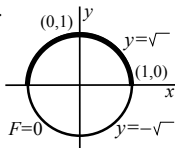


### 3.1 Funciones implícitas e inversas

En Matemáticas se habrá derivado implícitamente, pero ¿cuándo una expresión  $F(x, y) = 0$ , con  $F \in C^1$ , define realmente una función derivable  $y = g(x)$  cerca de un punto  $(a, c)$  de la curva? Entonces sería  $F(x, g(x)) = 0$ , y la regla de la cadena daría:  $F_x(x, g(x)) + F_y(x, g(x))g'(x) = 0 \Rightarrow g'(a) = -\frac{F_x}{F_y} \Big|_{(a,c)}$ .

¿Cuándo no definirá una función? Parece haber problemas cuando sea  $F_y(a, c) = 0$ .

Por ejemplo, para la circunferencia  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ,  $F_x = 2x$ ,  $F_y = 2y$ , si  $y = 0$  hay 2 funciones  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ , no derivables además en los puntos  $(\pm 1, 0)$ .



Cerca de los demás puntos, por ejemplo  $(0, 1)$ , sí define una sola  $g(x)$  derivable [aunque en ese mismo punto, con  $F_x = 0$ , no define una única función  $x = h(y)$ ].

Algo análogo sucede en  $\mathbf{R}^3$ . La superficie esférica  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  define una  $z = g(x, y)$  de  $C^1$  cuando  $F_z = 2z \neq 0$ . Por ejemplo, cerca de  $(0, 0, -1)$ , tal función es  $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ .

Cuando una  $F = 0$  defina  $z = z(x, y)$ , dar sus derivadas es de nuevo fácil derivando implícitamente:

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \Rightarrow F_x + F_z z_x = 0, F_y + F_z z_y = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{F_x}{F_z}, z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

El siguiente **teorema particular de la función implícita** (demostrado en M-T) generaliza estas ideas:

Sean  $F: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$  de  $C^1$ ,  $F(\mathbf{a}, c) = 0$  y  $F_z(\mathbf{a}, c) \neq 0$ . Entonces existe una única  $z = g(\mathbf{x})$   $(\mathbf{x}, z) \rightarrow F(\mathbf{x}, z)$  cumpliendo  $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$  para  $\mathbf{x}$  cerca de  $\mathbf{a}$ ,  $z$  cerca de  $c$ , y son  $\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\partial F / \partial x_j}{\partial F / \partial z}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

## Ejemplos sobre el teorema

Cambiando los papeles, el teorema también garantiza que  $F(x, y) = 0$  define una función  $x(y)$  si  $F_x \neq 0$ , o precisa cuándo  $F(x, y, z) = 0$  define seguro unan  $y = y(x, z)$  o  $x = x(y, z)$ . Que la derivada respecto a lo que se quiere despejar sea nula no implica que no defina una función (pero probablemente deja de ser  $C^1$ ):

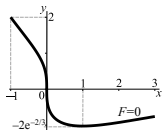
**Ej 1.** Para  $F(x, y) = 8x + y^3 e^{x+1} = 0$  es  $F_x = 8 + y^3 e^{x+1}$ ,  $F_y = 3y^2 e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ .

Entonces  $F = 8x = 0$ . El teorema afirma que hay una  $y(x)$  de  $C^1$  salvo en  $(0, 0)$ .

Pero podemos despejar:  $y = -2x^{1/3} e^{-(x+1)/3}$ , función única por  $(0, 0)$  [no  $C^1$ ].

En el mínimo de esta función  $(1, -2e^{-2/3})$ ,  $F = 0$  sí define dos funciones  $x(y)$ .

[A este punto malo podemos llegar sin despejar:  $8 = -y^3 e^{x+1} \rightarrow F = 8x - 8 = 0 \rightarrow 8 + e^2 y^3 = 0$ ].



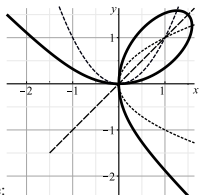
El teorema dice que hay función definida implícitamente, pero no dice cuál. De hecho es más interesante si se puede dar. Lo más complicado entonces suele ser hallar puntos que pertenezcan a la curva o superficie.

**Ej 2.** Sea  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .  $F_x = 3(x^2 - y)$ ,  $F_y = 3(y^2 - x)$ .

Si  $x \neq y^2$ ,  $F = 0$  define  $y = y(x)$  y si  $y \neq x^2$ , una  $x = x(y)$ . Como  $F_x = F_y = 0$  en  $(1, 1)$ , que no es de la curva, y en  $(0, 0)$ , salvo aquí la curva es función  $C^1$  de una de las variables (en casi todos los puntos, de las 2). Hay problemas si:

$x = y^2 \rightarrow F = y^3(y^3 - 2) = 0 \rightarrow y = 2^{1/3} \rightarrow (2^{2/3}, 2^{1/3}) \approx (1.59, 1.26)$ ,  
punto en que hay dos funciones  $y(x)$  [y en el punto simétrico para  $x(y)$ ].

Dibujo de la curva con el 'implicitplot' de Maple:



En el resto de puntos, aunque la  $y(x) \in C^1$  no sea calculable, podemos saber muchas cosas de ella.

Por ejemplo:  $y = x \rightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow (0, 0)$  y  $(3/2, 3/2)$ . Hallemos en el segundo la recta tangente:

$$3(x^2 - y) + 3(y^2 - x)y' = 0 \rightarrow y' \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{x^2 - y}{x - y^2} \Big|_{(3/2, 3/2)} = -1 \rightarrow y = \frac{3}{2} - (x - \frac{3}{2}) = 3 - x.$$

**Ej 3.** Sea la superficie  $S$  definida por  $F(x, y, z) \equiv y^2 + x^3 + xz^2 - 2z^3 = 1$ . Sus parciales se anulan cuando:

$$\nabla F = (3x^2 + z^2, 2y, 2z(x - 3z)) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Como el punto  $(0, 0, 0)$  no pertenece a  $S$ , cerca de todo punto suyo (con una parcial no nula) se puede ‘despejar’ alguna de las variables, definiendo una función  $C^1$  (y tendrá plano tangente).

En concreto, seguro que existe  $z(x, y)$  si  $z \neq 0$  y  $x \neq 3z$ . Habrá problemas con  $x(y, z)$  si  $x = z = 0$  (e  $y = \pm 1$  por tanto). Y los tiene  $y(x, z)$  si  $y = 0$  (se puede despejar  $y = \pm \sqrt{\dots}$  y esto los confirma).

**Hallemos el plano tangente en  $(1, 1, 1)$** , que pertenece claramente a la superficie:  $1 + 1 + 1 - 2 = 1$ .

Lo más corto es usar el  $\nabla F = (4, 2, -4)$  que nos da  $(2, 1, -2) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0$ ,  $z = x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ .

Ahora nos basamos en las fórmulas que se deducen de la derivación implícita:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{3x^2 + z^2}{2z(3z - x)} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y}{2z(3z - x)}, \quad \text{que en el punto } (1, 1, 1) \text{ pasan a valer } 1 \text{ y } \frac{1}{2}.$$

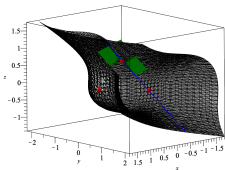
Así que, con la otra fórmula de 2.1 (para campos despejados):  $z = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$ , como antes.

Más formas no sencillas. Despejemos ahora  $y$  en vez de  $z$  y sigamos con fórmulas de implícitas:

$$y_x = -\frac{3x^2 + z^2}{2y}, \quad y_z = \frac{2z(3z - x)}{2y} \xrightarrow{(1,1,1)} -2, 2. \quad y = 1 - 2(x-2) + 2(z-1).$$

Incluso se puede ahora dar y derivar su expresión  $y = \sqrt{1 - x^3 - xz^2 + 2z^3}$ .

[Ilustramos los argumentos con otro dibujo de Maple utilizando el ‘implicitplot3d’. Se obtiene esa especie de ‘sillón’, los tres puntos analizados aparecen en rojo y el plano tangente de arriba en verde].



[El teorema general de la función implícita está en los apuntes].

# Teorema de la función inversa

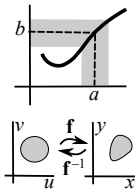
Una  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivable con  $f'(a) \neq 0$  tenía inversa  $f^{-1}$  en un entorno de  $b=f(a)$ .

Estudiamos cuándo la tiene  $\mathbf{f}: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$   
 $(u_1, \dots, u_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u_1, \dots, u_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \mathbf{Jf} = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial u_1 & \dots & \partial f_1 / \partial u_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial u_1 & \dots & \partial f_n / \partial u_n \end{vmatrix} \text{ jacobiano de } \mathbf{f}.$$

Sea  $\mathbf{f}: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  de  $C^1$ ,  $\mathbf{a} \in \text{int}D$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$  y  $\mathbf{Jf}(\mathbf{a}) \neq 0$ .  
 $(u_1, \dots, u_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$

Entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  es resoluble en forma única como  $\mathbf{u} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$ ,  
 con  $\mathbf{f}^{-1}$  también  $C^1$ , para  $\mathbf{u}$  cerca de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}$  cerca de  $\mathbf{b}$ .



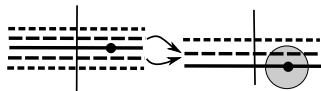
[Que exista no significa que se pueda dar  $f^{-1}$ ].

**Ej 6.**  $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$ . Podemos despejar  $u$  e  $v$  en función de  $x$  e  $y$ , es decir, existe la función inversa  $\mathbf{f}^{-1}$  cuando:  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ .

[En este caso la inversa es global en todo  $\mathbf{R}^2$  y no sólo en el entorno que asegura el teorema].

**Ej 8.**  $\begin{cases} x = u \\ y = v^2 \end{cases}$ .  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 2v \Rightarrow$  existe  $\mathbf{f}^{-1}$  en un entorno de la imagen de cada  $(u_0, v_0)$ ,  $v_0 \neq 0$ .

¿Por qué fallan las cosas en  $v = 0$ ?  $\mathbf{f}$  lleva cada pareja de rectas  $v = \pm k$  a la misma recta  $y = k^2$ . En ningún entorno de  $\mathbf{f}(u_0, 0) = (u_0, 0)$  es inyectiva y no existe la  $\mathbf{f}^{-1}$ .



En los otros puntos,  $\mathbf{f}^{-1}$  viene dada por  $x = u$  e  $y = \sqrt{v}$  ó  $y = -\sqrt{v}$ , dependiendo del semiplano.

## 3.2 Extremos de funciones escalares

En  $\mathbf{R}$ , los  $a$  interiores con  $f'(a)=0$  (y los puntos sin derivada) eran candidatos a extremo local (aunque podían no serlo). Si además  $f''(a) > 0$  era mínimo y máximo si era menor que 0. También muchas veces los extremos de una  $f$  sobre intervalos cerrados se daban en sus extremos. Generalicemos estas ideas a campos escalares en  $\mathbf{R}^n$ . Las definiciones de extremos absolutos y relativos son iguales:

El valor **máximo** (o máximo absoluto) de  $f$  sobre un conjunto  $A$  se toma en un punto  $\mathbf{a}$  si es  $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in A$ . Tiene un **máximo local** (o relativo) en  $\mathbf{a}$  si existe un entorno  $B_r(\mathbf{a})$  tal que  $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap A$ . Análogamente se define **mínimo** (absoluto o local). Máximos y mínimos se llaman **extremos** de  $f$ .

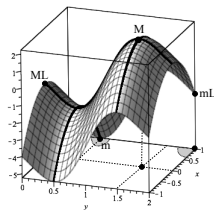
Veamos la gráfica de la derecha de una  $f$  en el rectángulo  $A = [-1, 1] \times [0, 2]$ .

[En concreto es  $f(x, y) = (y-1)e^{4y-2y^2} - 3x^2$  que trataremos en un ejemplo].

El máximo absoluto parece estar en  $(0, \frac{3}{2})$  (ahí también habrá máximo local).

El mínimo se toma, según el dibujo, en dos puntos de  $\partial A$ :  $(\pm 1, \frac{1}{2})$ . Se ven además, por ejemplo, un máximo local en  $(0, 0)$  y un mínimo local en  $(-1, 2)$ .

Se observa que en  $(0, \frac{3}{2})$  las derivadas parciales se anulan. Y lo mismo sucede en  $(0, \frac{1}{2})$ , aunque en ese punto no hay ningún extremo (ni siquiera local).



**Teor 1.** Si  $f$  es diferenciable en  $\mathbf{a} \in \text{int}D$  y  $f$  tiene extremo local en  $\mathbf{a} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

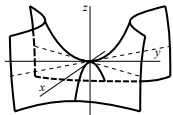
Pues  $f(a_1, \dots, x, \dots, a_n)$  tendrá un extremo en  $x=a_k$  interior  $\Rightarrow f_{x_k}(\mathbf{a}) = 0$ .

A los puntos en los que se anula  $\nabla f$  (todas las parciales) se les llama **puntos críticos** de  $f$ .

## Distinguiendo máximos de mínimos en $\mathbf{R}^2$

Aquí es más complicado que en  $\mathbf{R}$  ver lo que pasa en los puntos críticos (por ahora sólo se sabe que el plano tangente es horizontal). Comencemos viendo que **puede ser  $\nabla f = \mathbf{0}$  y no haber ningún extremo**:

**Ej 1.** Para  $h(x, y) = y^2 - x^2$  (silla de montar) es  $\nabla h(0, 0) = (-2x, 2y)|_{(0,0)} = (0, 0)$  pero no tiene extremo local en el origen [ $h(0, 0) = 0$  y cerca hay puntos  $h(x, 0) = -x^2$  de valor negativo y otros  $h(0, y) = y^2$  con valor positivo].



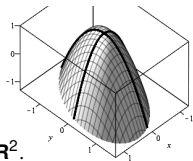
En el siguiente ejemplo, el punto crítico sí nos proporciona un máximo:

**Ej 2.** Sea  $f(x, y) = 1 - 2x^2 + xy - y^2$ . [Las curvas de nivel de  $f$  son elipses giradas (hay término  $xy$ ) y no son fáciles de pintar].

Los cortes con los ejes son:  $x=0 \rightarrow z=1-y^2$ ,  $y=0 \rightarrow z=1-2x^2$ .

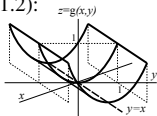
Su punto crítico lo da  $\begin{cases} f_x = -4x + y = 0 \\ f_y = x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow x=0, y=0$ . Para ver lo que es:

$f(x, y) = 1 - \frac{7}{4}x^2 - (\frac{x}{2} - y)^2 \Rightarrow f(0, 0) = 1$  valor máximo absoluto en todo  $\mathbf{R}^2$ .



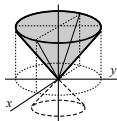
Pueden aparecer infinitos puntos críticos y pueden no ser extremos estrictos (campo de 1.2):

**Ej 3.**  $g(x, y) = (x - y)^2$ . A la vista de la gráfica (o de la propia función) es claro que posee infinitos mínimos (locales y absolutos): todos los de  $y = x$ . Los detecta  $\nabla g$ :  
 $g_x = 2(x - y) = 0$ ,  $g_y = 2(y - x) = 0$ , cuando  $y = x$ .



Y, por último, como en  $\mathbf{R}$ , pueden existir extremos locales en puntos sin derivadas parciales:

**Ej 4.**  $k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  (parte superior de la superficie cónica  $z^2 = x^2 + y^2$ ) en  $(0, 0)$  no tenía derivadas parciales. En los otros puntos sí, pero es  $\nabla k = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \neq \mathbf{0}$ .  
Y claramente  $k$  tiene un mínimo (local y absoluto) en el origen.



## El Hessiano (para $n=2$ ) ( $n=3$ en apuntes)

¿Cómo distinguir en  $\mathbf{R}^2$  si en un punto crítico  $\mathbf{a}=(a,b)$  de una  $f(x,y) \in \mathcal{C}^2$  hay un máximo, un mínimo o ninguno de los dos? (se dice en este caso que hay un **punto silla**). En los apuntes se deduce este **teorema**:

Sea  $Hf = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$  **hessiano** de  $f$ .  
Si en el punto  $\mathbf{a}$  es  $f_x = f_y = 0$  y además es  $Hf > 0, f_{xx} > 0 \Rightarrow f$  tiene mínimo local en  $\mathbf{a}$ .  
 $Hf > 0, f_{xx} < 0 \Rightarrow f$  tiene máximo local en  $\mathbf{a}$ .  
 $Hf < 0 \Rightarrow f$  tiene un punto silla en  $\mathbf{a}$ .

[Cuando  $Hf=0$ , el teorema no dice nada y puede pasar de todo en un entorno del punto].

**Ej 5.** Aplicamos el teorema a los ejemplos 1, 2 y 3:  $Hh(\mathbf{0}) = -4 \Rightarrow$  punto silla, como vimos.

$Hf(\mathbf{0}) = 7, f_{xx} < 0 \Rightarrow$  máximo.  $Hg(x,x) = 0$ , y el teorema no dice nada de los mínimos.

[En un  $\mathbf{a}$  con  $Hf=0$  puede haber extremos estrictos. Como  $f(x,y) = x^4 + y^4$  con claro mínimo].

**Ej 6.** Sea  $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x - 4y + 6$ .  $\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3 = 0, & x = \pm 1 \\ f_y = 2y - 4 = 0, & y = 2 \end{cases}$ .  $f_{xx} = 6x, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2 \Rightarrow Hf = 12x$ .

En  $(1,2)$ ,  $Hf, f_{xx} > 0$ , mínimo [ $f(1,2) = 0$ ].  $Hf(-1,2) < 0$ , silla [ $f(-1,2) = 4$ ].

A lo mismo se llegaría desarrollando por Taylor en torno a ambos puntos:

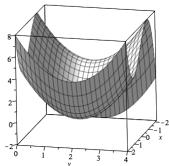
$$f(x,y) = 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + \dots, \quad f(x,y) = 4 - 3(x+1)^2 + (y-2)^2 + \dots$$

[El mínimo local 0 no es absoluto, pues  $f$  toma valores negativos:

por ejemplo,  $f(x,0) = x^3 - 3x + 6$ , y en particular  $f(-3,0) = -12$ ].

**Ej 7.**  $f(x,y) = y^3 - (x-y)^2$ .  $\begin{cases} f_x = 2(y-x) = 0, & y = x \\ f_y = 3y^2 + 2(x-y) = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0)$ .  $Hf(\mathbf{0}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ , no nos informa.

Pero  $f(x,x) = x^3$  y es punto silla [cerca del origen toma valores mayores y menores que  $f(\mathbf{0}) = 0$ ].

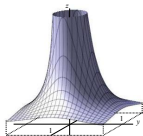


# Extremos absolutos en un conjunto $A$

Teorema famoso:  $f$  continua en  $A$  **compacto**  $\Rightarrow f$  alcanza su máximo y su mínimo en  $A$ .

**Ej 11.**  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ ,  $f(0, 0) = 7$  (discontinua), no tiene máximo en  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

No tiene ni máximo ni mínimo en todo  $\mathbf{R}^2$ . En  $[1, 2] \times [0, 1]$  (en ese compacto sí es continua) los alcanza seguro [claramente el máximo 1 se da en  $(1, 0)$ , punto más próximo al origen, y el mínimo  $\frac{1}{5}$  en  $(2, 1)$ , punto más lejano].



La estrategia para hallar extremos sobre compactos  $A$  es similar a la que se utilizaba en  $\mathbf{R}$ :

- Encontrar en  $\text{int} A$  los puntos críticos y los puntos en que no existan las parciales.
- Localizar los extremos de la función sobre  $\partial A$  (quizás con ‘multiplicadores de Lagrange’).
- Comparar los valores en todos estos puntos.

**Ej 12.** Encontramos los extremos de  $f(x, y) = (y-1)e^{4y-2y^2} - 3x^2$  en  $[-1, 1] \times [0, 2]$  (primer dibujo de esta sección)

$$f_x = -6x = 0 \rightarrow x = 0.$$

$$f_y = (-4y^2 + 8y - 3)e^{4y-2y^2} = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \quad \text{En esos puntos: } f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{3/2}, f(0, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}e^{3/2}.$$

Además  $f(x, 0) = -1 - 3x^2$  tiene por valor máximo  $f(0, 0) = -1$  y el mínimo es  $f(\pm 1, 0) = -4$ .

$f(x, 2) = 1 - 3x^2$  tiene por valor máximo  $f(0, 2) = 1$  y el mínimo es  $f(\pm 1, 2) = -2$ .

$f(\pm 1, y) = (y-1)e^{4y-2y^2} - 3$  toman valores entre  $-\frac{1}{2}e^{3/2} - 3$  y  $\frac{1}{2}e^{3/2} - 3$ .

Comparando todos estos valores se deduce que el valor máximo es  $\frac{1}{2}e^{3/2}$  y el mínimo  $-\frac{1}{2}e^{3/2} - 3$ .

[En todo  $\mathbf{R}^2$  no alcanza su mínimo, pues, por ejemplo,  $f(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -\infty$ , pero sí es máximo global  $\frac{1}{2}e^{3/2}$ ].



## Otro ejemplo y los multiplicadores de Lagrange

**Ej 1b.** Hallemos los extremos de  $h(x, y) = y^2 - x^2$  en el  $A$  dado por  $x^2 + 4y^2 \leq 4$ .

$h$  no tenía extremos en el interior y máximo y mínimo estarán en  $\partial A$ .

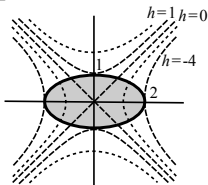
Nuestra elipse se puede describir como:  $(2 \cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Sobre ella, la  $h$  vale  $h|_{\partial A} = 4 \sin^2 t - \cos^2 t \equiv g(t)$ ,  $g'(t) = 5 \sin 2t$ .

Los máximos de  $g$  se dan si  $t=0, \pi$  y los mínimos para  $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .

O sea,  $h(0, \pm 1) = 1$  y  $h(\pm 2, 0) = -4$  son los extremos de la  $h$  en  $A$ .

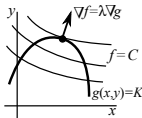
[Viendo las curvas de nivel de  $h$  y la elipse, la conclusión era clara].



Una técnica alternativa para buscar **extremos condicionados** (de  $f$  sometidas a condiciones  $g=K$ ) es mediante el cálculo de los llamados **'multiplicadores de Lagrange'**:

**Teor.** Sean  $f, g : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  de  $C^1$ ,  $S$  el 'conjunto de nivel'  $g(\mathbf{x}) = K$ ,  $\mathbf{a} \in S$  e interior a  $D$  y  $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ . Si  $f|_S$  (' $f$  restringida a  $S$ ') tiene un máximo o un mínimo en  $\mathbf{a}$  entonces existe un número real  $\lambda$  tal que  $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$ .

El teorema da  $n+1$  condiciones para hallar  $\lambda$  y las  $n$  coordenadas de  $\mathbf{a}$ : las  $n$  de los gradientes y además  $g(\mathbf{a}) = K$ . No se prueba, pero lo justificamos en  $\mathbf{R}^2$ : el mayor  $C$  para el que es  $g=K$ , será aquel en que las curvas de nivel  $f=C$  y la curva sean tangentes, o sea, para el que los gradientes sean múltiplos uno de otro.



**Ej 1c.** Hallemos los extremos de  $h|_S$ ,  $h(x, y) = y^2 - x^2$  y  $S$  la elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$ .

$$\nabla h = \lambda \nabla g \Leftrightarrow (-2x, 2y) = \lambda(2x, 8y) \text{ y además } g=4 \rightarrow \begin{cases} 2x(\lambda+1)=0 \rightarrow x=0 & \text{ó } \lambda=-1 \downarrow \\ 2y(4\lambda-1)=0 & \downarrow \\ x^2+4y^2=4 & y=\pm 1 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

[En los puntos que da el sistema son tangentes  $S$  y las curvas de nivel].

## Dos ejemplos finales de multiplicadores de Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange permiten resolver problemas abordables por otros caminos. Algunas veces acortan los cálculos y otros los alargan (por ejemplo, si la restricción es de expresión sencilla):

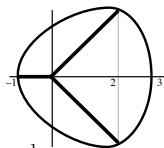
**Ej 14.** Hallar los puntos de la curva  $3y^2=21+20x-x^4$  situados a mayor y menor distancia del origen.

[Existen por estar  $x$  e  $y$  acotadas].  $f(x, y) = x^2 + y^2$  con  $g(x, y) = x^4 - 20x + 3y^2 = 21$ .

$$(2x, 2y) = \lambda(4x^3 - 20, 6y), \quad g = 21 \rightarrow \begin{cases} 4\lambda x^3 - 2x - 20\lambda = 0 & x = 2 \\ 2y(3\lambda - 1) = 0 \rightarrow y = 0 \downarrow \text{ ó } \lambda = \frac{1}{3} \uparrow \downarrow \\ 3y^2 = 21 + 20x - x^4 & x = -1, 3 \quad y = \pm\sqrt{15} \end{cases}$$

$$f(-1, 0) = 1 \text{ (mínimo)}, \quad f(3, 0) = 9, \quad f(2, \pm\sqrt{15}) = 19 \text{ (máximos)}.$$

[En estos ejemplos no era  $\nabla g(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  con  $\mathbf{a} \in S$ . Si lo fuera, viendo el teorema, se incluiría entre los candidatos].



Hay otra forma de obtener el mismo conjunto de ecuaciones  $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$  y  $g(\mathbf{x}) = K$ : pensando en la función  $L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x}) - K$ , con  $\lambda$  como una variable más, y haciendo  $\nabla L = \mathbf{0}$ , pues de esto salen las mismas ecuaciones. Operamos así en este ejemplo en  $\mathbf{R}^3$ :

**Ej 16.** Hallemos los máximos y mínimos de  $f(x, y, z) = x + y^2 + z$  sobre la superficie  $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ .

Los extremos existirán por ser  $f$  continua y ser la superficie (un elipsoide) un conjunto compacto.

Consideremos  $L = f - \lambda g = x + y^2 + z - \lambda(2x^2 + y^2 + 2z^2 - 1)$  y hagamos  $\nabla L = \mathbf{0}$ :

$$\begin{cases} L_x = 1 - 4\lambda x = 0, \quad x = \frac{1}{4\lambda} \\ L_y = 2y - 2\lambda y = 0, \quad y = 0 \text{ ó } \lambda = 1 \\ L_z = 1 - 4\lambda z = 0, \quad z = \frac{1}{4\lambda} \\ L_\lambda = 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow \frac{1}{8\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 1, \quad \lambda = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right). \\ \lambda = 1 \rightarrow x = z = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} + y^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right). \end{cases}$$
$$f\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = 1, \quad f\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = -1, \quad f\left(\frac{1}{4}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

Por tanto, el valor mínimo absoluto es  $-1$ , y el valor máximo es  $\frac{5}{4}$  (que se alcanza en dos puntos).