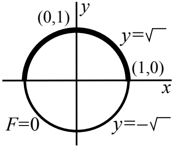
3.1 Funciones implícitas e inversas

En Matemáticas se habrá derivado implícitamente, pero ¿cuándo una expresión $F(x,y)=0$, con $F\in C^1$, define realmente una función derivable $y=g(x)$ cerca de un punto (a,c) de la curva? Entonces sería $F\big(x,g(x)\big)=0$, y la regla de la cadena daría: $F_x\big(x,g(x)\big)+F_y\big(x,g(x)\big)g'(x)=0 \Rightarrow g'(a)=-\frac{F_x}{F_y}\Big|_{(a,c)}$.

¿Cuándo no definirá una función? Parece haber problemas cuando sea $F_y(a,c)=0$. Por ejemplo, para la circunferencia $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$, $F_x=2x$, $F_y=2y$, si $y=0$ hay 2 funciones $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, no derivables además en los puntos $(\pm1,0)$. Cerca de los demás puntos, por ejemplo $(0,1)$, sí define una sola $g(x)$ derivable $\big[$aunque en ese mismo punto, con $F_x=0$, no define una única función $x=h(y)\big]$.



Algo análogo sucede en $\mathbf{R}^3$. La superficie esférica $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ define una $z=g(x,y)$ de C^1 cuando $F_z=2z\neq0$. Por ejemplo, cerca de $(0,0,-1)$, tal función es $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Cuando una $F=0$ defina $z=z(x,y)$, dar sus derivadas es de nuevo fácil derivando implícitamente:

$$F(x,y,z(x,y))=0 \Rightarrow F_x+F_z\,z_x=0\,,\ F_y+F_z\,z_y=0 \Rightarrow z_x=-\frac{F_x}{F_z}\,,\ z_y=-\frac{F_y}{F_z}\,.$$

El siguiente **teorema particular de la función implícita** (demostrado en M-T) generaliza estas ideas:

> Sean $\underset{(\mathbf{x},z)\to F(\mathbf{x},z)}{F:\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}}$ de C^1, $F(\mathbf{a},c)=0$ y $F_z(\mathbf{a},c)\neq0$. Entonces existe una única $z=g(\mathbf{x})$ cumpliendo $F\big(\mathbf{x},g(\mathbf{x})\big)=0$ para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{a}$, z cerca de c, y son $\frac{\partial g}{\partial x_j}=\frac{\partial F/\partial x_j}{\partial F/\partial z}$, $j=1,\dots,n$.

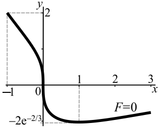
Cambiando los papeles, el teorema también garantiza que $F(x,y)=0$ define una función $x(y)$ si $F_x\neq 0$, o precisa cuándo $F(x,y,z)=0$ define seguro unan $y=y(x,z)$ o $x=x(y,z)$. Que la derivada respecto a lo que se qiuere despejar sea nula no implica que no defina una función (pero probablemente deja de ser C^1):

Ej 1. Para $F(x,y)=8x+y^3\,e^{x+1}=0$ es $F_x=8+y^3\,e^{x+1}$, $F_y=3y^2\,e^{x+1}=0\Leftrightarrow y=0$.

Entonces $F=8x=0$. El teorema afirma que hay una $y(x)$ de C^1 salvo en $(0,0)$.

Pero podemos despejar: $y=-2x^{1/3}e^{-(x+1)/3}$, función única por $(0,0)$ $\left[\text{no } C^1\right]$.

En el mínimo de esta función $\left(1,-2e^{-2/3}\right)$, $F=0$ sí define dos funciones $x(y)$.



$\left[\text{A este punto malo podemos llegar sin despejar: } 8=-y^3\,e^{x+1}\ \to\ F=8x-8=0\ \to\ 8+e^2y^3=0\right]$.

El teorema dice que hay función definida implícitamente, pero no dice cuál. De hecho es más interesante si se puede dar. Lo más complicado entonces suele ser hallar puntos que pertenezcan a la curva o superficie.

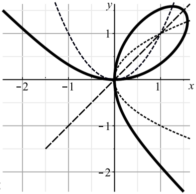
Ej 2. Sea $F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$. $F_x=3(x^2-y)$, $F_y=3(y^2-x)$.

Si $x\neq y^2$, $F=0$ define $y=y(x)$ y si $y\neq x^2$, una $x=x(y)$. Como $F_x=F_y=0$ en $(1,1)$, que no es de la curva, y en $(0,0)$, salvo aquí la curva es función C^1 de una de las variables (en casi todos los puntos, de las 2). Hay problemas si:

$$x=y^2\ \to\ F=y^3(y^3-2)=0\ \to\ y=2^{1/3}\ \to\ \left(2^{2/3},2^{1/3}\right)\approx(1.59,1.26),$$

punto en que hay dos funciones $y(x)$ [y en el punto simétrico para $x(y)$].

Dibujo de la curva con el 'implicitplot' de Maple:



En el resto de puntos, aunque la $y(x)\in C^1$ no sea calculable, podemos saber muchas cosas de ella. Por ejemplo: $y=x\to 2x^3-3x^2=0\to(0,0)$ y $(3/2,3/2)$. Hallemos en el segundo la recta tangente:

$$3(x^2-y)+3(y^2-x)y'=0\ \to\ y'\left(\tfrac{3}{2}\right)=\left.\frac{x^2-y}{x-y^2}\right|_{(3/2,3/2)}=-1\ \to\ y=\tfrac{3}{2}-\left(x-\tfrac{3}{2}\right)=3-x\,.$$

Un ejemplo en $\mathbf{R}^3$

Ej 4. Sea la superficie S definida por $F(x,y,z) \equiv y^2+x^3+xz^2-2z^3=1$. Sus parciales se anulan cuando:

$$\nabla F = \big(3x^2+z^2, 2y\,, 2z(x-3z)\big) = (0,0,0) \;\Leftrightarrow\; x=y=x=0\,.$$

Como el punto $(0,0,0)$ no pertenece a S, cerca de todo punto suyo (con una parcial no nula) se puede 'despejar' alguna de las variables, definiendo una función C^1 (y tendrá plano tangente).

En concreto, seguro que existe $z(x,y)$ si $z\neq 0$ y $x\neq 3z$. Habrá problemas con $x(y,z)$ si $x=z=0$ (e $y=\pm 1$ por tanto). Y los tiene $y(x,z)$ si $y=0$ $\big($se puede despejar $y=\pm\sqrt{}$ y esto los confirma$\big)$.

Hallemos el plano tangente en $(1,1,1)$, que pertenece claramente a la superficie: $1+1+1-2=1$.

Lo más corto es usar el $\nabla F = (4,2,-4)$ que nos da $(2,1,-2)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$, $z = x+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}$.

Ahora nos basamos en las fórmulas que se deducen de la derivación implícita:

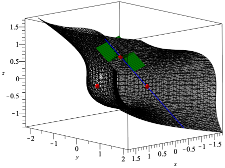
$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{3x^2+z^2}{2z(3z-x)} \text{ y } z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y}{2z(3z-x)}$$, que en el punto $(1,1,1)$ pasan a valer 1 y $\frac{1}{2}$.

Así que, con la otra fórmula de 2.1 (para campos despejados): $z=1+(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)$, como antes.

Más formas no sencillas. Despejemos ahora y en vez de z y sigamos con fórmulas de implícitas:

$$y_x = -\frac{3x^2+z^2}{2y}\,,\; y_z = \frac{2z(3z-x)}{2y} \overset{(1,1,1)}{\longrightarrow} -2\,,2\,.\;\; y=1-2(x-2)+2(z-1)\,.$$

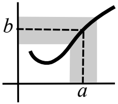
Incluso se puede ahora dar y derivar su expresión $y=\sqrt{1-x^3-xz^2+2z^3}$.



[Ilustramos los argumentos con otro dibujo de Maple utilizando el 'implicitplot3d'. Se obiene esa especie de 'sillón', los tres puntos analizados aparecen en rojo y el plano tangente de arriba en verde].

[El **teorema general de la función implícita** está en los apuntes].

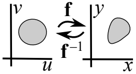
Una $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ derivable con $f'(a)\neq 0$ tenía inversa f^{-1} en un entorno de $b=f(a)$.



Estudiemos cuándo la tiene $\underset{(u_1,\dots,u_n)\to(x_1,\dots,x_n)}{\mathbf{f}: D\subset\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n}$.

$$\begin{cases} x_1=f_1(u_1,\dots,u_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=f_n(u_1,\dots,u_n)\end{cases}, \quad \mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{u}).\quad \frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)}=J\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\partial f_1/\partial u_1 & \cdots & \partial f_1/\partial u_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial u_1 & \cdots & \partial f_n/\partial u_n\end{vmatrix}$$

jacobiano de $\mathbf{f}$.



> Sea $\underset{(u_1,\dots,u_n)\to(x_1,\dots,x_n)}{\mathbf{f}: D\subset\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n}$ de C^1, $\mathbf{a}\in intD$, $\mathbf{f}(\mathbf{a})=\mathbf{b}$ y $J\mathbf{f}(\mathbf{a})\neq 0$.
> Entonces $\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{u})$ es resoluble en forma única como $\mathbf{u}=\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{f}^{-1}$ también C^1, para $\mathbf{u}$ cerca de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{b}$.

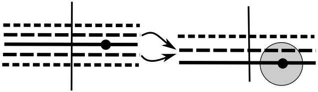
[Que exista no significa que se pueda dar f^{-1}].

Ej 7. $\begin{cases} x=au+bv \\ y=cu+dv\end{cases}$. Podemos despejar u e v en función de x e y, es decir, existe la función inversa $\mathbf{f}^{-1}$ cuando: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$.

[En este caso la inversa el global en todo $\mathbf{R}^2$ y no sólo en el entorno que asegura el teorema].

Ej 9. $\begin{cases} x=u \\ y=v^2\end{cases}$. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v\end{vmatrix}=2v \Rightarrow$ existe $\mathbf{f}^{-1}$ en un entorno de la imagen de cada (u_o,v_o), $v_o\neq 0$.

¿Por qué fallan las cosas en $v=0$? $\mathbf{f}$ lleva cada pareja de rectas $v=\pm k$ a la misma recta $y=k^2$. En ningún entorno de $\mathbf{f}(u_o,0)=(u_o,0)$ es inyectiva y no existe la $\mathbf{f}^{-1}$.

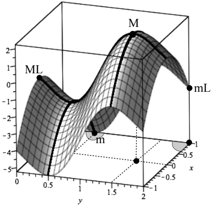


En los otros puntos, $\mathbf{f}^{-1}$ viene dada por $x=u$ e $y=\sqrt{v}$ ó $y=-\sqrt{v}$, dependiendo del semiplano.

En $\mathbf{R}$, los a interiores con $f'(a)=0$ (y los puntos sin derivada) eran candidatos a extremo local (aunque podían no serlo). Si además $f''(a)>0$ era mínimo y máximo si era menor que 0. También muchas veces los extremos de una f sobre intervalos cerrados se daban en sus extremos. Generalicemos estas ideas a campos escalares en $\mathbf{R}^n$. Las definiciones de extremos absolutos y relativos son iguales:

El valor **máximo** (o máximo absoluto) de f sobre un conjunto A se toma en un punto $\mathbf{a}$ si es $f(\mathbf{a})\geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}\in A$. Tiene un **máximo local** (o relativo) en $\mathbf{a}$ si existe un entorno $B_r(\mathbf{a})$ tal que $f(\mathbf{a})\geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}\in B_r(\mathbf{a})\cap A$. Análogamente se define **mínimo** (absoluto o local). Máximos y mínimos se llaman **extremos** de f.

Veamos la gráfica de la derecha de una f en el rectángulo $A=[-1,1]\times[0,2]$. $\left[\text{En concreto es } f(x,y)=(y-1)e^{4y-2y^2}-3x^2 \text{ que trataremos en un ejemplo}\right]$. El máximo absoluto parece estar en $\left(0\,,\,\frac{3}{2}\right)$ (ahí también habrá máximo local). El mínimo se toma, según el dibujo, en dos puntos de ∂A: $\left(\pm 1,\,\frac{1}{2}\right)$. Se ven además, por ejemplo, un máximo local en $(0,0)$ y un mínimo local en $(-1,2)$. Se observa que en $\left(0\,,\,\frac{3}{2}\right)$ las derivadas parciales se anulan. Y lo mismo sucede en $\left(0\,,\,\frac{1}{2}\right)$, aunque en ese punto no hay ningún extremo (ni siquiera local).



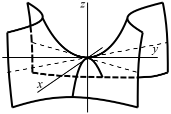
Teor 1. $\boxed{\text{Si } f \text{ es diferenciable en } \mathbf{a}\in \text{int}D \text{ y } f \text{ tiene extremo local en } \mathbf{a} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})=\mathbf{0}.}$

Pues $f(a_1,\dots,x,\dots,a_n)$ tendrá un entremo en $x=a_k$ interior $\Rightarrow f_{x_k}(\mathbf{a})=0$.

A los puntos en los que se anula ∇f (todas las parciales) se les llama **puntos críticos** de f.

Aquí es más complicado que en $\mathbf{R}$ ver lo que pasa en los puntos críticos (por ahora sólo se sabe que el plano tangente es horizontal). Comencemos viendo que **puede ser $\nabla f=\mathbf{0}$ y no haber ningún extremo**:

Ej 1. Para $h(x,y)=y^2-x^2$ (silla de montar) es $\nabla h(0,0)=(-2x,2y)\big|_{(0,0)}=(0,0)$ pero no tiene extremo local en el origen $\big[\,h(0,0)=0$ y cerca hay puntos $h(x,0)=-x^2$ de valor negativo y otros $h(0,y)=y^2$ con valor positivo$\big]$.



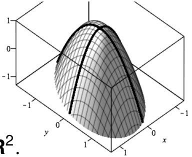
En el siguiente ejemplo, el punto crítico sí nos proporciona un máximo:

Ej 2. Sea $f(x,y)=1-2x^2+xy-y^2$. [Las curvas de nivel de f son elipses giradas (hay término xy) y no son fáciles de pintar].

Los cortes con los ejes son: $x=0 \;\rightarrow\; z=1-y^2$, $y=0 \;\rightarrow\; z=1-2x^2$.

Su punto crítico lo da $\begin{cases} f_x=-4x+y=0 \\ f_y=x-2y=0 \end{cases} \rightarrow\; x=0,\, y=0$. Para ver lo que es:

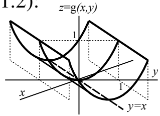
$$f(x,y)=1-\tfrac{7}{4}x^2-\left(\tfrac{x}{2}-y\right)^2 \;\Rightarrow\; f(0,0)=1 \text{ valor máximo absoluto en todo } \mathbf{R}^2.$$



Pueden aparecer infinitos puntos críticos y pueden no ser extremos estrictos (campo de 1.2):

Ej 3. $g(x,y)=(x-y)^2$. A la vista de la gráfica (o de la propia función) es claro que posee infinitos mínimos (locales y absolutos): todos los de $y=x$. Los detecta ∇g:

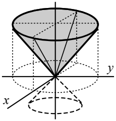
$$g_x=2(x-y)=0,\ g_y=2(y-x)=0, \text{ cuando } y=x.$$



Y, por último, como en $\mathbf{R}$, pueden existir extremos locales en puntos sin derivadas parciales:

Ej 4. $k(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (parte superior de la superficie cónica $z^2=x^2+y^2$) en $(0,0)$ no tenía derivadas parciales. En los otros puntos sí, pero es $\nabla k=\left(\frac{x}{\sqrt{\ }},\frac{y}{\sqrt{\ }}\right)\neq\mathbf{0}$.

Y claramente k tiene un mínimo (local y absoluto) en el origen.



¿Cómo distinguir en $\mathbf{R}^2$ si en un punto crítico $\mathbf{a}=(a,b)$ de una $f(x,y)\in C^2$ hay un máximo, un mínimo o ninguno de los dos? (se dice en este caso que hay un **punto silla**). En los apuntes se deduce este **teorema**:

> Sea $Hf=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{vmatrix}$ **hessiano** de f.
> Si en el punto **a** es $f_x=f_y=0$ y además es
> $Hf>0\,,\ f_{xx}>0 \Rightarrow f$ tiene mínimo local en **a**.
> $Hf>0\,,\ f_{xx}<0 \Rightarrow f$ tiene máximo local en **a**.
> $Hf<0 \Rightarrow f$ tiene un punto silla en **a**.

[Cuando $Hf=0$, el teorema no dice nada y puede pasar de todo en un entorno del punto].

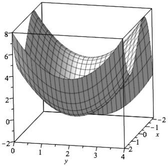
Ej 5. Aplicamos el teorema a los ejemplos 1, 2 y 3: $Hh(\mathbf{0})=-4 \Rightarrow$ punto silla, como vimos.
$Hf(\mathbf{0})=7\,,\ f_{xx}<0 \Rightarrow$ máximo. $Hg(x,x)=0$, y el teorema no dice nada de los mínimos.
$\big[$En un **a** con $Hf=0$ puede haber extremos estrictos. Como $f(x,y)=x^4+y^4$ con claro mínimo$\big]$.

Ej 6. Sea $f(x,y)=x^3+y^2-3x-4y+6$. $\begin{cases} f_x=3x^2-3=0\,,\ x=\pm 1 \\ f_y=2y-4=0\,,\ y=2\end{cases}$. $f_{xx}=6x\,,\ f_{xy}=0\,,\ f_{yy}=2 \Rightarrow Hf=12x$.

En $(1,2)$, $Hf, f_{xx}>0$, mínimo $\big[f(1,2)=0\big]$. $Hf(-1,2)<0$, silla $\big[f(-1,2)=4\big]$.
A lo mismo se llegaría desarrollando por Taylor en torno a ambos puntos:

$$f(x,y)=3(x-1)^2+(y-2)^2+\cdots\ ,\quad f(x,y)=4-3(x+1)^2+(y-2)^2+\cdots$$

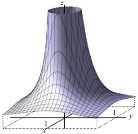
$\big[$El mínimo local 0 no es absoluto, pues f toma valores negativos:
por ejemplo, $f(x,0)=x^3-3x+6$, y en particular $f(-3,0)=-12\big]$.



Ej 8. $f(x,y)=y^3-(x-y)^2$. $\begin{cases} f_x=2(y-x)=0\,,\ y=x \\ f_y=3y^2+2(x-y)=0\end{cases} \to (0,0)$. $Hf(\mathbf{0})=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2\end{vmatrix}=0$, no nos informa.

Pero $f(x,x)=x^3$ y es punto silla $\big[$cerca del origen toma valores mayores y menores que $f(\mathbf{0})=0\big]$.

Teorema famoso: $\boxed{f \text{ continua en } A \textbf{ compacto} \Rightarrow f \text{ alcanza su máximo y su mínimo en } A\,.}$



Ej 13. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=7$ (discontinua), no tiene máximo en $[0,1]\times[0,1]$.

No tiene ni máximo ni mínimo en todo $\mathbf{R}^2$. En $[1,2]\times[0,1]$ (en ese compacto sí es continua) los alcanza seguro [claramente el máximo 1 se da en $(1,0)$, punto más próximo al origen, y el mínimo $\frac{1}{5}$ en $(2,1)$, punto más lejano].

La estrategia para hallar extremos sobre compactos A es similar a la que se utilizaba en $\mathbf{R}$:

- Encontrar en $\operatorname{int} A$ los puntos críticos y los puntos en que no existan las parciales.
- Localizar los extremos de la función sobre ∂A (quizás con 'multiplicadores de Lagrange').
- Comparar los valores en todos estos puntos.

Ej 14. Encontremos los extremos de $f(x,y)=(y-1)\,e^{4y-2y^2}-3x^2$ en $[-1,1]\times[0,2]$ (primer dibujo de esta sección)

$f_x=-6x=0 \;\to\; x=0$.

$f_y=(-4y^2+8y-3)\,e^{4y-2y^2}=0 \to y=\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}$. En esos puntos: $f\big(0,\frac{1}{2}\big)=-\frac{1}{2}\,e^{3/2}$, $f\big(0,\frac{3}{2}\big)=\frac{1}{2}\,e^{3/2}$.

Además $f(x,0)=-1-3x^2$ tiene por valor máximo $f(0,0)=-1$ y el mínimo es $f(\pm1,0)=-4$.

$f(x,2)=1-3x^2$ tiene por valor máximo $f(0,2)=1$ y el mínimo es $f(\pm1,2)=-2$.

$f(\pm1,y)=(y-1)\,e^{4y-2y^2}-3$ toman valores entre $-\frac{1}{2}\,e^{3/2}-3$ y $\frac{1}{2}\,e^{3/2}-3$.

Comparando todos estos valores se deduce que el valor máximo es $\frac{1}{2}\,e^{3/2}$ y el mínimo $-\frac{1}{2}\,e^{3/2}-3$.

$\big[$En todo $\mathbf{R}^2$ no alcanza su mínimo, pues, por ejemplo, $f(x,0)\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}-\infty$, pero sí es máximo global $\frac{1}{2}\,e^{3/2}\big]$.

Ej 1b. Hallemos los extremos de $h(x,y)=y^2-x^2$ en el A dado por $x^2+4y^2\leq 4$.

h no tenía extremos en el interior y máximo y mínimo estarán en ∂A .

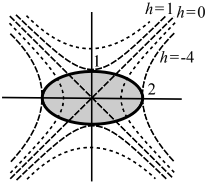
Nuestra elipse se puede describir como: $(2\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$.

Sobre ella, la h vale $h|_{\partial A}=4\operatorname{sen}^2 t-\cos^2 t\equiv g(t)$, $g'(t)=5\operatorname{sen}2t$.

Los máximos de g se dan si $t=0,\pi$ y los mínimos para $t=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

O sea, $h(0,\pm 1)=1$ y $h(\pm 2,0)=-4$ son los extremos de la h en A .

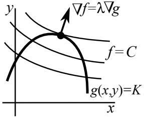
[Viendo las curvas de nivel de h y la elipse, la conclusión era clara].



Una técnica alternativa para buscar **extremos condicionados**' (de f sometidas a condiciones $g=K$) es mediante el cálculo de los llamados '**multiplicadores de Lagrange**':

Teor. Sean $f,g:D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ de C^1, S el 'conjunto de nivel' $g(\mathbf{x})=K$, $\mathbf{a}\in S$ e interior a D y $\nabla g(\mathbf{a})\neq\mathbf{0}$. Si $f|_S$ ('f restringida a S') tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{a}$ entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(\mathbf{a})=\lambda\nabla g(\mathbf{a})$.

El teorema da $n+1$ condiciones para hallar λ y las n coordenadas de $\mathbf{a}$: las n de los gradientes y además $g(\mathbf{a})=K$. No se prueba, pero lo justificamos en $\mathbf{R}^2$: el mayor C para el que es $g=K$, será aquel en que las curvas de nivel $f=C$ y la curva sean tangentes, o sea, para el que los gradientes sean múltiplos uno de otro.



Ej 1c. Hallemos los extremos de $h|_S$, $h(x,y)=y^2-x^2$ y S la elipse $x^2+4y^2=4$.

$\nabla h=\lambda\nabla g \Leftrightarrow (-2x,2y)=\lambda(2x,8y)$ y además $g=4\longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 2x(\lambda+1)=0 \;\rightarrow & x=0 \;\text{ó} & \lambda=-1\downarrow \\ 2y(4\lambda-1)=0 & \;\;\downarrow & y=0 \\ x^2+4y^2=4 & y=\pm 1 & \;\downarrow\; x=\pm 2 \end{array}\right.$

[En los puntos que da el sistema son tangentes S y las curvas de nivel].

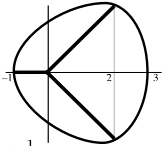
Dos ejemplos finales de multiplicadores de Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange permiten resolver problemas abordables por otros caminos. Algunas veces acortan los cálculos y otros los alargan (por ejemplo, si la restricción es de expresión sencilla):

Ej 17. Hallar los puntos de la curva $3y^2=21+20x-x^4$ situados a mayor y menor distancia del origen.

[Existen por estar x e y acotadas]. $f(x,y)=x^2+y^2$ con $g(x,y)=x^4-20x+3y^2=21$.

$$(2x,2y)=\lambda(4x^3-20,6y)\,,\ g=21 \to \left\{\begin{array}{lll} 4\lambda x^3-2x-20\lambda=0 & & x=2 \\ 2y(3\lambda-1)=0 \to y=0\downarrow & \text{ó } \lambda=\frac{1}{3}\uparrow & \downarrow \\ 3y^2=21+20x-x^4 & x=-1,3 & y=\pm\sqrt{15} \end{array}\right.$$



$$f(-1,0)=1 \text{ (mínimo)},\ f(3,0)=9\,,\ f\big(2,\pm\sqrt{15}\big)=19 \text{ (máximos)}.$$

[En estos ejemplos no era $\nabla g(\mathbf{a})=\mathbf{0}$ con $\mathbf{a}\in S$. Si lo fuera, viendo el teorema, se incluiría entre los candidatos].

Hay otra forma de obtener el mismo conjunto de ecuaciones $\nabla f(\mathbf{x})=\lambda\nabla g(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x})=K$: pensando en la función $L(x_1,\dots,x_n,\lambda)=f(\mathbf{x})-\lambda\big[g(\mathbf{x})-K\big]$, con λ como una variable más, y haciendo $\nabla L=\mathbf{0}$, pues de esto salen las mismas ecuaciones. Operamos así en este ejemplo en $\mathbf{R}^3$:

Ej 21. Hallemos los máximos y mínimos de $f(x,y,z)=x+y^2+z$ sobre la superficie $2x^2+y^2+2z^2=1$.

Los extremos existirán por ser f continua y ser la superficie (un elipsoide) un conjunto compacto.

Consideremos $L=f-\lambda g = x+y^2+z - \lambda(2x^2+y^2+2z^2-1)$ y hagamos $\nabla L=\mathbf{0}$:

$$\left\{\begin{array}{l} L_x=1-4\lambda x=0\,,\ x=\frac{1}{4\lambda} \\ L_y=2y-2\lambda y=0\,,\ y=0 \text{ ó } \lambda=1 \to \\ L_z=1-4\lambda z=0\,,\ z=\frac{1}{4\lambda} \\ L_\lambda=2x^2+y^2+2z^2-1=0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} y=0 \to \frac{1}{8\lambda^2}+\frac{1}{8\lambda^2}=1\,,\ \lambda=\pm\frac{1}{2} \to \big(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\big)\,,\ \big(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\big). \\ \lambda=1 \to x=z=\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{4}+y^2=1 \to \big(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\big)\,,\ \big(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\big). \end{array}\right.$$

$$f\big(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\big)=1\,,\ f\big(-\tfrac{1}{2},0,-\tfrac{1}{2}\big)=-1\,,\ f\big(\tfrac{1}{4},\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{4}\big)=\tfrac{5}{4}\,.$$

Por tanto, el valor mínimo absoluto es -1, y el valor máximo es $\frac{5}{4}$ (que se alcanza en dos puntos).