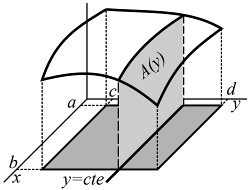
4. Integrales múltiples (este pdf)



4.1 Integrales dobles

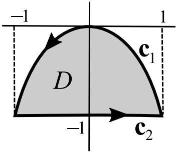
4.2 Integrales triples

5. Integrales de línea

5.1 Integrales de campos escalares sobre curvas

5.2 Integrales de campos vectoriales y de gradientes

5.3 Teoremas de Green y de la divergencia



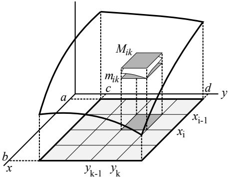
6. Integrales de superficie

6.1 Definición y cálculo

6.2 Teoremas de la divergencia y Stokes

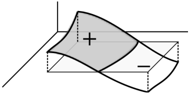
(extendiendo la introducción hecha en 2021 para los ingenieros de materiales sobre 4 y 5)

Integrales dobles. Definición poco práctica como en **R**.



$f(x,y)$ **acotada** en **rectángulo** $R=[a,b]\times[c,d]$. Se divide R en otros $n{\times}n$. Se llama M_{ik} y m_{ik} al supremo e ínfimo de f en cada R_{ij} y **sumas superior** e **inferior** a: $U_n=\sum_{i,k=1}^{n} M_{ik}\,\Delta x\,\Delta y$, $L_n=\sum_{i,k=1}^{n} m_{ik}\,\Delta x\,\Delta y$.

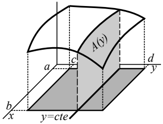
> Si las sucesiones $\{L_n\}$ y $\{U_n\}$ tienden al mismo límite, se dice que f es **integrable**, al límite se le llama **integral** de f en R y se representa por $\iint_R f$ ó $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.



Si $f\geq 0$, $\iint_R f$ describirá el **volumen** encerrado entre la gráfica de f y el plano $z=0$ en R, y en general (como en **R**), será la suma de volúmenes con signos + o − adecuados. Y como sucedía allí:

Teor Si la f acotada en R es continua o discontinua como mucho en un número finito de puntos y gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable en R.

Para calcular integrales dobles no se usa la definición. Basta hacer dos integraciones sucesivas de funciones de una variable, como dice el siguiente teorema (de Fubini):



$$f \text{ continua en } R \Rightarrow \iint_R f=\int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx\,.$$

Para y constante $A(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ es el área de una sección del sólido acotado por la gráfica de f. Integrando $A(y)$ se tiene el volumen $\iint_R f=\int_c^d A(y)\,dy$. La otra igualdad es lo simétrico.

Ej 1. Sean $R=[0,\pi]\times[0,1]$ y $f(x,y)=y\,\mathrm{sen}\,x$. Calcular esta integral es fácil:

$$\iint_R f=\int_0^{\pi}\Big[\int_0^1 y\,\mathrm{sen}\,x\,dy\Big]dx=\int_0^{\pi}\Big[\frac{y^2\,\mathrm{sen}\,x}{2}\Big]_0^1dx=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,x}{2}\,dx=\frac{1-\cos\pi}{2}=1\,.$$

O bien: $$\iint_R f=\int_0^1\Big[\int_0^{\pi}y\,\mathrm{sen}\,x\,dx\Big]dy=\int_0^1\big[-y\cos x\big]_0^{\pi}dy=\int_0^1 2y\,dy=1\,.$$

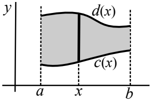
[Hay que tener en cuenta en cada paso cual es la variable y cual se mira como constante].

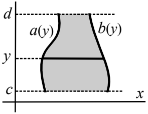
[Dejamos de escribir corchetes entre integrales pues usualmente no se hace].

Otros D más complicados se dividirán en varios de esos tipos y se sumarán las integrales]:

i) f continua en $D=\big\{(x,y):a\le x\le b\,,c(x)\le y\le d(x)\big\}$, con $c\le d$ continuas en $[a,b]\Rightarrow\iint_D f=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\,dy\,dx\,.$

ii) f continua en $D=\big\{(x,y):c\le y\le d\,,a(y)\le x\le b(y)\big\}$, con $a\le b$ continuas en $[c,d]\Rightarrow\iint_D f=\int_c^d\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)\,dx\,dy\,.$

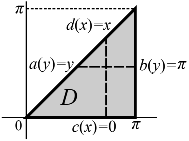




Cuando x varía entre a y b, y varía entre $c(x)$ y $d(x)$. Similar para ii).

Si $f\ge 0$, $\iint_D f$ describe el **volumen del sólido** encerrado entre la gráfica de f y el plano xy sobre la región D. Si $f(x,y)$ fuera la densidad variable de una placa D, la integral doble representaría la **masa** de la placa. $\iint_D 1$ proporcionará el **área** de D.

Ej 3. Integremos $f(x,y)=x\cos(x+y)$ sobre el D del dibujo:

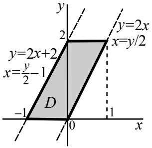


$$\iint_D f = \int_0^\pi\!\!\int_0^x x\cos(x+y)\,dy\,dx = \int_0^\pi x\,[\text{sen}\,2x-\text{sen}\,x]\,dx$$
$$= \Big[x\big(\cos x-\tfrac12\cos 2x\big)\Big]_0^\pi+\int_0^\pi\Big[\tfrac12\cos 2x-\cos x\Big]dx = -\frac{3\pi}{2}\,.$$

O, más largo en este caso, integrando primero respecto a x:

$$\iint_D f = \int_0^\pi\!\!\int_y^\pi x\cos(x+y)\,dx\,dy \overset{\text{partes}}{=} \int_0^\pi[-\pi\,\text{sen}\,y-\cos y-y\,\text{sen}\,2y-\cos 2y]\,dy = -\frac{3\pi}{2}\,.$$

pr5. Hallemos $\iint_D (y-2x)^3\,dx\,dy$, siendo D el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(-1,0)$.

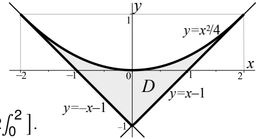


Más corto: $\displaystyle\int_0^2\!\!\int_{y/2-1}^{y/2}(y-2x)^3\,dx\,dy=\int_0^2-\frac18\Big[(y-2x)^4\Big]_{y/2-1}^{y/2}dy=\int_0^2 2\,dy\underset{\uparrow}{=}4\,.$

[**Integral de una constante = constante × longitud del intervalo**]

Peor: $\displaystyle\int_{-1}^0\!\!\int_0^{2x+2}(y-2x)^3dy\,dx+\int_0^1\!\!\int_{2x}^2(y-2x)^3dy\,dx=\cdots=4\,.$

Ej 4. Para integrar sobre D limitado por $y=|x|-1$ e $y=x^2/2$ se debe dividir:



Mejor así: $\displaystyle\iint_D f=\int_{-2}^0\!\int_{-x-1}^{x^2/2}f(x,y)\,dy\,dx+\int_0^2\!\int_{x-1}^{x^2/4}f(x,y)\,dy\,dx\,.$

Primero integramos $f\equiv1$ y obtendremos el **área de** D:

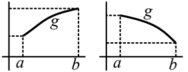
$$A=\iint_D 1=\int_{-2}^0\Big(\frac{x^2}{4}+x+1\Big)dx+\int_0^2\Big(\frac{x^2}{4}-x+1\Big)dx=\frac23+\frac23=\frac43\,.$$

[Iguales pues $f\equiv1$ **par** en x y D simétrico respecto a $x=0$. Bastaba hacer $2\int_0^2$].

Ahora $f(x,y)=3xy^2$: $\displaystyle\iint_D f=\int_{-2}^0\Big[xy^3\Big]_{-x-1}^{x^2/4}dx+\int_0^2\Big[xy^3\Big]_{x-1}^{x^2/4}dx=\cdots=-\frac1{10}+\frac1{10}=0\,.$

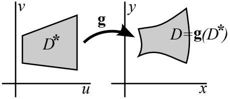
[Se anula por ser f **impar** en x y D simétrico respecto a $x=0$. El 'volumen negativo' de $x\le0$ se cancela con el positivo de $x\ge0$].

Cambios de variable. Cambio lineal.



Generalicemos $\int_a^b f(g(u))\,g'(u)\,du=\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$, $g\in C^1([a,b])$.
Si g **inyectiva** (creciente o decreciente) en $[a,b]$ se puede escribir:

$$\int_{[a,b]} f(g(u))\,|g'(u)|\,du=\int_{g([a,b])} f(x)\,dx\,.$$



En el plano para hallar $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ se hace $\begin{array}{l}\mathbf{g}: D^*\subset\mathbf{R}^2\to D\subset\mathbf{R}^2\\ \quad(u,v)\to(x(u,v),y(u,v))\end{array}$
buscando que el nuevo recinto D^* o la nueva función a integrar sean más sencillas. Se demuestra el teorema:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si }\ \mathbf{g}:(u,v)\to\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \text{ es } C^1\text{, inyectiva en } D^*,\ \mathbf{g}(D^*)=D\ \text{ y } f \text{ es integrable,}\\ \text{entonces } \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv\,.\end{array}}$$

[El jacobiano viene a medir como se deforman las áreas al pasar a la nuevas variables].

cambio lineal: $\boxed{\begin{cases}x=Au+Bv\\ y=Cu+Dv\end{cases}}$. Si $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=AD-BC\neq 0$ define biyección de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$.

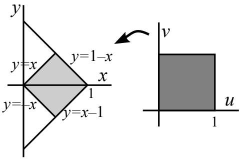
$$\to\ \boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\;=\;|AD-BC|\iint_{D^*} f(Au+Bv,\,Cu+Dv)\,du\,dv}\ .$$

Ej 6. Hallemos $\iint_D (x-y)^2\,e^{x+y}dx\,dy$, con D el cuadrado de la figura.

La forma de f y el recinto sugieren: $\begin{cases}x+y=u\\ x-y=v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(u+v)/2\\ y=(u-v)/2\end{cases}$.

Las rectas que definen los lados pasan a ser: $u=0\,,\,1\,,\ v=0\,,\,1$.

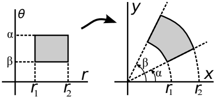
El jacobiano es $\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$. Luego $\iint_D=\frac{1}{2}\int_0^1\!\int_0^1 v^2e^u\,du\,dv=\frac{e-1}{6}$.



$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}}$. El jacobiano es: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = r$.

Y el cambio adopta la forma: $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} r\,f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta}$.

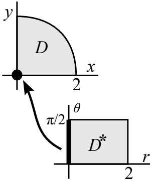
¿Qué conjuntos D son D^* sencillos del plano $r\theta$? Un rectángulo $[r_1, r_2] \times [\alpha, \beta]$ pasa a ser un sector de corona circular limitado por circunferencias de radios r_1 , r_2 y rectas de pendientes α , β .



Ej 8. Hallemos $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$, con D el sector circular del dibujo:

$$\iint_{D^*} r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^2 r(4-r^2)^{1/2} dr\,d\theta \underset{\uparrow}{=} \frac{\pi}{2}\Big[\frac{(4-r^2)^{3/2}}{-3}\Big]_0^2 = \frac{4\pi}{3} .$$

la $\int_0^2$ no depende de θ octante de esfera ↗



El cambio no es inyectivo en el lado izquierdo del rectángulo D^* (todos los puntos con $r=0$ van al origen), pero los cambios son válidos aunque falle la inyectividad en puntos o rectas sueltas.

Aunque el integrando es sencillo en cartesianas, el recinto pide usar polares:

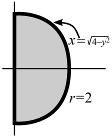
Ej 9. Calcular la integral doble $\iint_D (x-y)^2\,dx\,dy$, con D semicírculo dado por $x^2+y^2 \le 4$, $x \ge 0$.

En polares, $(r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) = r^2(1-\text{sen}\,2\theta)$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 r^3(1-\text{sen}\,2\theta)\,dr\,d\theta = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\text{sen}\,2\theta)\,d\theta = 4\pi .$$

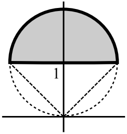
↑por el jacobiano (es impar)

Largo: $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2-2xy+y^2)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\Big(y^3-4y+\tfrac{2}{3}(y^2+2)\sqrt{4-y^2}\,\Big)dy = \cdots$



Más integrales con cambios

El recinto no parece adecuado, al no estar limitado por curvas $r=cte$, pero la f las pide:

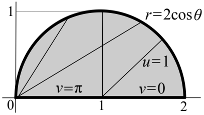


Ej 11. Integremos $f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, sobre $x^2+(y-1)^2\le 1$, $y\ge 1$ (semicírculo).

$$y=r\,\text{sen}\,\theta=1 \to r=1/\text{sen}\,\theta\,,\quad x^2+y^2=2y\,,\ r^2=2r\,\text{sen}\,\theta \to r=2\,\text{sen}\,\theta\,.$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{1/\text{sen}\,\theta}^{2\,\text{sen}\,\theta}\frac{r^2\,\text{sen}\,\theta}{r^2}\,dr\,d\theta=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(2\,\text{sen}^2\theta-1)\,d\theta=-\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta=1\,.$$

Pequeñas **modificaciones del cambio a polares**:



Ej 14. Hallemos $\iint_D y\,dx\,dy$, D región dada por $(x-1)^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$.

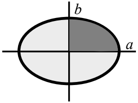
Polares centradas en $(1,0)$: $\begin{matrix} x=1+u\cos v\,, \\ y=u\,\text{sen}\,v\,, \end{matrix}$ con $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\,\text{sen}\,v \\ \text{sen}\,v & u\cos v\end{vmatrix}=u\,.$

Como $\begin{matrix}(x-1)^2+y^2=1 \to u=1 \\ y\ge 0 \text{ para } v\in[0,\pi]\end{matrix}$ es: $\iint_D y=\int_0^{\pi}\int_0^1 u^2\,\text{sen}\,v\,du\,dv=\frac{2}{3}\,.$

Aunque la integral no es complicada en cartesianas (de las dos formas) y en las polares habituales:

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2(2x-x^2)\,dx=\frac{2}{3}\,.\qquad \int_0^1\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}y\,dx\,dy=\int_0^1 2y(1-y^2)^{1/2}\,dy=\frac{2}{3}\,.$$

$$x^2+y^2=2x \to r=2\cos\theta \to \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\,.$$



Ej 15. Hallemos el área A de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Modificamos el cambio a polares:

$\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$, $J=abr$. La elipse pasa a ser $r=1 \to A=\int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\,dr\,d\theta=\pi ab\,.$

Además del **área** de D $\left[A=\iint_D dx\,dy\right]$ y **volumen** en D bajo la gráfica de f positiva $\left[V=\iint_D f\right]$, es $V=\iint_D (g-f)\,dx\,dy$ el **volumen sobre D entre las gráficas de f y g acotadas**, si $f\le g$.

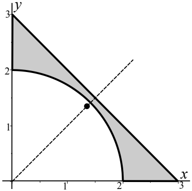
El **promedio** de una magitud f sobre D es $\bar{f}=\frac{1}{A}\iint_D f$.

Si $\sigma(x,y)$ es la **densidad** de una placa D, su **masa** es $M=\iint_D \sigma(x,y)\,dxdy$.

El **centro de masa** de la D es el punto $(\bar{x},\bar{y})$ de coordenadas $\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\sigma$, $\bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\sigma$

[se llama **centroide** si $\sigma=$cte, y será $\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x$, $\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y$ (el promedio de sus x e y)].

Ej 18. Calculemos el centro de masas de la región del primer cuadrante dada por $x^2+y^2\ge 4$, $x+y\le 3$ y cuya densidad es $\sigma(x,y)=xy$.

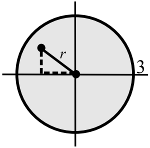


La masa es $M=\int_0^2\int_{\sqrt{4-x^2}}^{3-x} xy\,dy\,dx+\int_2^3\int_0^{3-x} xy\,dy\,dx=\cdots=\frac{11}{8}$.

La $\bar{x}$ y la $\bar{y}$ serán iguales por simetría de la región y de la densidad.

$$M\bar{x}=\int_0^2\int_{\sqrt{4-x^2}}^{3-x} x^2y\,dy\,dx+\int_2^3\int_0^{3-x} x^2y\,dy\,dx=\frac{23}{12}\to\bar{x}=\bar{y}=\frac{46}{33}\approx 1.39\,.$$

Ej 19. Hallemos la distancia media de los puntos de un círculo de radio 3 a su centro.



9π es el área del círculo y la distancia r. Luego $d_{\text{media}}=\frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\,dr\,d\theta=2$.

Hallamos ahora la media para otra distancia: $d^*\big((x,y),(a,b)\big)=|x-a|+|y-b|$.
(caminando paralelos a los ejes)

La distancia al origen aquí es $r\big(|\cos\theta|+|\text{sen}\,\theta|\big)$ y por tanto:

$$d^*_{\text{media}}=\frac{1}{9\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\big(|\cos\theta|+|\text{sen}\,\theta|\big)\,dr\,d\theta=\frac{4}{9\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^2(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta=\frac{8}{\pi}\quad(>2\text{, claro}).$$

Como para $n=2$ se define $\iiint_P f$ para $f(x,y,z)$ acotada en un paralelepípedo $P=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$. Será un 'volumen' de un 'sólido' en 4 dimensiones de 'base' P y 'altura' dada por f (o la **masa** de V si f es su densidad). La integral se calcula como allí:

$$\boxed{f \text{ continua en } P \Rightarrow \iiint_P f = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

[o las otras 5 iteradas intercambiando los papeles de x, y, z].

Ej 1. Si $f(x,y,z)=2yz-x$ y $P=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$ es:

$$\iiint_P f = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 (2yz-x)\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^2 (9y-3x)\,dy\,dx = \int_0^1 (18-6x)\,dx = 15\,.$$

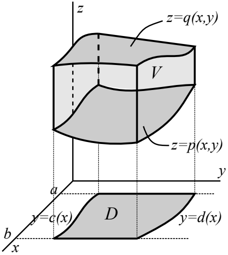
O podemos hacerlo, por ejemplo, con este otro orden de integración:

$$\iiint_P f = \int_0^3\int_0^2\int_0^1 (2yz-x)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3\int_0^2 \left(2yz-\tfrac{1}{2}\right)dy\,dz = \int_0^3 (4z-1)\,dz = 15\,.$$

También se puede integrar en recintos $V\subset\mathbf{R}^3$ más generales.

Si $V=\{(x,y,z): a\le x\le b,\ c(x)\le y\le d(x),\ p(x,y)\le z\le q(x,y)\}$, con f continua en V, c,d continuas en $[a,b]$ y p,q continuas en $D=\{(x,y): a\le x\le b,\, c(x)\le y\le d(x)\}$, será:

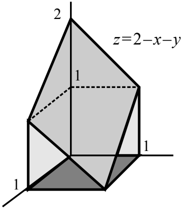
$$\iiint_V f = \int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)}\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\,.$$



Análogas fórmulas se obtienen variando los papeles de x, y, z.

Cuando $f\equiv 1$, la $\iiint_V dx\,dy\,dz$ **describe el volumen** de V.

Lo más difícil es dibujar las gráficas o al menos hacerse una idea de ellas para saber cuáles de las funciones que definen los recintos son mayores o menores.



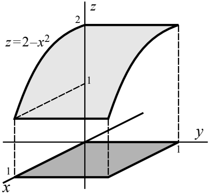
Ej 2. Calculemos $\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$, con V región acotada por los planos:
$x=0\,,\ y=0\,,\ z=0\,,\ x=1\,,\ y=1\,,\ x+y+z=2\,.$

En $[0,1]\times[0,1]$ está $z=2-x-y$ por encima de $z=0$.

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\!\int_0^1\!\int_0^{2-x-y} x\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\!\int_0^1(2x-x^2-xy)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1\Big(2x-x^2-x\Big[\tfrac{y^2}{2}\Big]_0^1\Big)\,dx=\int_0^1\big(\tfrac{3x}{2}-x^2\big)\,dx=\tfrac{5}{12}\,.$$

O un poquito más corto cambiando el orden de dx y dy . El primer paso es igual, y luego:

$$\int_0^1\!\int_0^1(2x-x^2-xy)\,dx\,dy=\int_0^1\big(1-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}y\big)\,dy=\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{12}\,.$$



Ej 4. Hallar $\iiint_V \mathrm{e}^z\,dx\,dy\,dz$, con V sólido limitado por $x=0\,,\ x=1\,,$
$y=0\,,\ y=1\,,\ z=0$ y la superficie $z=2-x^2$.

En $[0,1]\times[0,1]$ es $z=2-x^2>0=z$ (ni se precisa el dibujo).

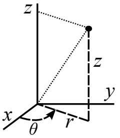
$$\iiint_V=\int_0^1\!\int_0^1\!\int_0^{2-x^2} x\,\mathrm{e}^z dz\,dy\,dx=\int_0^1\!\int_0^1 x\big[\mathrm{e}^{2-x^2}-1\big]\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1\big[x\,\mathrm{e}^{2-x^2}-x\big]\,dx=-\tfrac{1}{2}\big[\mathrm{e}^{2-x^2}+x^2\big]_0^1=\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-1)\,.$$

$\big[$Si fuese e^z la densidad del sólido V habríamos calculado su masa con el cálculo anterior$\big]$.

Parecidos a los del plano son los **cambios de variable** en el espacio:

Si $\mathbf{g}:(u,v,w)\to\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)$ es C^1, inyectiva en V^*, $\mathbf{g}(V^*)=V$ y f integrable $\Rightarrow \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V^*} f\big(\mathbf{g}(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw\,.$

Los más interesantes son los cambios a **cilíndricas y esféricas**.

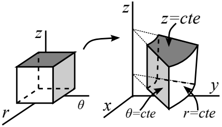


Cilíndricas: $r\ge 0\,,\ 0\le\theta<2\pi$ $\quad\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta\\ y=r\,\text{sen}\,\theta\\ z=z\end{array}\right.$. Polares del plano xy más la coordenada z .

Se cumple $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$.

El jacobiano es $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix} r\cos\theta & r\,\text{sen}\,\theta & 0\\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\boxed{r}$, y, por tanto:

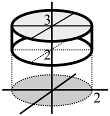
$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V^*} r\,f(r\cos\theta,r\,\text{sen}\,\theta,z)\,dr\,d\theta\,dz}$$



[Útil para integrar sobre cilindros y más superficies de revolución].

Ej 9. Integremos la función $f(x,y,z)=z\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2+y^2\le 4\,,\ 2\le z\le 3$.

$$\iiint_V z\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}dx\,dy\,dz=\int_2^3\!\int_0^{2\pi}\!\int_0^2 \underset{\uparrow\text{jacobiano}}{r}\,z\,\mathrm{e}^{r^2}dr\,d\theta\,dz=\frac{9-4}{2}\,2\pi\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\Big]_0^2=\frac{5\pi}{2}\,(\mathrm{e}^4-1)\,.$$



Es lo mismo que integrar en z y hacer luego el cambio a polares.

En cartesianas salen primitivas no calculables: $\int\mathrm{e}^{x^2+y^2}dx$ o $\int\mathrm{e}^{x^2+y^2}dy$.

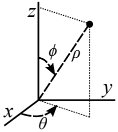
Integrales en **esféricas**

Esféricas:
$r\geq 0\,,\ 0\leq \phi\leq \pi$
$0\leq \theta < 2\pi$

$$\boxed{\begin{cases} x=\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \\ y=\rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2+z^2}\,,\quad \tan\theta=\tfrac{y}{x}\,,\ \tan\phi=\tfrac{r}{z}$$

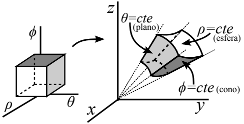
[con notación de libros de matemáticas].



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix} \text{sen}\,\phi\cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta & \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\,\text{sen}\,\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\,\text{sen}\,\phi \end{vmatrix}=\cdots=-\rho^2\,\text{sen}\phi\,.$$

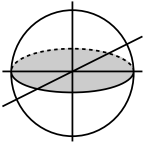
Luego: $$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V^*}\rho^2\,\text{sen}\phi\ f(\rho,\theta,\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta}\,.$$

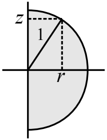
En esféricas, $\theta=C$ es un plano, $\rho=C$ describe una superficie esférica y $\phi=C$ una cónica. El recinto más sencillo de todos, desde luego, es la propia esfera que tantas veces aparece.



Ej 8. Hallemos el volumen de la esfera unidad de varias formas. Difícil en cartesianas.

En esféricas: vol $=\int_0^{2\pi}\!\int_0^1\!\int_0^{\pi}\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta=2\pi\big[-\cos\phi\big]_0^{\pi}\big[\tfrac{1}{3}\rho^3\big]_0^1=\frac{4\pi}{3}\,.$





En cilíndricas hay dos caminos:

$$\text{vol}=\int_0^{2\pi}\!\int_{-1}^{1}\!\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1-z^2}{2}\,dz=\frac{4\pi}{3}\,.$$

$$\text{vol}=\int_0^{2\pi}\!\int_0^{1}\!\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^1 2r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{4\pi}{3}\,.$$

En cartesianas sólo planteamos la integral: vol $=8\int_0^1\!\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\!\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dz\,dx\,dy=\cdots$