

1. Conceptos básicos (este pdf)

1.1 Es espacio \mathbf{R}^n

1.2 Gráficas de funciones escalares

1.3 Límites y continuidad en \mathbf{R}^n

2. Cálculo diferencial en \mathbf{R}^n

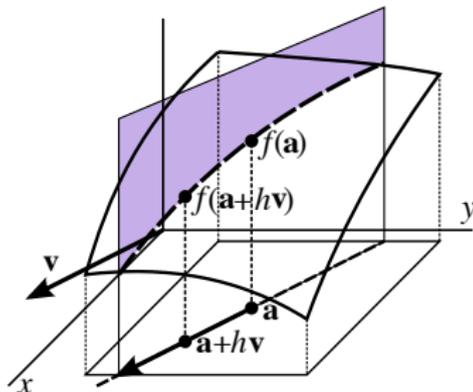
2.1 Campos escalares y sus derivadas

2.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena

3. Funciones implícitas. Máximos y mínimos.

3.1 Funciones implícitas e inversas

3.2 Extremos de funciones escalares



Conceptos básicos. 1.1 El espacio \mathbf{R}^n .

Aquí hablamos de \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 (en general en apuntes).

$\mathbf{R}^2 \equiv \{\mathbf{x} = (a, b) : a, b \in \mathbf{R}\}$ es espacio vectorial de dimensión 2 con:
 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$ y $k\mathbf{x} = (ka, kb)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$, $k \in \mathbf{R}$.
Además se llama **producto escalar** de dos vectores a $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = ac + bd$,
la **norma** o **módulo** es $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y la **distancia** $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

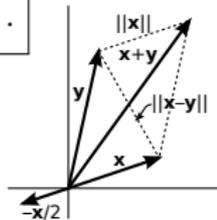
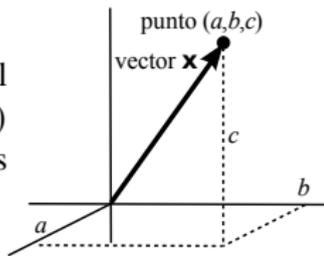
En vez de \mathbf{x} se puede poner \bar{x} o \vec{x} . Será $\mathbf{R}^3 \equiv \{\mathbf{x} = (a, b, c)\}$.

Se dice que \mathbf{x} es **punto** o **vector** de \mathbf{R}^n . Un $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ se puede ver como el punto de coordenadas (a, b) o como el vector que une el origen $(0, 0)$ con (a, b) [igual en \mathbf{R}^3]. \mathbf{R} es un caso particular y a los reales se les llama a veces **escalares**.

Se prueban fácil varias de estas propiedades:

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$, $(k\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (k\mathbf{y})$, $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$, $\|k\mathbf{x}\| = |k| \|\mathbf{x}\|$,
 $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (desigualdad triangular), $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz).

Mucho tiene claro significado geométrico. Suma es el vector diagonal del paralelogramo de lados \mathbf{x} e \mathbf{y} . O el vector cuya punta es el final de \mathbf{x} si llevamos paralelamente su base al final de \mathbf{y} . La desigualdad triangular dice que un lado mide menos que la suma de lo que miden los otros dos...



Mas espacio \mathbf{R}^n y ejemplos

En \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 el producto escalar se puede escribir $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi$,
 ϕ ángulo que forman \mathbf{x} e \mathbf{y} . Por tanto, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ si son perpendiculares.

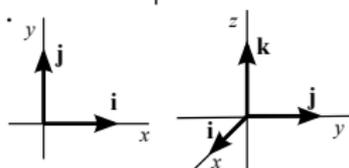
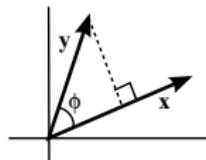
Los vectores de la base de \mathbf{R}^2 se escriben $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$, y todo \mathbf{x}
 se puede dar como combinación lineal de ellos: $\mathbf{x} = (a, b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

En \mathbf{R}^3 , $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Un vector es **unitario** cuando tiene norma 1. [\mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} lo son].

Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, un **u** unitario con su dirección y sentido es $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

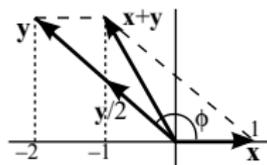
Sólo para $n=3$, se define el **producto vectorial** de \mathbf{x} e \mathbf{y}
 como el **vector** (perpendicular a \mathbf{x} e \mathbf{y}):



$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Ej 1. Si $\mathbf{x} = (1, 0) = \mathbf{i}$, $\mathbf{y} = (-2, 2)$ es: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-1, 2)$. $\frac{1}{2} \mathbf{y} = (-1, 1)$.

$$\|\mathbf{x}\| = 1, \|\mathbf{y}\| = 2\sqrt{2}. \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -2. \quad \left[\text{Debía ser } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi < 0, \text{ pues } \phi > \frac{\pi}{2}. \text{ De hecho } \phi = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} \right].$$



Ej 2. Si $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{y} = (-2, 1, 3)$, su producto escalar es $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 4$.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{5}, \|\mathbf{y}\| = \sqrt{14}. \quad \left(4 \leq \sqrt{70} \text{ se cumple } \right). \quad \left[\text{Cauchy-Schwartz} \right]. \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(3, -1, -1)\| = \sqrt{11} \quad (\text{distancia entre } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y}).$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (0-2)\mathbf{i} - (3+4)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = (-2, -7, 1). \quad \text{Es } \perp \text{ a ambos: } \begin{aligned} (1, 0, 2) \cdot (-2, -7, 1) &= 0 \\ (-2, 1, 3) \cdot (-2, -7, 1) &= 0 \end{aligned}$$

$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = 3\sqrt{6}$ nos da el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores
 (significado que tiene la longitud de un producto vectorial).

En cálculo en \mathbf{R} , una **recta del plano** se suele escribir $y = y_0 + m(x - x_0)$ ó $y = mx + b$, si nos fijamos en la pendiente m , el punto (x_0, y_0) por el que pasa o la ordenada en el origen b .

Demos otras expresiones de rectas ahora usando vectores.

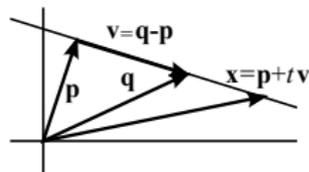
La que pasa por $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ y $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ se puede escribir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \quad \text{o} \quad \mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

[Si $t \in [0, 1]$, $\mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ da el segmento que los une].

O dado \mathbf{p} y el vector dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ la recta viene

dada por $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$, que en coordenadas pasa a ser $\begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases}$.



Ej 3. Describamos de varias formas el segmento que une $\mathbf{p} = (-2, 3)$ y $\mathbf{q} = (1, 0)$.

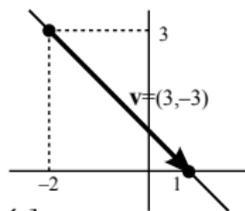
Como la recta es $y = 1 - x$, tenemos: $(t, 1 - t)$, $t \in [-2, 1]$.

Deducimos otra parametrización de arriba:

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (3, -3), \quad \mathbf{p} + t\mathbf{v} = (-2 + 3t, 3 - 3t), \quad t \in [0, 1].$$

O cambiando papeles: $\mathbf{q} + t(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = (1 - 3t, 3t)$, $t \in [0, 1]$.

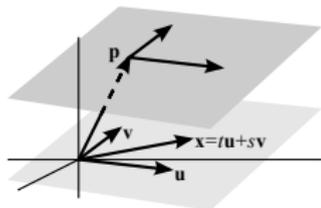
[Las 2 primeras lo recorren, al crecer t , en el mismo sentido y la otra al revés].



Las ecuaciones vectoriales de las **rectas y segmentos en el espacio** son las mismas.

La ecuación general de un **plano en el espacio** es $\boxed{ax+by+cz=d}$.

[a, b, c no todas cero. Si $d=0$ pasa por el origen].

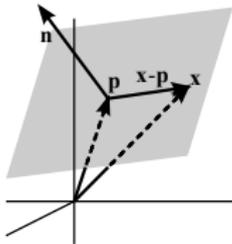


Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son dos vectores (no múltiplo uno de otro), $\mathbf{x} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, $t, s \in \mathbf{R}$ es un plano que contiene esos vectores y pasa por el origen. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ es otro plano paralelo que pasa por \mathbf{p} .

Un plano quedará también determinado conocidos un punto \mathbf{p} suyo y un vector $\mathbf{n} = (a, b, c)$ normal al plano, pues será:

$$\boxed{(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0}, \quad a(x-p_1) + b(y-p_2) + c(z-p_3) = 0, \\ ax + by + cz = -ap_1 - bp_2 - cp_3.$$

Un **vector normal al plano** $ax+by+cz=d$ es el (a, b, c) .



Ej 5. Damos la ecuación del plano que fijan $\mathbf{p} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{q} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{r} = (3, -2, 4)$.

Es normal a él el vector $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = (-2, -3, 4) \times (0, -4, 5) = (1, 10, 8)$.

El plano es, pues: $1(x-3) + 10(y-2) + 8(z+1) = 0$, es decir, $x + 10y + 8z = 15$.

Más largo eliminar t y s de $\mathbf{x} = t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + s(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = \begin{cases} x = 3 - 2t \rightarrow t = \frac{3}{2} - \frac{x}{2} \\ y = 2 - 3t - 4s \\ z = -1 + 4t + 5s \end{cases} \rightarrow s = \frac{3x}{8} - \frac{y}{8} - \frac{5}{8} \dots$

O, aún peor, resolver $\begin{cases} 3a + 2b - c = d \\ a - 2b + 3c = d \\ 3a - 2b + 4c = d \end{cases}$ [debe pasar por los puntos] $\rightarrow a = \frac{d}{15}, b = \frac{10d}{15}, c = \frac{8d}{15}$.

Definimos estos términos que aparecerán varias veces en el curso:

Entorno de centro $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ y radio r es $B_r(\mathbf{a}) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$.

[círculo en el plano, esfera en el espacio, sin bordes].

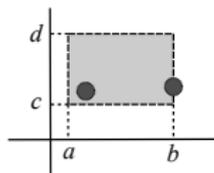
$\mathbf{a} \in A$ es **interior** al conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ si existe r tal que el entorno $B_r(\mathbf{a}) \subset A$.
 A es **abierto** si todos sus puntos son interiores [$A = \text{int } A \equiv \{\text{interiores a } A\}$].

$\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ es **punto de acumulación** de A si en todo entorno de \mathbf{p} hay infinitos puntos de A . A es **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Frontera de A es $\partial A \equiv \{\mathbf{x} : \text{todo } B_r(\mathbf{x}) \text{ tiene puntos de } A \text{ y de } \mathbf{R}^n - A\}$.

El **cierre** de A es el conjunto $\bar{A} = \text{int } A \cup \partial A$. A es **acotado** si existe $M \in \mathbf{R}$ con $\|\mathbf{x}\| < M \forall \mathbf{x} \in A$. A es **compacto** si es cerrado y acotado.

Ej 6. Es abierto en \mathbf{R}^2 el producto de intervalos abiertos $A = (a, b) \times (c, d)$ [rectángulo sin borde], pues para todo $\mathbf{a} \in A$ existen $B_r(\mathbf{a})$ contenidos en él (por ejemplo, si r es el mínimo de las distancias a los lados). La frontera ∂A son los 4 lados. A no es cerrado pues los puntos de ∂A son de acumulación y no de A . El producto $\bar{A} = [a, b] \times [c, d]$ de cerrados no es abierto pues los puntos de ∂A no son interiores (ningún B_r está contenido en A). \bar{A} es cerrado, pues sus puntos de acumulación son los puntos de A o de ∂A y todos son del conjunto. Como también \bar{A} es acotado es compacto.



1.2 Gráficas de funciones (o campos) escalares $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

Funciones reales de 2 variables reales en un dominio D .
Su **gráfica** es el conjunto de puntos $(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$.

Si $n=2$ (el que tratamos aquí) describe una **superficie** en el espacio, que se puede tratar de dibujar en perspectiva. [Para $n=1$ la gráfica es una curva en el plano y si $n \geq 3$ estamos ya en un espacio de dimensión ≥ 4].

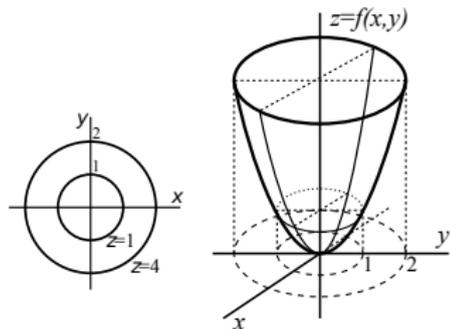
Para esquematizar la gráfica (sin ordenador) haremos secciones (curvas en el espacio) cortando la superficie con diferentes planos. Las más interesantes son cuando $z=C$, las **curvas de nivel** (curvas del plano xy en que f vale lo mismo). Son fáciles de dar las obtenidas al hacer $x=C$ o $y=C$, en particular los cortes con el plano yz (el del papel o la pizarra) o con el xz (perpendicular).

Ej 2. $f(x, y) = x^2 + y^2$. Las curvas de nivel $x^2 + y^2 = C$ son circunferencias de radio \sqrt{C} .

Los cortes con $x=0 \rightarrow z = y^2$
 $y=0 \rightarrow z = x^2$ son parábolas.

Con esto es fácil (en este caso sencillo) dibujar la gráfica de este '**paraboloide de revolución**'.

[Si las curvas de nivel son circunferencias centradas, la superficie siempre será de revolución].

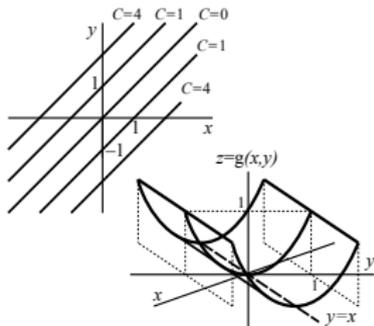


Ej 3. $g(x, y) = (x - y)^2 = C \rightarrow x - y = \pm \sqrt{C}$ (rectas paralelas).

Para $C = 0, 1, 4$ son $y = x$, $y = x \pm 1$, $y = x \pm 2$.

El corte con $x = 0$ es una parábola: $z = y^2$. También lo son los cortes con $y = 0$ ($z = x^2$) o $y = -x$ ($z = 4x^2$).

Viene a ser la gráfica de la parábola $z = y^2$ trasladada a lo largo de la recta $y = x$ (que es donde se anula la g).

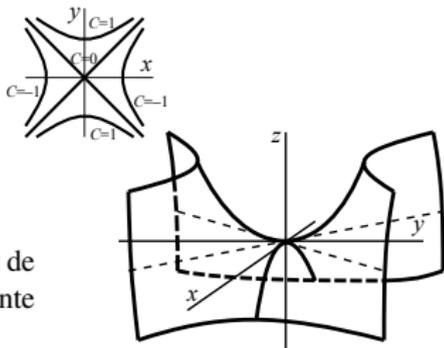


Ej 4. Sea $z = y^2 - x^2$. Dibujemos este 'paraboloide hiperbólico' (silla de montar).

Las curvas de nivel $y^2 - x^2 = C$ son en general unas hipérbolas [menos para $C = 0$ en que pasan a ser el par de rectas $y = \pm x$].

Los cortes con $y = 0$ y $x = 0$ son $z = -x^2$ y $z = y^2$ [y son parábolas todos los cortes con $y = C$ y $x = C$].

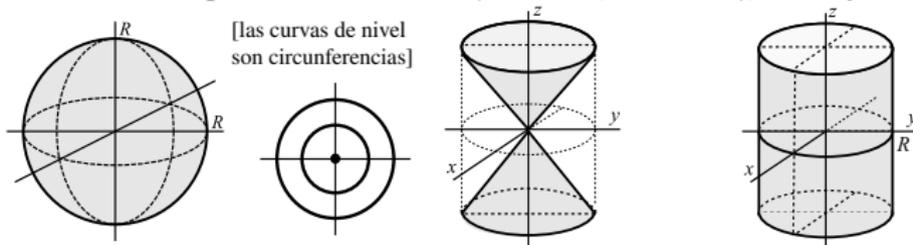
No es fácil hacer el dibujo en 3 dimensiones, pero las curvas de nivel y los cortes ya nos bastan para hacernos una idea bastante aproximada de la gráfica.



Superficies importantes (definen más de una o ninguna f escalar) y una discontinua

Ej 5. $x^2+y^2+z^2=R^2$ (superficie esférica), $z^2=x^2+y^2$ (cono), $x^2+y^2=R^2$ (cilindro).

Las primeras son 2 campos escalares $z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $z = \pm\sqrt{y^2+x^2}$ y la otra 0.



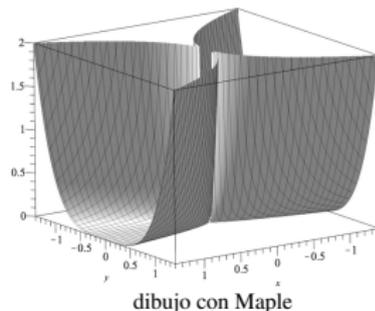
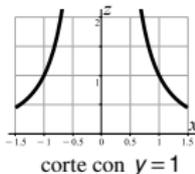
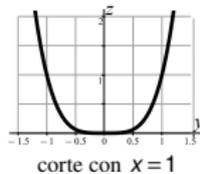
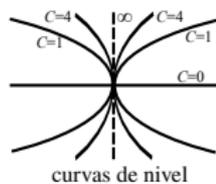
Para $x=0$ aparece la circunferencia $y^2+z^2=R^2$ (esfera) y las rectas $z = \pm y$ (cono).

El cilindro es la circunferencia de radio R llevada verticalmente (pues no depende de z).

Todos los ejemplos anteriores eran 'cuádricas': $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+ax+by+cz=d$ (generalizan las cónicas). Hay más tipos de ellas: elipsoides, hiperboloides, parejas de planos...

Ej 9. $p(x,y) = \frac{y^4}{x^2} = C$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{C}}y^2$ [parábolas para $C > 0$, $p(x,0) = 0$, ' ∞ ' si $x = 0$].

Cortes $z = y^4/a^2$ con $x = a$, y curvas que van a infinito si $y = b$.



1.3 Límites y continuidad $f: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (definiciones parecidas a \mathbf{R})

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $\mathbf{x} \in D$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ entonces $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.

f continua en $\mathbf{a} \in \text{int } D$ si $\forall \varepsilon \exists \delta$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$.

[En algún entorno de \mathbf{a} los valores de $f(\mathbf{x})$ deben estar lo cerca que nos pidan de $f(\mathbf{a})$].

[Con la definición se ve fácil que una f constante o $f(x, y) = x$ son continuas en \mathbf{R}^2].

Teoremas (como en \mathbf{R}) aseguran que suma, producto y cociente con denominador no nulo de f, g continuas son continuas. Y la composición de campos y funciones:

$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ continua en \mathbf{a} , $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continua en $f(\mathbf{a}) \Rightarrow g \circ f$ continua en \mathbf{a} .

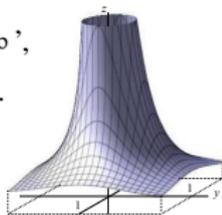
Con ellos, muchísimos campos lo son en todos o casi todos los puntos **a simple vista**.

Así lo son en todo punto $f(x, y) = \frac{xy - x^2}{y^2 + 3}$, $h(x, y, z) = e^{xyz}$, ...

lo son numerador y denominador no nulo \uparrow composición de $f(x, y, z) = xyz$, $g(z) = e^z$ continuas

Ej 1. $i(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ claramente continua si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y discontinua ahí ('tiende a ∞ ',
o sea, para $\mathbf{x} \in B_\delta^*(\mathbf{0})$ será $i(\mathbf{x}) > K \forall K$ dado, si δ suficientemente pequeño).

[Hay teoremas como en \mathbf{R} que precisan " $\frac{1}{+0} = \infty$ " (algo positivo dividido por algo que tiende a 0 y es positivo tiende a ∞). No olvidemos el **falso** $\frac{1}{0} = \infty$].



Sólo hay que pararse (como en \mathbf{R}) a mirar la continuidad en puntos patológicos.

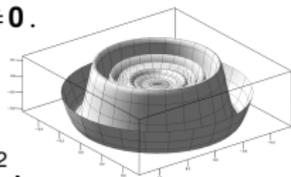
Ej 2. $h(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$, con $h(\mathbf{0}) = 0$, es obviamente continua si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Para ver que lo es en $\mathbf{0}$ se puede utilizar en este caso sencillo la definición

$$|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{0})| \leq |x^2 + y^2| < \varepsilon \text{ si } \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon},$$

o verla como composición de la continua $g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y $f(x, y) = x^2 + y^2$,

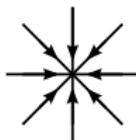
o incluso utilizar que sigue siendo aquí cierto (y es fácil de probar) que ‘cero \times acotado = cero’.



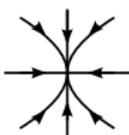
Ej 4. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, $f(0, 0) = 0$ vuelve a ser continua claramente si $(x, y) \neq (0, 0)$. ¿Y en $(0, 0)$?

Vamos a acercarnos al origen a lo largo de diferentes curvas.

Empezamos con las rectas $y = mx$: $f(x, mx) = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

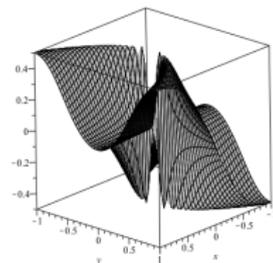


Pero esto no es la definición del límite en \mathbf{R}^2 .



El valor de f sobre las parábolas $x = py^2$ es $f(py^2, y) = \frac{p}{p^2 + 1}$.

Tan cerca como se quiera del origen hay puntos en los que el campo vale, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ ($p = 1$). **Discontinua** en $(0, 0)$.



[Dibujada con un ordenador, tiene el aspecto feo del dibujo de la derecha].

Acercarse por diferentes curvas y obtener siempre el mismo valor **no prueba** la existencia del límite, pues hay otras infinitas formas distintas de hacerlo. Con estos cálculos se consigue a veces probar que no lo hay obteniendo límites distintos entre sí, o diferentes del valor de f en el punto, o curvas sobre las que no hay límite. Y para los límites de una variable se tienen además las técnicas ya conocidas.

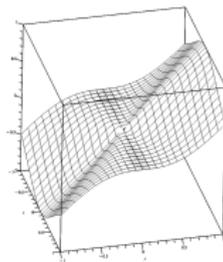
Para calcular límites (y analizar la continuidad) en $(0, 0)$ a veces es útil (pero en general lo complica) utilizar las **coordenadas polares**: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Ej 6. ¿Es continua $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 0$, en el origen? Es claro con la expresión $f(r, \theta) = r \sin^3 \theta$ que cerca de $\mathbf{0}$ es tan pequeño como queramos:

$$|f(r, \theta) - 0| = r |\sin^3 \theta| \leq r < \varepsilon \text{ si } \|(x, y) - (0, 0)\| = r < \delta = \varepsilon.$$

Peor cartesianas: $|\frac{y^3}{x^2+y^2} - 0| = |x| |\frac{x^2}{x^2+y^2}| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$ si $\|\mathbf{0}\| < \delta = \varepsilon$.

En el dibujo de maple se ve continua pero con algún pliegue raro. No será diferenciable en el origen.



Generalicemos la idea del cálculo anterior con un teorema:

Teor. Si $|f(r, \theta) - L| \leq g(r)$ y $g(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$.

El teorema **no dice** que el límite exista si $f(r, \theta) \rightarrow L$ cuando $r \rightarrow 0$, exige que también podamos acotar los términos en θ . Nos da un contraejemplo la $p(x, y)$ dibujada en el ejemplo 8 de 1.2:

Ej 7. Para $p(x, y) = \frac{y^4}{x^2}$, $p(0, y) = 0$ se cumple $p(r, \theta) = r^2 \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ (incluso si $x = 0$, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$).

Pero cualquier corte con $y = b$, $z = \frac{b^4}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$ y no tiene límite en $(0, 0)$

[ni en ningún $(0, b)$, pues en ellos esta función positiva se va a infinito, y es obvio que es continua (y tiene límite) en cualquier (a, b) , $a \neq 0$].

[Que $f(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ viene a equivaler a que el límite acercándonos por rectas sea 0.

En este caso $p(x, mx) = m^4 x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ que, desde luego, no dice que p tienda a 0].

