$ y $\mathbf{j}=(0,1)$ , y todo $\mathbf{x}$ se puede dar como combinación lineal de ellos: $\mathbf{x}=(a,b)=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ .

En $\mathbf{R}^3$ , $\mathbf{i}=(1,0,0)$ , $\mathbf{j}=(0,1,0)$ , $\mathbf{k}=(0,0,1)$ .



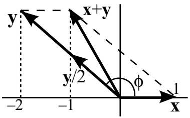

Un vector es **unitario** cuando tiene norma 1. $\big[$ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ lo son$\big]$.
Si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ , un $\mathbf{u}$ unitario con su dirección y sentido es $\mathbf{u}=\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ .

Sólo para $n=3$ , se define el **producto vectorial** de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como el **vector** (perpendicular a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ):

$$\boxed{\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}} .$$

**Ej 1.** Si $\mathbf{x}=(1,0)=\mathbf{i}$ , $\mathbf{y}=(-2,2)$ es: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(-1,2)$ . $\frac{1}{2}\,\mathbf{y}=(-1,1)$ .

$\|\mathbf{x}\|=1$ , $\|\mathbf{y}\|=2\sqrt{2}$ . $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=-2$ . $\Big[$Debía ser $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi<0$ , pues $\phi>\frac{\pi}{2}$ . De hecho $\phi=\arccos\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{3\pi}{4}$ $\Big]$.




**Ej 2.** Si $\mathbf{x}=(1,0,2)$ , $\mathbf{y}=(-2,1,3)$ , su producto escalar es $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=4$ .

$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{5}$ , $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{14}$ . ( $4\leq\sqrt{70}$ se cumple Cauchy-Schwartz ). $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|(3,-1,-1)\|=\sqrt{11}$ (distancia entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ).

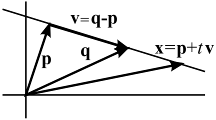
$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix}=(0-2)\mathbf{i}-(3+4)\mathbf{j}+(1-0)\mathbf{k}=(-2,-7,1) .$$

Es $\perp$ a ambos: $(1,0,2)\cdot(-2,-7,1)=0$ , $(-2,1,3)\cdot(-2,-7,1)=0$

$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=3\sqrt{6}$ nos da el área del parelogramo cuyos lados son los vectores (significado que tiene la longitud de un producto vectorial).

En cálculo en $\mathbf{R}$, una **recta del plano** se suele escribir $y=y_0+m(x-x_0)$ ó $y=mx+b$, si nos fijamos en la pendiente $m$, el punto $(x_0,y_0)$ por el que pasa o la ordenada en el origen $b$. Demos otras expresiones de rectas ahora usando vectores.

La que pasa por $\mathbf{p}=(p_1,p_2)$ y $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$ se puede escribir:



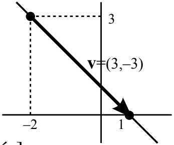

$$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \quad \text{o} \quad \mathbf{x}=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}\,,\ t\in\mathbf{R}\,.$$

$\big[$Si $t\in[0,1]$, $\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ da el segmento que los une$\big]$.

O dado $\mathbf{p}$ y el vector dirección $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ la recta viene dada por $\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{v}$, que en coordenadas pasa a ser $\begin{cases} x=p_1+tv_1 \\ y=p_2+tv_2 \end{cases}$.

**Ej 3.** Describamos de varias formas el segmento que une $\mathbf{p}=(-2,3)$ y $\mathbf{q}=(1,0)$.

Como la recta es $y=1-x$, tenemos: $(t,1-t)$, $t\in[-2,1]$.




Deducimos otra parametrización de arriba:

$$\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}=(3,-3)\,,\ \mathbf{p}+t\mathbf{v}=(-2+3t,3-3t)\,,\ t\in[0,1]\,.$$

O cambiando papeles: $\mathbf{q}+t(\mathbf{p}-\mathbf{q})=(1-3t,3t)$, $t\in[0,1]$.

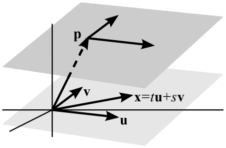
[Las 2 primeras lo recorren, al crecer $t$, en el mismo sentido y la otra al revés].

Las ecuaciones vectoriales de las **rectas y segmentos en el espacio** son las mismas.

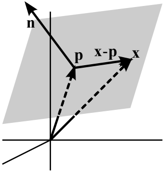
# Planos

La ecuación general de un **plano en el espacio** es $\boxed{ax+by+cz=d}$ .

[ $a, b, c$ no todas cero. Si $d=0$ pasa por el origen].




Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores (no múltiplo uno de otro), $\mathbf{x}=t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$ , $t, s \in \mathbf{R}$ es un plano que contiene esos vectores y pasa por el origen. $\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$ es otro plano paralelo que pasa por $\mathbf{p}$ .




Un plano quedará también determinado conocidos un punto $\mathbf{p}$ suyo y un vector $\mathbf{n}=(a,b,c)$ normal al plano, pues será:

$$\boxed{(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}=0}\ ,\quad a(x-p_1)+b(y-p_2)+c(z-p_3)=0\ ,$$
$$ax+by+cz=-ap_1-bp_2-cp_3\ .$$

Un **vector normal al plano** $ax+by+cz=d$ es el $(a,b,c)$ .

**Ej 5.** Damos la ecuación del plano que fijan $\mathbf{p}=(3,2,-1)$ , $\mathbf{q}=(1,-1,3)$ , $\mathbf{r}=(3,-2,4)$ .

Es normal a él el vector $(\mathbf{q}-\mathbf{p})\times(\mathbf{r}-\mathbf{p})=(-2,-3,4)\times(0,-4,5)=(1,10,8)$ .

El plano es, pues: $1(x-3)+10(y-2)+8(z+1)=0$ , es decir, $x+10y+8z=15$ .

Más largo eliminar $t$ y $s$ de $\mathbf{x}=t(\mathbf{q}-\mathbf{p})+s(\mathbf{r}-\mathbf{p})=\begin{cases} x=3-2t \longrightarrow t=\frac{3}{2}-\frac{x}{2} \searrow \\ y=2-3t-4s \qquad\qquad s=\frac{3x}{8}-\frac{y}{8}-\frac{5}{8}\searrow\cdots \\ z=-1+4t+5s \end{cases}$

O, aún peor, resolver $\begin{cases} 3a+2b-c=d \\ a-2b+3c=d \\ 3a-2b+4c=d \end{cases}$ [debe pasar por los puntos] $\xrightarrow{\cdots}$ $a=\frac{d}{15}$ , $b=\frac{10d}{15}$ , $c=\frac{8d}{15}$ .

Definimos estos términos que aparecerán varias veces en el curso:

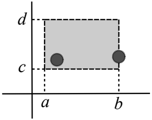
**Entorno** de centro $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ y radio $r$ es $B_r(\mathbf{a})\equiv\left\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n:\ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\right\}$.
[círculo en el plano, esfera en el espacio, sin bordes].

$\mathbf{a}\in A$ es **interior** al conjunto $A\subset\mathbf{R}^n$ si existe $r$ tal que el entorno $B_r(\mathbf{a})\subset A$.
$A$ es **abierto** si todos sus puntos son interiores $\left[A=\mathit{int}\,A\equiv\{\text{interiores a } A\}\right]$.

$\mathbf{p}\in\mathbf{R}^n$ es **punto de acumulación** de $A$ si en todo entorno de **p** hay infinitos puntos de $A$. $A$ es **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación.

**Frontera** de $A$ es $\partial A\equiv\left\{\mathbf{x}:\ \text{todo } B_r(\mathbf{x}) \text{ tiene puntos de } A \text{ y de } \mathbf{R}^n-A\right\}$.

El **cierre** de $A$ es el conjunto $\bar{A}=\mathit{int}\,A\cup\partial A$. $A$ es **acotado** si existe $M\in\mathbf{R}$ con $\|\mathbf{x}\|<M\ \ \forall\mathbf{x}\in A$. $A$ es **compacto** si es cerrado y acotado.




**Ej 6.** Es abierto en $\mathbf{R}^2$ el producto de intervalos abiertos $A=(a,b)\times(c,d)$ [rectángulo sin borde], pues para todo $\mathbf{a}\in A$ existen $B_r(\mathbf{a})$ contenidos en él (por ejemplo, si $r$ es el mínimo de las distancias a los lados). La frontera $\partial A$ son los 4 lados. $A$ no es cerrado pues los puntos de $\partial A$ son de acumulación y no de $A$. El producto $\bar{A}=[a,b]\times[c,d]$ de cerrados no es abierto pues los puntos de $\partial A$ no son interiores (ningún $B_r$ está contenido en $A$). Y es cerrado, pues sus puntos de acumulación son los puntos de $A$ o de $\partial A$ y todos son del conjunto. Como también $\bar{A}$ es acotado es compacto.

## 1.2 Gráficas de funciones (o campos) escalares $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ .

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ \quad (x,y) \to f(x,y) \end{array}}$$

**Funciones reales de 2 variables reales en un dominio** $D$ .
Su **gráfica** es el conjunto de puntos $\big(x,y,f(x,y)\big)$, $(x,y)\in D$ .

Si $n=2$ (el que tratamos aquí) describe una **superficie** en el espacio, que se puede tratar de dibujar en perspectiva. [Para $n=1$ la gráfica es una curva en el plano y si $n\geq 3$ estamos ya en un espacio de dimensión $\geq 4$ ].

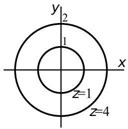
Para esquematizar la gráfica (sin ordenador) haremos secciones (curvas en el espacio) cortando la superficie con diferentes planos. Las más interesantes son cuando $z=C$ , las **curvas de nivel** (curvas del plano $xy$ en que $f$ vale lo mismo). Son fáciles de dar las obtenidas al hacer $x=C$ o $y=C$ , en particular los cortes con el plano $yz$ (el del papel o la pizarra) o con el $xz$ (perpendicular).

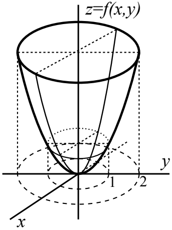
**Ej 2.** $\boxed{f(x,y)=x^2+y^2}$ . Las curvas de nivel $x^2+y^2=C$ son circunferencias de radio $\sqrt{C}$ .

Los cortes con $\begin{array}{l} x=0 \to z=y^2 \\ y=0 \to z=x^2 \end{array}$ son parábolas.

Con esto es fácil (en este caso sencillo) dibujar la gráfica de este '**paraboloide de revolución**'.

[Si las curvas de nivel son circunferencias centradas, la superficie siempre será de revolución].



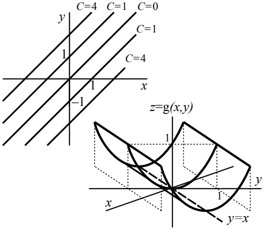



**Ej 3.** $\boxed{g(x,y)=(x-y)^2}=C \to x-y=\pm\sqrt{C}$ (rectas paralelas).

Para $C=0,1,4$ son $y=x$, $y=x\pm 1$, $y=x\pm 2$.

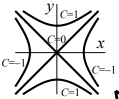
El corte con $x=0$ es una parábola: $z=y^2$. También lo son los cortes con $y=0$ $\left(z=x^2\right)$ o $y=-x$ $\left(z=4x^2\right)$.

Viene a ser la gáfica de la parábola $z=y^2$ trasladada a lo largo de la recta $y=x$ (que es donde se anula la $g$).




**Ej 4.** Sea $\boxed{z=y^2-x^2}$. Dibujemos este '**paraboloide hiperbólico**' (silla de montar).

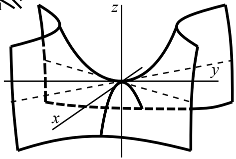
Las curvas de nivel $y^2-x^2=C$ son en general unas hipérbolas [menos para $C=0$ en que pasan a ser el par de rectas $y=\pm x$].




Los cortes con $y=0$ y $x=0$ son $z=-x^2$ y $z=y^2$

[y son parábolas todos los cortes con $y=C$ y $x=C$].

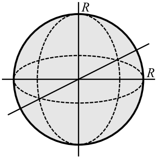
No es fácil hacer el dibujo en 3 dimensiones, pero las curvas de nivel y los cortes ya nos bastan para hacernos una idea bastante aproximada de la gráfica.



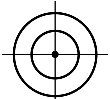
## Superficies importantes (definen más de una o ninguna $f$ escalar) y una discontinua

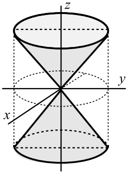
**Ej 5.** $\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$ (superficie esférica) , $\boxed{z^2=x^2+y^2}$ (cono), $\boxed{x^2+y^2=R^2}$ (cilindro).

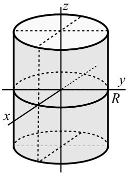
Las primeras son 2 campos escalares $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ , $z=\pm\sqrt{y^2+x^2}$ y la otra $0$ .




[las curvas de nivel son circunferencias]





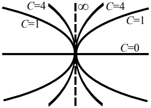




Para $x=0$ aparece la circunferencia $y^2+z^2=R^2$ (esfera) y las rectas $z=\pm y$ (cono).
El cilindro es la circunferencia de radio $R$ llevada verticalmente (pues no depende de $z$ ).

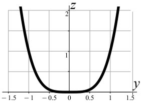
Todos los ejemplos anteriores eran '**cuádricas**': $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+ax+by+cz=d$ (generalizan las cónicas). Hay más tipos de ellas: elipsoides, hiperboloides, parejas de planos...

**Ej 8.** $\boxed{p(x,y)=\frac{y^4}{x^2}}=C$ , $x=\pm\frac{1}{\sqrt{C}}y^2$ $\big[$parábolas para $C>0$ , $p(x,0)=0$ , '$\infty$' si $x=0\big]$.

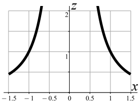
Cortes $z=y^4/a^2$ con $x=a$ , y curvas que van a infinito si $y=b$ .



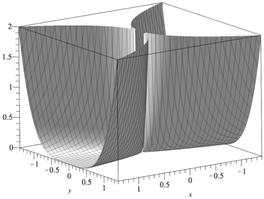

curvas de nivel




corte con $x=1$




corte con $y=1$



dibujo con Maple

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=L \text{ si } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que si } \mathbf{x}\in D \text{ y } 0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \text{ entonces } |f(\mathbf{x})-L|<\varepsilon .}$$

$$\boxed{f \text{ continua en } \mathbf{a}\in int\, D \text{ si } \forall\varepsilon\ \exists\delta \text{ tal que } \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|<\varepsilon .}$$

[En algún entorno de **a** los valores de $f(\mathbf{x})$ deben estar lo cerca que nos pidan de $f(\mathbf{a})$ ].

[Con la definición se ve fácil que una $f$ constante o $f(x,y)=x$ son continuas en $\mathbf{R}^2$ ].

Teoremas (como en $\mathbf{R}$ ) aseguran que suma, producto y cociente con denominador no nulo de $f$ , $g$ continuas son continuas. Y la composición de campos y funciones:

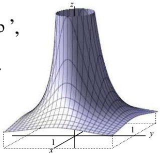
$$\boxed{f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R} \text{ continua en } \mathbf{a},\ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \text{ continua en } f(\mathbf{a}) \Rightarrow g\circ f \text{ continua en } \mathbf{a} .}$$

Con ellos, muchísimos campos lo son en todos o casi todos los puntos **a simple vista**.

Así lo son en todo punto $f(x,y)=\dfrac{xy-x^2}{y^2+3}$ , $h(x,y,x)\underset{\uparrow}{=} e^{xyz}$ , ...

lo son numerador y denominador no nulo$\uparrow$ composición de $f(x,y,z)=xyz$ , $g(z)=e^z$ continuas

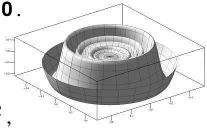
**Ej 1.** $i(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ claramente continua si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ y discontinua ahí ('tiende a $\infty$ ', o sea, para $\mathbf{x}\in B^*_\delta(\mathbf{0})$ será $i(\mathbf{x})>K$ $\forall K$ dado, si $\delta$ suficientemente pequeño).




[Hay teoremas como en $\mathbf{R}$ que precisan "$\frac{1}{+0}=\infty$" (algo positivo dividido por algo que tiende a 0 y es positivo tiende a $\infty$ ). No olvidemos el **falso** $\frac{1}{0}=\infty$ ].

Sólo hay que pararse (como en $\mathbf{R}$ ) a mirar la continuidad en puntos patológicos.

# Ejemplos de continuidad (para comprobar que aquí las cosas son complicadas)



**Ej 2.** $h(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}$ , con $h(\mathbf{0})=0$ , es obviamente continua si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ .

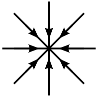
Para ver que lo es en **0** se puede utilizar en este caso sencillo la definición

$$\big|h(\mathbf{x})-h(\mathbf{0})\big|\leq|x^2+y^2|<\varepsilon \text{ si } \|\mathbf{x}-\mathbf{0}\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\sqrt{\varepsilon}\,,$$

o verla como composición de la continua $g(x)=x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ y $f(x,y)=x^2+y^2$ ,

o incluso utilizar que sigue siendo aquí cierto (y es fácil de probar) que 'cero × acotado = cero'.

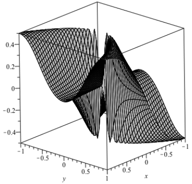
**Ej 4.** $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ , $f(0,0)=0$ vuelve a ser continua claramente si $(x,y)\neq(0,0)$ . ¿Y en $(0,0)$ ?

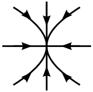


Vamos a acercarnos al origen a lo largo de diferentes curvas.

Empezamos con las rectas $y=mx$ : $f(x,mx)=\frac{m^2x}{1+m^4x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}0$ .

Pero esto no es la definición del límite en $\mathbf{R}^2$.



El valor de $f$ sobre las parábolas $x=py^2$ es $f\big(py^2,y\big)=\frac{p}{p^2+1}$ .

Tan cerca como se quiera del origen hay puntos en los que el campo vale, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ ( $p=1$ ). **Discontinua** en $(0,0)$ .

[Dibujada con un ordenador, tiene el aspecto feo del dibujo de la derecha].

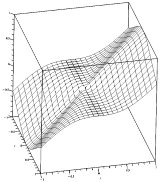
Acercarse por diferentes curvas y obtener siempre el mismo valor **no prueba** la existencia del límite, pues hay otras infinitas formas distintas de hacerlo. Con estos cálculos se consigue a veces probar que no lo hay obteniendo límites distintos entre sí, o diferentes del valor de $f$ en el punto, o curvas sobre las que no hay límite. Y para los límites de una variable se tienen además las técnicas ya conocidas.

Para calcular límites (y analizar la continuidad) en $(0,0)$ a veces es útil (pero en general lo complica) utilizar las **coordenadas polares**: $x=r\cos\theta$ , $y=\text{sen}\,\theta$ .

**Ej 5.** ¿Es continua $f(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}$ , $f(0,0)=0$ , en el origen? Es claro con la expresión $f(r,\theta)=r\,\text{sen}^3\theta$ que cerca de $\mathbf{0}$ es tan pequeño como queramos:

$$\left|f(r,\theta)-0\right|=r\left|\text{sen}^3\theta\right|\le r<\varepsilon \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\|=r<\delta=\varepsilon .$$

Peor cartesianas: $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}-0\right|=|x|\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\le|x|\le\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$ si $\|\mathbf{0}\|<\delta=\varepsilon$ .



En el dibujo de maple se ve continua pero con algún pliegue raro. No será diferenciable en el origen.

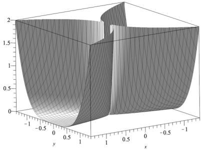
Generalicemos la idea del cálculo anterior con un teorema:

**Teor.** $\boxed{\text{Si } \left|f(r,\theta)-L\right|\le g(r) \text{ y } g(r)\xrightarrow[r\to 0]{} 0 \text{ entonces } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L .}$

El teorema **no dice** que el límite exista si $f(r,\theta)\to L$ cuando $r\to 0$, exige que también podamos acotar los términos en $\theta$ . Nos da un contraejemplo la $p(x,y)$ dibujada en el ejemplo 8 de 1.2:

**Ej 6.** Para $p(x,y)=\frac{y^4}{x^2}$ , $p(0,y)=0$ se cumple $p(r,\theta)=r^2\frac{\text{sen}^4\theta}{\cos^2\theta}\xrightarrow[r\to 0]{} 0$ (incluso si $x=0$ , $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ ).

Pero cualquier corte con $y=b$ , $z=\frac{b^4}{x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}\infty$ y no tiene límite en $(0,0)$ [ni en ningún $(0,b)$ , pues en ellos esta función positiva se va a infinito, y es obvio que es continua (y tiene límite) en cualquier $(a,b)$ , $a\neq 0$ ].



[Que $f(r,\theta)\xrightarrow[r\to 0]{} 0$ viene a equivaler a que el límite acercándonos por rectas sea $0$ . En este caso $p(x,mx)=m^4x^2\xrightarrow{x\to 0} 0$ que, desde luego, no dice que $p$ tienda a 0 ].