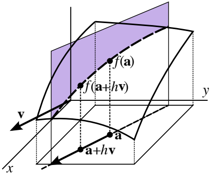
2.1 Campos escalares y sus derivadas. Direcionales ($n=2$)

Sean $f: D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ y $\mathbf{a}\in int\, D$ para que f esté definida cerca de $\mathbf{a}$. Para hallar la derivada en $\mathbf{R}$ se usa el valor de f en a y puntos cercanos $a+h$. En $\mathbf{R}^n$ hay puntos en cualquier dirección. Veamos cómo varía f sobre la recta que pasa por un punto $\mathbf{a}$ (dada por un vector $\mathbf{v}$), es decir, la variación de la curva que se obtiene cortando la gráfica con un plano vertical:

La **derivada de f según el vector v** en $\mathbf{a}$ es:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})\equiv f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{h}\quad \text{(si existe)}.$$

Si **v** es **unitario** se llama **derivada direccional** (de f en la dirección del vector **v** en el punto **a**).



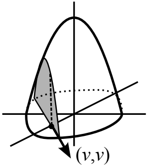
Veremos formas sencillas de hallarlas (a partir de las derivadas parciales), pero por ahora utilizando sólo la definición:

Ej 1a. Hallemos la derivada de $\boxed{f(x,y)=4-x^2-4y^2}$ en el punto $(1,0)$ según el vector $\mathbf{v}=(v,v)$:

$$D_{\mathbf{v}}f(1,0)=\lim_{h\to 0}\frac{4-(1+hv)^2-4(hv)^2-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2hv-5h^2v^2}{h}=-2v\ \to$$

$$D_{(1,1)}f(1,0)=-2\,,\ D_{(2,2)}f(1,0)=-4\,,\ D_{(-1,-1)}f(1,0)=2\,,\ \dots$$

Las direccionales son $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,0)=-\sqrt{2}$ y $D_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,0)=\sqrt{2}$.



El caso más importante de direccional es cuando **v** es un vector de la base canónica:

A la derivada de f en la dirección de **i** se le llama **derivada parcial** de f respecto a x. En un punto $\mathbf{a}=(a,b)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) \equiv f_x(\mathbf{a}) \equiv D_{\mathbf{i}} f(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\,.$$

Es decir, la parcial $f_x(\mathbf{a})$ **es la derivada en** $x=a$ **de** $g(x)=f(x,b)$**, función de la variable** x **obtenida viendo la** y **como constante.**

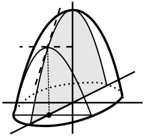
Análogamente se define $\frac{\partial f}{\partial y}\equiv f_y$ (derivada en la dirección de **j**) que se calcula simplemente mirando la x como constante. Y los significados geométricos son claros: las **pendientes de las tangentes a las curvas corte de la gráfica con planos** $y=b$ **o** $x=a$.

Gradiente de f es el **vector** $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ y es $\nabla f(\mathbf{a})=\big(f_x(\mathbf{a}),f_y(\mathbf{a})\big)$.

[Para $\mathbf{R}^3$ todo es similar, apareciendo además la $\frac{\partial f}{\partial z}\equiv f_z$ (derivada respecto a **k**)].

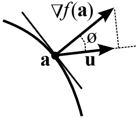
Se dice que el campo $f\in C^1$ **en un abierto** D **si sus parciales con continuas** en el conjunto.

Ej 1b. Si $f(x,y)=4-x^2-4y^2$ son $f_x=-2x$, $f_y=-8y$, $\nabla f=(-2x,-2y)$.
$f_x(1,0)=-2$ y $f_y(1,0)=0$ son las pendientes de las tangentes a las parábolas del corte con $y=0$ y $x=1$ $\left[g(x)=4-x^2,\ g(y)=3-4y^2\right]$.
[La f_x es negativa por decrecer f al crecer x y la f_y es 0 por el máximo].
La función es claramente C^1 en todo el plano.



Teniendo ∇f (las parciales) es muy fácil dar las derivadas según cualquier vector **v** :

$$\boxed{\text{Si } f\in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a}, \text{ es la derivada } D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})=\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}\,.}$$



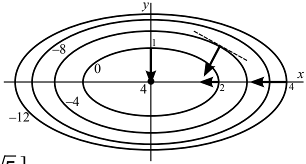
Si $\nabla f(\mathbf{a})\neq\mathbf{0}$ y **u** unitario, es $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})=\|\nabla f(\mathbf{a})\|\cos\phi$. Así la $D_{\mathbf{u}}$ es la componente del gradiente en la dirección de **u**. La $D_{\mathbf{u}}$ será máxima si $\cos\phi=1$ (si ambos tienen la misma dirección y sentido).

Por tanto, la **dirección y sentido de** ∇f son aquellos en los que **más crece** f . Si $\cos\phi=0$, será $D_{\mathbf{v}}f=0$: **en dirección perpendicular a** ∇f **el campo no varía**. Será ∇f **perpendicular a las curvas de nivel de** f (a sus tangentes).

Ej 1c. Para $f(x,y)=4-x^2-4y^2$, ya es muy fácil hallar las $D_{\mathbf{v}}$: $\nabla f=(-2x,-8y)\ \Rightarrow$

$$D_{(1,1)}f(1,0)=(-2,0)\cdot(1,1)=-2\,,\ D_{(2,2)}f(1,0)=(-2,0)\cdot(2,2)=-4\,,\ \ldots$$

Dibujemos algunas curvas de nivel $\big($elipses $x^2+4y^2=4-C$ con $C=4,0,-4,-8,-12\big)$ y los gradientes ∇f en (1,0), (2,0), (0,1) y (2,1) a escala.



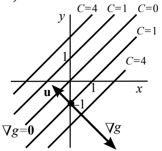
Mirando la gráfica de f como una montaña, ∇f indica la máxima subida. Entre las $D_{\mathbf{u}}f(2,1)$ direccionales es máxima la que da ∇f , es decir, en la dirección del vector $\mathbf{u}=\big(-\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5}\big)$ $\big[$y será $D_{\mathbf{u}}f(2,1)=4\sqrt5=\|\nabla f(1,2)\|\,\big]$.

Es mínima en la dirección opuesta $\mathbf{u}=\big(\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\big)$ $\big[\,D_{\mathbf{u}}=-4\sqrt5\,\big]$.

Nula en dirección de todo $\mathbf{v}\perp\nabla f$ $\big[$ (2,–1) o (–2,1) , tangentes a la curva $x^2+4y^2=8\,\big]$.

Ej 2. Para $g(x,y)=(x-y)^2$ es $\nabla g(x,y)=\big(2x-2y\,,2y-2x\big)=2(x-y)(1,-1)$.

Vector perpendicular a las rectas de nivel que apunta hacia donde crece g con módulo $2\sqrt{2}\,|x-y|$ mayor según nos alejemos de la recta $y=x$.



Es $\nabla g(0,-1)=(2,-2)$. El unitario **u** que da, por ejemplo, la mínima $D_{\mathbf{u}}g$ en el punto es $\mathbf{u}=\big(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ $\big[\,(-1,1)$ es opuesto al gradiente$\big]$.

Su valor: $D_{\mathbf{u}}\,g(0,-1)=(2,-2)\cdot\mathbf{u}=-2\sqrt{2}=-\|\nabla g\|=\|\nabla g\|\|\mathbf{u}\|\cos\pi$.

Ej 3. Si $f(x,y,z)=x^2y-\cos(yz)$ es $\nabla f=\big(2xy,x^2+z\operatorname{sen}(yz),y\operatorname{sen}(yz)\big)\xrightarrow{(1,1,0)}(2,1,0)$.

La derivada de f en $\mathbf{a}=(1,1,0)$ según el vector $\mathbf{v}=(1,-1,2)$ es $(2,1,0)\cdot(1,-1,2)=1$.

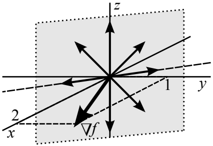
Para dar la direccional se debe dividir por el módulo: $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v}\to D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

La $D_{\mathbf{u}}f$ máxima es en la dirección y sentido de ∇f y su valor será su módulo $\|\nabla f\|=\sqrt{5}$.

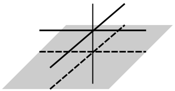
La derivada es 0 en la dirección de todo vector perpendicular a ∇f , que ahora forman un plano. Si $\mathbf{v}=(a,b,c)$ es perpendicular:

$$(2,1,0)\cdot\mathbf{v}=2a+b=0\,,\ \mathbf{v}=(a,-2a,c)\,,\ \mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{5a^2+c^2}}(a,-2a,c)\,.$$

Dos de los **u** unitarios para los que la derivada direccional es nula son, por ejemplo, $(0,0,1)$ y $\big(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\big)$.



En $\mathbf{R}$ se tenía 'derivable $\Rightarrow$ continua'. En $\mathbf{R}^n$ la existencia de todas las derivadas parciales **no implica** la continuidad. Ni siquiera que existan todas las direccionales.

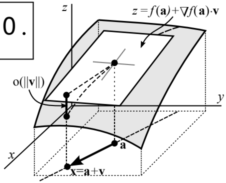


Ej 4. Para $f(x,y)=\begin{cases} 1 \text{ si } x=0 \text{ o } y=0 \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$ son $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, pero f es claramente discontinua en el origen.

Ej 5. Se prueba que $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ discontinua en $\mathbf{0}$ (Ej 4. de 1.3) tiene todas las $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{0})$.

Sí lo garantizará ser **diferenciable** (en $\mathbf{R}^2$ significa que **posee plano tangente**).

$$\boxed{f \text{ diferenciable en } \mathbf{a} \text{ si } \exists \nabla f(\mathbf{a}) \text{ y } \frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})-\nabla f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} \xrightarrow[\mathbf{x}\to\mathbf{a}]{} 0 .}$$



O sea, si $\mathbf{v}=\mathbf{x}-\mathbf{a}$, lo es si $f(\mathbf{a}+\mathbf{v})=f(\mathbf{a})+\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}+o(\|\mathbf{v}\|)$.
Así cuando $n=2$, f será diferenciable si cerca de $\mathbf{a}=(a,b)$ es $f(x,y)\approx f(\mathbf{a})+f_x(\mathbf{a})(x-a)+f_y(\mathbf{a})(y-b)$, es decir, si su gráfica se parece a la de un plano. Se prueba este teorema:

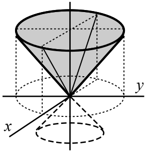
$$\boxed{f\in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a} \Rightarrow f \text{ diferenciable en } \mathbf{a} \Rightarrow f \text{ continua en } \mathbf{a} \text{ y existe } D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})\ \forall \mathbf{v} .}$$

Ej 1d. La $f(x,y)=4-x^2-4y^2$ de siempre, $C^1(\mathbf{R}^2)$, es diferenciable, pues, en cada punto.
En particular, en $(2,1)$, como $f(2,1)=-4$ y $\nabla f(2,1)=(-4,-8)$ se tiene que

$$f(x,y)=-4-4(x-2)-8(y-1)+o\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right).$$

Campos discontinuos (como los de los ejemplos 4 y 5) no serán diferenciables.

Ej 6. Pero pueden ser continuos y no diferenciables, como le pasa al cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ en el origen. Sus cortes con $y=0$ y $x=0$ son $z=|x|$ y $z=|y|$, funciones no derivables en 0, por lo que no existen $f_x(0,0)$ ni $f_y(0,0)$. Por tanto, no puede ser diferenciable ahí.



[Una f continua y no diferenciable tendrá 'picos', como le pasaba al $|x|$ en $\mathbf{R}$].

Ej 7. ¿Es $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$ (ej 6 de 1.3) diferenciable en $(0,0)$? (en los otros sí).

Vimos que era continua. Además: $f(x,0)=x \Rightarrow f_x(0,0)=1$, $f(0,y)=0 \Rightarrow f_y(0,0)=0$.

Pero no es diferenciable, pues no existe el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$ de:

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{(x^2+y^2)^{1/2}}=\frac{x^3(x^2+y^2)^{-1}-x}{(x^2+y^2)^{1/2}}=\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\xrightarrow{y=mx}\frac{-m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$$ (depende m).

Ej 8. $f(x,y)=\frac{x^4}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$ sí es diferenciable en $(0,0)$. Continuidad fácil en polares:

$$\big|f(r,\theta)-0\big|=r^2\cos^4\theta\leq r^2 \xrightarrow{r\to 0} 0 \Rightarrow f \text{ continua en } \mathbf{0}.$$

Y tambien existen las parciales (una vez más tenemos que acudir a la definición):

$f(x,0)=x^2 \Rightarrow f_x(0,0)=2x\big|_{x=0}=0$, $f(0,y)=0 \Rightarrow f_y(0,0)=0$. Es decir, $\nabla f(0,0)=\mathbf{0}$.

Sólo falta comprobar que $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{0})-\mathbf{0}\cdot\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$ (fácil en polares).

Si f_x y f_y son continuas (si $f \in C^1$) en un entorno de (a,b), f será diferenciable y tendrá en ese punto **plano tangente**. Hemos visto que su ecuación es:

$$\boxed{z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}\ .$$

Ej 1e. Para $f(x,y)=4-x^2-4y^2$, con $f_x=-2x$ y $f_y=-8y$ continuas en todo $\mathbf{R}^2$, el plano en el punto $(-2,1)$ es $z=-4+4(x+2)-8(y-1)=4x-8y+12$ (bastaba quitar la o del Ej 1d).

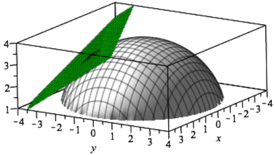
Como en $\mathbf{R}^3$ es ∇f normal a las superficies de nivel, el **plano tangente en un punto** (a,b,c) **de una superficie** S **dada en la forma** $F(x,y,z)=K$ es:

$$\boxed{\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c) = 0}\quad \left[\text{si } \nabla F \neq 0\right].$$

Ej 10. Hallemos el plano tangente en $(1,-2,3)$ a la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=14$:

$$\nabla F(1,-2,3)=(2x,2y,2z)\Big|_{(1,-2,3)}=(2,-4,6)\ \to$$

$$2(x-1)-4(y+2)+6(z-3)=0,\quad z=\tfrac{1}{3}(14-x+2y)\ .$$



Más largo con la otra fórmula: $z=+\sqrt{14-x^2-y^2}\ \to$

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{\ }},\ z_y=\frac{-y}{\sqrt{\ }},\ z_x(1,-2)=-\tfrac{1}{3},\ z_y(1,-2)=\tfrac{2}{3}$$

$$\to\ z=3-\tfrac{1}{3}(x-1)+\tfrac{2}{3}(y+2)\ \uparrow$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen para cada $\mathbf{x}\in D$ estos nuevos campos escalares se pueden volver a derivar consiguiendo las **derivadas parciales de orden** $2,3,\ldots$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\equiv f_{xx}\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\equiv f_{xy}\,,\quad \ldots$$

Ej 12. Si $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-2y}$, sus parciales $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=2x\,\mathrm{e}^{-2y}$, $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=-2x^2\mathrm{e}^{-2y}$ vuelven a tener derivadas parciales $\forall(x,y)$, con lo que tiene sentido calcular:

$$f_{xx}=2\,\mathrm{e}^{-2y},\ f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4x\,\mathrm{e}^{-2y},\ f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4x\,\mathrm{e}^{-2y},\ f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x^2\mathrm{e}^{-2y}.$$

Y podríamos seguir: $f_{xxx}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0$, ... , $f_{yyy}=-8x^2\mathrm{e}^{-2y}$, ...

No es casual que hayan coincidido las derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Se dice que $f\in C^n(D)$ si sus derivadas parciales hasta orden n son continuas en D .

Igualdad de Schwarz o de Clairaut: $\boxed{\text{Si } f\in C^2 \text{ en un entorno de } \mathbf{a} \Rightarrow f_{xy}(\mathbf{a})=f_{yx}(\mathbf{a})\,.}$

Ej 3c. Si $f(x,y,z)=x^2y-\cos(yz)$ eran $f_x=2xy$, $f_y=x^2+z\,\mathrm{sen}(yz)$, $f_z=y\,\mathrm{sen}(yz)$.

$f_{xx}=2y$, $f_{xy}=2x$, $f_{xz}=0$; $f_{yx}=2x$, $f_{yy}=z^2\cos(yz)$, $f_{yz}=\mathrm{sen}(yz)+yz\cos(yz)$;

$f_{zx}=0$, $f_{zy}=\mathrm{sen}(yz)+yz\cos(yz)$, $f_{zz}=y^2\cos(yz)$. (También coinciden las cruzadas).

Un campo escalar f admite como en $\mathbf{R}$ desarrollos de Taylor. La diferencial es el de orden 1. Sólo escribimos el polinomio de orden 2 en torno a un punto (a,b) de una f de dos variables de C^2 en un entorno del punto, sin expresiones del resto:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ & + \tfrac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \tfrac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2 + \cdots \end{aligned}}$$

Casi siempre, más que hallar derivadas, lo útil son los desarrollos conocidos de una variable.

Ej 12*. Hallemos el desarrollo de orden 2 de $f(x,y)=x^2e^{-2y}$ en torno a $(0,0)$ y $(-1,1)$:

El primero es casi inmediato: $f(x,y) = x^2(1-2y+2y^2+\cdots) = x^2 + o(x^2+y^2)$

$\big[$coherente con el hecho de que la única derivada no nula es $f_{xx}(0,0)=2\,\big]$.

$$f(-1,1)=e^{-2},\ f_x(-1,1)=f_y(-1,1)=-f_{xx}(-1,1)=-2e^{-2},\ f_{yy}(-1,1)=f_{xy}(-1,1)=4e^{-2}$$

$$\rightarrow\ f(x,y)\approx e^{-2}\big[1-2(x+1)-2(y-1)+(x+1)^2+4(x+1)(y-1)+2(y-1)^2\big].$$

$\big[$A lo mismo se llega desarrollando $(1-s)^2e^{-2t}e^{-2}$ en torno a $(0,0)$, $s=x+1$, $t=y-1\,\big]$.

Ej 14. Estudiemos la continuidad en $(0,0)$ de $f(x,y)=\frac{1-\cos(2x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f(0,0)=2$.

$$\cos(2t)=1-2t^2+\tfrac{2}{3}t^4-\cdots \Rightarrow f(x,y)=2-\tfrac{2}{3}\left(x^2+y^2\right)^2+\cdots \xrightarrow[\mathbf{x}\to\mathbf{0}]{} 2.$$ Es f continua.

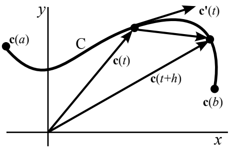
Esta sección trata funciones cuyos valores serán vectores. Primero el caso más sencillo, las

funciones vectoriales: $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{c}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n \\ \quad t \longrightarrow \mathbf{c}(t) = \big(c_1(t), ..., c_n(t)\big) \end{array}}$. Sus gráficas son **curvas** en $\mathbf{R}^n$.

A menudo trataremos $\mathbf{c}$ para t en un intervalo finito $t \in [a, b]$. Entonces describe una curva que une (en ese sentido) el punto $\mathbf{c}(a)$ con el $\mathbf{c}(b)$ [extremos de la curva].

Como trabajaremos en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, será $\mathbf{c}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ o $\mathbf{c}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

$\mathbf{c}$ es continua si lo son sus n componentes $c_k(t)$.
Es **derivable** si las n lo son y su **derivada** es el vector $\boxed{\mathbf{c}'(t) = \big(c_1'(t), \ldots, c_n'(t)\big)}$.



Al ser $\mathbf{c}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h)-\mathbf{c}(t)}{h}$, la pendiente de la secante tenderá a la **pendiente de la recta tangente** a la curva C dada por $\mathbf{c}(t)$. Si $\mathbf{c}(t)$ describe el movimiento de una partícula, $\mathbf{c}'(t)$ es el **vector velocidad** $\mathbf{v}(t)$ y $\|\mathbf{c}'(t)\|$ la rapidez (velocidad escalar) con la que la partícula avanza por la curva.

Por lo tanto, si $\mathbf{c}'(t_o) \neq \mathbf{0}$, una ecuación de la **recta tangente** a C en un punto $\mathbf{c}(t_o)$ suyo viene dada por $\boxed{\mathbf{x}(s) = \mathbf{c}(t_o) + s\,\mathbf{c}'(t_o)}$.

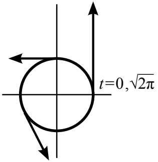
$\big[$Cuando $\mathbf{c}'(t_o) = \mathbf{0}$ no hay tangente definida y no es extraño que aparezcan picos en la curva$\big]$.

Ej 1. Sea $\mathbf{c}(t)=\left(\cos t^2, \operatorname{sen} t^2\right),\ t\in\left[0,\sqrt{2\pi}\,\right]$. $\mathbf{c}(0)=\mathbf{c}\left(\sqrt{2\pi}\,\right)=(1,0)$.

Por ser $\|\mathbf{c}(t)\|=\sqrt{\cos^2+\operatorname{sen}^2}=1$, recorrerá $\mathbf{c}$ la circunferencia unidad.

$\mathbf{c}'(t)=\left(-2t\operatorname{sen} t^2, 2t\cos t^2\right)$ será un vector tangente, y es $\|\mathbf{c}'(t)\|=2t$.

[La velocidad escalar crece con el tiempo. La misma curva la describe $\mathbf{c}_*(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$, y para ella es $\|\mathbf{c}_*'(t)\|=1$ constante].



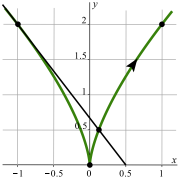
Ej 2. Dibujamos $\mathbf{c}(t)=\left(t^3, 2t^2\right)$ con $t\in[-1,1]$ y encontramos su recta tangente en $(-1,2)$ y dónde esta recta vuelve a cortar la curva.

Dando valores a t, o desde $y=2x^{2/3}$ ss tiene el dibujo. [Donde $\mathbf{c}'=\mathbf{0}$ surgió el pico].

$t=-1 \to \mathbf{c}(-1)=(-1,2)$, $\mathbf{c}'(-1)=(3t^2,4t)\big|_{t=-1}=(3,-4)$.

Recta tangente: $\mathbf{x}(s)=(3s-1, 2-4s)$. Se cortan si t y s cumplen:

$t^3=3s-1$, $2t^2=2-4s \to (3s-1)^2=(1-2s)^3$, $s=\frac{3}{8} \to \left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$.



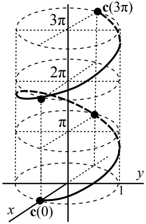
Ej 3. Dibujemos la **hélice** dada en $\mathbf{R}^3$ por $\mathbf{c}(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t\in[0,3\pi]$.

Como $[x(t)]^2+[y(t)]^2=1$, la proyección de la curva sobre el plano xy es la circunferencia unidad, y la z va creciendo con t.

El vector velocidad será $\mathbf{c}'(t)=\left(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1\right) \to \|\mathbf{c}'(t)\|=\sqrt{2}$, para cualquier t (se recorre la curva a velocidad escalar constante).

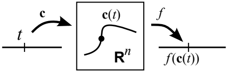
Por ejemplo, si $t=2\pi$ [en el punto $(1,0,2\pi)$] es $\mathbf{c}'(2\pi)=(0,1,1)$ y la recta tangente ahí es: $\mathbf{x}=(1,0,2\pi)+s(0,1,1)=(1,s,2\pi+s)$

[contenida en el plano $x=1$ y coherente con el dibujo].



Generalizamos la fórmula del cálculo en una variable $(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)\,g'(x)$.
Empezamos con el caso más sencillo, que une funciones vectoriales y campos escalares:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sean } \mathbf{c}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n\,,\ f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R} \text{ de } C^1 \text{ y } h(t)=f\big(\mathbf{c}(t)\big)\,. \\ \text{Entonces } h \text{ es derivable y es } h'(t)=\nabla f\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot\mathbf{c}'(t)\,, \\ \text{o sea: } h'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}(t))\,x_1'(t)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{c}(t))\,x_n'(t)\,.\end{array}}$$



$h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

La última igualdad (cuando $n=2$) habitualmente se suele escribir $\boxed{\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$, expresión imprecisa que no dice dónde está evaluada cada término y mantiene el nombre f para h (son los valores de f sobre una curva).

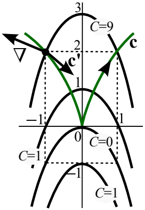
Ej 4. Si $\mathbf{c}(t)=\big(t^3,2t^2\big)$, $f(x,y)=\big(y+x^2\big)^2$ y $h=f\circ\mathbf{c}$, hallemos $h'(-1)$ con la regla de la cadena.

$\mathbf{c}(-1)=(-1,2)$, $\mathbf{c}'(-1)=(3,-4)$, $\nabla f=\big(4x(y+x^2),2(y+x^2)\big)$.

$\nabla f(-1,2)=(-12,6)$, $h'(-1)=\nabla f\big(\mathbf{c}(-1)\big)\cdot\mathbf{c}'(-1)=-60$.

[Comprobamos componiendo y derivando: $h(t)=\big(2t^2+t^6\big)^2$, $h'(-1)=-60$].

[Que sea $h'<0$ implica que la f decrece al avanzar sobre la curva, como se puede comprobar dibujándola junto a varias curvas de nivel $f=C$, que son parábolas del tipo $y=\pm\sqrt{C}-x^2$ (o mirando el gradiente en el punto)].



Son funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{f}: D\subset\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m \\ \quad \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\to \mathbf{f}(\mathbf{x})=\big(f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x})\big)\end{array}}$.

[O funciones vectoriales de varias variables de dominio D. Ya vimos las **funciones vectoriales**, con $n=1$. Uno conocido, con $n=m$, es ∇f . Otro, para $n=m=3$, será $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. Otros serán los **cambios de variable**].

$\big[$ **f** será continuo si lo son sus m componentes f_k $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})\|<\varepsilon\,\big]$.

En los cálculos de f escalares era importante el vector ∇f . Aquí lo será una matriz:

> **f** es diferenciable cuando lo son $f_1,\ldots,f_m$.
> La **matriz diferencial** o **jacobiana** de **f** es $\mathbf{Df}\equiv\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \partial f_m/\partial x_1 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n\end{pmatrix}$.
> [Sus filas son los gradientes de las m componentes].

[Si $m=1$, esta matriz $n\times 1$ es ∇f. Si $n=1$, el vector derivada $\mathbf{c}'(t)$ de una función vectorial (escrito como columna). Y si $n=m=1$, la **DF** pasa ser la más simple de las matrices: $f'(a)$].

Si $m=n$, típico de los **cambios de variable**, será importante (integrando por ejemplo) el determinante de la matriz diferencial $n\times n$, llamado **determinante jacobiano** del cambio:

$$\boxed{\text{Si } \begin{cases} y_1=f_1(x_1,\ldots,x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=f_n(x_1,\ldots,x_n)\end{cases},\ \text{el jacobiano de } \mathbf{f} \text{ es } \frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\equiv J\mathbf{f}\equiv\big|\mathbf{Df}\big|=\begin{vmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n\\ \vdots & & \vdots\\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n\end{vmatrix}}\,.$$

Ej 7. Sea $\mathbf{f}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, con $\mathbf{f}(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)=(x,y)$, que se suele escribir $\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\end{array}$.

El jacobiano (del cambio a polares) es: $J\mathbf{f}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=r$.

$$\begin{array}{l} \mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{R}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{R}^p \\ \mathbf{a} \to \mathbf{g}(\mathbf{a})=\mathbf{b} \to \mathbf{f}(\mathbf{b}) \end{array}$$
, $\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$ diferenciable en $\mathbf{b}=\mathbf{g}(\mathbf{a})$ $\Rightarrow$ $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(\mathbf{a})=\mathbf{Df}(\mathbf{b})\,\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$ [producto de matrices].

Ej 8. Sean $\mathbf{g}(x,y)=\big(x-y,y^2\big)$, $\mathbf{f}(u,v)=(u+v,uv,v)$. Hallemos $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})$ en $(2,1)$.

Con el Teorema: $\mathbf{Df}(u,v)=\begin{pmatrix}1&1\\v&u\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{Dg}(x,y)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2y\end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(2,1)=(1,1)$

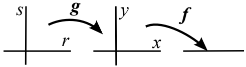
$$\Rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(2,1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&2\end{pmatrix}.$$

Comprobemos componiendo los campos y calculando luego la matriz diferencial:

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y)=\big(x-y+y^2,xy^2-y^3,y^2\big),\quad \mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(2,1)=\begin{pmatrix}1&2y-1\\y^2&2xy-3y^2\\0&2y\end{pmatrix}_{(2,1)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&2\end{pmatrix}.$$

Los casos particulares que más usaremos son:

$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $\underset{(r,s)\to(x,y)}{\mathbf{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2}$, $\underset{(r,s)\to f(x(r,s),y(r,s))}{h=f\circ\mathbf{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}}$



$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\ \ \frac{\partial h}{\partial s}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial s}\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\ ,\ \ \frac{\partial h}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}}.$$

[A menudo se escribe f en vez de h, pues es simplemente la f en unas nuevas variables].

Similares en $\mathbf{R}^3$ para $(r,s,t)\to f(\mathbf{g}(r,s,t))=f\big(x(r,s,t),y(r,s,t),z(r,s,t)\big)$.

Resulta ser: $\boxed{f_r=f_xx_r+f_yy_r+f_zz_r}$, $\boxed{f_s=f_xx_s+f_yy_s+f_zz_s}$, $\boxed{f_t=f_xx_t+f_yy_t+f_zz_t}$.

[Derivadas de f respecto a todas las variables intermedias multiplicadas por sus derivadas respecto a la variable de la izquierda].

pr30. Escribamos la EDP $(y-2)u_y - xu_x = x^2y$ en las nuevas variables $s=xy-2x$, $t=x$.

Cambiamos el nombre a las variables: $\begin{cases} u_x = u_s s_x + u_t t_x = (y-2)u_s + u_t \\ u_y = u_s s_y + u_t t_y = xu_s \end{cases}$. Llevadas a la EDP:

$-xu_t = x^2y$, $u_t = -xy = -s-2t$, pues en las nuevas variables: $xy = s+2x = s+2t$.

Ej 9. Si $\begin{cases} x = r+s^2 \\ y = rs \end{cases}$, las derivadas primeras de $f(r+s^2, rs)$ respecto a (r,s) son $\begin{cases} f_r = f_x + sf_y \\ f_s = 2sf_x + rf_y \end{cases}$.

Si $f \in C^2$ podemos hallar también las **derivadas segundas** con la regla de la cadena.

Como f_x y f_y son también funciones de r y s, se derivarán respecto a r y s de la misma forma que se derivaba la f (utilizando las expresiones de arriba):

$$f_{rr} = (f_r)_r = (f_x)_r + s(f_y)_r = [f_{xx} + sf_{xy}] + s[f_{yx} + sf_{yy}] = f_{xx} + 2sf_{xy} + s^2 f_{yy}$$

$$(\bullet)\quad f_{rs} = (f_r)_s = (f_x)_s + s(f_y)_s + f_y = [2sf_{xx} + rf_{xy}] + s[2sf_{yx} + rf_{yy}] + f_y = 2sf_{xx} + (r+2s^2)f_{xy} + rsf_{yy} + f_y$$

$$f_{ss} = (f_s)_s = 2s(f_x)_s + r(f_y)_s + 2f_x = 2s[2sf_{xx} + rf_{xy}] + r[2sf_{yx} + rf_{yy}] + 2f_x$$
$$= 4s^2 f_{xx} + 4rsf_{xy} + r^2 f_{yy} + 2f_x$$

[Para escribir, por ejemplo, $(f_x)_r$ se utilizó que, según la expresión para las derivadas primeras, había que derivarla respecto a x y sumarle s por su derivada respecto a y].

[$(\bullet)$ se podría también hacer así, pues las derivadas cruzadas de las funciones C^2 coinciden:

$$f_{rs} = (f_s)_r = 2s[f_{xx} + sf_{yx}] + r[f_{xy} + sf_{yy}] + f_y = 2sf_{xx} + (r+2s^2)f_{xy} + rsf_{yy} + f_y \Big].$$

Si $\mathbf{f}=(f,g):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ es campo vectorial C^1, la **divergencia** de $\mathbf{f}$ es el campo escalar $\operatorname{div}\mathbf{f}\equiv f_x+g_y$. En $\mathbf{R}^3$, si $\mathbf{f}=(f,g,h)$, $\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y+h_z$.

Llamando $\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ [notación sólo, eso no es ningún vector] la divergencia se escribe también $\nabla\cdot\mathbf{f}$.

Si $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ es C^2, el **laplaciano** de $\mathbf{f}$ es $\Delta f\equiv\nabla^2 f\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Es otro campo escalar. En particular, $\boxed{\Delta f=f_{xx}+f_{yy}}$ o $\boxed{\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}}$.

Para $n=3$ hay otro importante campo vectorial que se obtiene a partir de uno dado:

Si $\mathbf{f}=(f,g,h):\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ es C^1, el **rotacional** de $\mathbf{f}$ es el campo vectorial:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ f&g&h\end{vmatrix}=(h_y-g_z)\,\mathbf{i}+(f_z-h_x)\,\mathbf{j}+(g_x-f_y)\,\mathbf{k}\,.$$

Algunas propiedades y relaciones fácilmente comprobables son:

$$\boxed{\operatorname{rot}(\nabla f)=\mathbf{0}\,,\ \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=0\,,\ \operatorname{div}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{div}\mathbf{f}+\nabla g\cdot\mathbf{f}\,,\ \operatorname{rot}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{rot}\mathbf{f}+\nabla g\times\mathbf{f}\,.}$$

Por ejemplo, la primera: $\operatorname{rot}(f_x,f_y,f_z)=(f_{zy}-f_{yz})\,\mathbf{i}+(f_{xz}-f_{zx})\,\mathbf{j}+(f_{yx}-f_{xy})\,\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

[No sólo el rotacional de un gradiente es $\mathbf{0}$. En 5.3 veremos que si el rotacional de un campo vectorial C^1 se anula, este campo será el gradiente de un campo escalar que sabremos calcular].

Ej 10. Si $\mathbf{f}=\big(xyz,\mathrm{e}^{yz},y^2\big)$. div $\mathbf{f}=yz+z\,\mathrm{e}^{yz}$. rot $\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ xyz & \mathrm{e}^{yz} & y^2\end{vmatrix}=\big(2y-y\mathrm{e}^{yz},xy,-xz\big)$.

div (rot $\mathbf{f}$) $=0+x-x=0$ (debía serlo). $\Delta(\operatorname{div}\mathbf{f})=(z^3+y^2z+2y)\,\mathrm{e}^{yz}$.

$\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})=\big(0\,,z+z^2\mathrm{e}^{yz},\ y+\mathrm{e}^{yz}+yz\,\mathrm{e}^{yz}\big)$.

[No tiene sentido hablar del gradiente o laplaciano de $\mathbf{f}$, ni de divergencia o rotacional de campos escalares. Estos 4 ‘operadores’ (reglas que convierten funciones en otras) son ‘lineales’ (porque lo es la derivada): $\nabla(af+bg)=a\nabla f+b\nabla g$, $a,b\in\mathbf{R}$, e igual los otros tres].

Ej 11. Sean $\mathbf{f}(x,y,z)=(y\,,xy\,,2z)$ y $\mathbf{c}(t)=\big(1\,,2\cos t\,,\operatorname{sen} t\big)$, $t\in[-\pi,\pi]$.

a) Calcular div $\mathbf{f}$, rot $\mathbf{f}$, div$\big($rot $\mathbf{f}\big)$, $\nabla\big(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}\big)$, $\Delta\big(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}\big)$, la matriz $\mathbf{D}\mathbf{f}$ y el jacobiano $J=\big|\mathbf{Df}\big|$.

b) Si $\mathbf{r}(t)=\big(\mathbf{f}\circ\mathbf{c}\big)(t)$, hallar $\mathbf{r}'(\pi/6)$ componiendo y derivando y con la regla de la cadena.

a) div $\mathbf{f}=\boxed{x+2}$. rot $\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y & xy & 2z\end{vmatrix}=0\,\mathbf{i}+0\,\mathbf{j}+(y-1)\,\mathbf{k}=\big(0\,,0\,,y-1\big)$. div$\big($rot $\mathbf{f}\big)=0$ (siempre).

$\nabla\big(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}\big)=\nabla\big(y^2+x^2y^2+4z^2\big)=\big(2xy^2,2x^2y+2y,8z\big)$. $\Delta\big(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}\big)=2x^2+2y^2+10$. $\mathbf{Df}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ y&x&0\\ 0&0&2\end{pmatrix}$. $J=-2y$.

b) $\mathbf{r}(t)=\big(\mathbf{f}\circ\mathbf{c}\big)(t)=\big(2\cos t,2\cos t,2\operatorname{sen} t\big)\ \Rightarrow\ \mathbf{r}'\big(\tfrac{\pi}{6}\big)=\big(-2s,-2s,2c\big)_{t=\pi/6}=\big(-1,-1,\sqrt{3}\big)$.

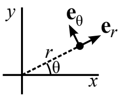
Con la regla : $\mathbf{c}\big(\tfrac{\pi}{6}\big)=\big(1,\sqrt{3}\,,\tfrac{1}{2}\big)$, $\mathbf{c}'(t)=\big(0,-2s,c\big)$, $\mathbf{c}'\big(\tfrac{\pi}{6}\big)=\big(0,-1,\sqrt{3}/2\big)$.

$$\mathbf{r}'\big(\tfrac{\pi}{6}\big)=\mathbf{Df}\big(\mathbf{c}\big(\tfrac{\pi}{6}\big)\big)\,\mathbf{c}'\big(\tfrac{\pi}{6}\big)=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \sqrt{3}&1&0\\ 0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Gradiente y laplaciano en polares

Para analizar la continuidad ya se usaron las coordenadas polares: $\boxed{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}}$ $\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2}\,, \\ \tan\theta=\frac{y}{x}\,. \end{array}$

Por la regla de la cadena: $\left\{\begin{array}{l} f_r=\cos\theta\, f_x+\mathrm{sen}\,\theta\, f_y \\ f_\theta=-r\,\mathrm{sen}\,\theta\, f_x+r\cos\theta\, f_y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_r\cos\theta-\frac{1}{r}f_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta=f_x \\ f_r\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{1}{r}f_\theta\cos\theta=f_y \end{array}\right.$



$\boxed{\nabla f=f_r\,\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}f_\theta\,\mathbf{e}_\theta\,,\ \text{definiendo } \mathbf{e}_r=(\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta)\,,\ \mathbf{e}_\theta=(-\mathrm{sen}\,\theta,\cos\theta)\,.}$

Y usándola de nuevo: $\left\{\begin{array}{l} f_{rr}=\cos^2\theta\, f_{xx}+2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, f_{xy}+\mathrm{sen}^2\theta\, f_{yy} \\ f_{\theta\theta}=r^2\mathrm{sen}^2\theta\, f_{xx}-2r^2\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, f_{xy}+r^2\cos^2\theta\, f_{yy}-r\cos\theta\, f_x-r\,\mathrm{sen}\,\theta\, f_y \end{array}\right.$

Escribiendo la suma $f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}$ (y usando $c^2+s^2=1$) se obtiene $f_{xx}+f_{yy}$. $\boxed{\Delta f=f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}}$.

Ej 12. Si $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$ (continua vista en 1.3), hallemos en polares ∇f y Δf en $(1,1)$.

La función y el punto son ahora: $f(r,\theta)=r\cos^3\theta$, $(r,\theta)=\left(\sqrt{2}\,,\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\nabla f=\cos^3\theta\,\mathbf{e}_r-3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_\theta\Big|_{(\sqrt{2},\pi/4)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(1,-\frac{1}{2}\right).$$

$$\Delta f=0+\frac{\cos^3\theta}{r}+\frac{6\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta-3\cos^3\theta}{r}=\frac{2}{r}\cos\theta(3-4\cos^2\theta)=1\ \text{ en }\ (r,\theta)=\left(\sqrt{2}\,,\frac{\pi}{4}\right).$$

Mucho más largo en cartesianas:

$$\nabla f=\left(\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right),\ f_{xx}+f_{yy}=\frac{4x^3+6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^3y^2-4x(x^4+3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\,.$$