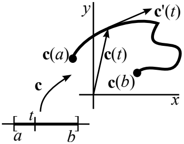
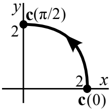
5. Integrales de línea. 5.1. De campos escalares

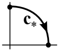
Una **función vectorial** (que también llamaremos **trayectoria** o **camino**) era una $\mathbf{c}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$, $\mathbf{c}(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, cuya gráfica era una **curva orientada** C en $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{c}'(t)=(x_1'(t),\ldots,x_n'(t))$ daba el vector tangente a la curva. Se dice $\mathbf{c}\in C^1$ si es continua y $\mathbf{c}'$ existe y es continua $\forall t\in(a,b)$. Será C^1 **a trozos** si C es continua y se puede dividir $[a,b]$ en un número finito de subintervalos siendo C^1 en cada uno.



Ej 1. $\mathbf{c}:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}(t)=(2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$ es trayectoria C^1 pues $\mathbf{c}'(t)=(-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t)$ existe $\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$\mathbf{c}_*:[0,2]\to\mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}_*(t)=\left(t,\sqrt{4-t^2}\right)$, $\mathbf{c}_*'(t)=\left(1,-t(4-t^2)^{-1/2}\right)$ es otro camino C^1, que describe esa misma curva (en sentido opuesto). Se dice que $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}_*$ son dos **parametrizaciones** de la misma curva C.





Hay dos tipos de integrales de línea: de campos **escalares** y de **vectoriales**. Comencemos con las **integrales de campos escalares a lo largo de curvas**:

Sea $\mathbf{c}(t):[a,b]\to\mathbf{R}^n$ camino C^1 y sea f un campo escalar en $\mathbf{R}^n$ tal que $f(\mathbf{c}(t))$ es continua en $[a,b]$. La integral de f sobre $\mathbf{c}$ (o a lo largo de $\mathbf{c}$) se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f\,ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt\,.$$

Si $\mathbf{c}$ es C^1 a trozos o $f(\mathbf{c}(t))$ continua a trozos, se se divide $[a,b]$ en intervalos sobre los que $f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua y será $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ la suma de las integrales.

No dependen de la parametrización

Ej 1*. Si $f(x,y)=xy^2$ y $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_*$ son los de antes, las integrales a lo largo de los dos caminos son:

$$\|\mathbf{c}'\|=\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t+4\cos^2 t}=2\,,\quad \int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_0^{\pi/2}16\cos t\,\mathrm{sen}^2 t\,dt=\tfrac{16}{3}\,\mathrm{sen}^3 t\Big]_0^{\pi/2}=\tfrac{16}{3}\,.$$

$$\|\mathbf{c}_*'\|=\sqrt{1+\tfrac{t^2}{4-t^2}}=\tfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,,\quad \int_{\mathbf{c}_*} f\,ds=\int_0^2 t(4-t^2)\,\tfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt=-\tfrac{2}{3}(4-t^2)^{3/2}\Big]_0^2=\tfrac{16}{3}\,.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Se prueba que:

Teor | Si $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}_*$ describen la misma curva C, entonces $\int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_{\mathbf{c}_*} f\,ds\equiv\int_C f\,ds$. |

La integral de línea de una f escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva y es lícita la notación $\int_C f\,ds$ (integral de f sobre C) donde $\mathbf{c}$ no aparece.

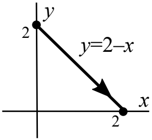
La raíz de la norma hace que el cálculo de estas integrales sea complicado (salvo para curvas sencillas) y no es raro que aparecezcan integrales no calculables. [Con los campos vectoriales no ocurrirá esto]. Además de las circunferencias, también suelen ser fáciles sobre segmentos:

Ej 2. Calculemos la integral de la $f(x,y)=xy^2$ ahora sobre el segmento que une $(0,2)$ y $(2,0)$.

Podemos parametrizarlo utilizando que pertenece a la recta $y=2-x$:

$$\mathbf{c}(x)=(x,2-x)\,,\ x\in[0,2]\,.\ \ \|\mathbf{c}'(x)\|=\|(1,-1)\|=\sqrt{2}\ \rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_0^2\sqrt{2}\,x(2-x)^2\,dx=\sqrt{2}\,\Big[2x^2-\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4\Big]_0^2=\tfrac{4}{3}\sqrt{2}\,.$$



O también con la expresión para los segmentos que conocemos desde 1.1:

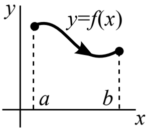
$\mathbf{c}_*(t)=(0,2)+t(2,-2)=(2t,2-2t)\,,\ t\in[0,1]$ [doble velocidad].

$\|\mathbf{c}_*'(t)\|=2\sqrt{2}\rightarrow\int_{\mathbf{c}_*} f\,ds=16\sqrt{2}\int_0^1 t(1-t)^2dt=16\sqrt{2}\big[\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}\big]=\tfrac{4}{3}\sqrt{2}$ [debe salir lo mismo].

Sea primero $f\equiv 1$. Si $\mathbf{c}(t)$ describe una partícula, al ser $\|\mathbf{c}'(t)\|$ la velocidad escalar, $ds=\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$ dará la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo dt' y por tanto:

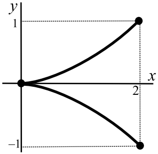
$\boxed{L=\int_C ds=\int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt \text{ representa la } \textbf{longitud} \text{ de la curva } C \text{ definida por } \mathbf{c}.}$

Veamos como queda la fórmula para la gráfica de una función $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$. Una parametrización clara es $\mathbf{c}(x)=\big(x,f(x)\big)$, $x\in[a,b]$. Y como $\mathbf{c}'(x)=\big(1,f'(x)\big)$, la longitud pasa a ser



$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,.$$ [Fórmula análoga para $x=f(y)$. En general, integrales difíciles].

Ej 3. Hallemos la longitud de la curva dada por la función vectorial $\mathbf{c}(t)=\big(2t^2,t^3\big)$, $t\in[-1,1]$.

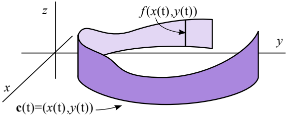


$$\mathbf{c}'(t)=(4t,3t^2),\ L=2\int_0^1 t\sqrt{16+9t^2}\,dt=\tfrac{2}{27}\big(16+9t^2\big)^{3/2}\Big]_0^1=\tfrac{122}{27}\approx 4.52\,.$$

O con la parametrización $\big(2x,x^{3/2}\big)$, $x\in[0,1]$ (y utilizando la simetría):

$$\Rightarrow L=2\int_0^1\sqrt{4+\tfrac{9x}{4}}\,dx=\tfrac{2}{27}\big(16+9x\big)^{3/2}\Big]_0^1=\tfrac{2}{27}\big[125-64\big]\,.$$

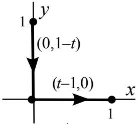
Si f es un campo con $f(\mathbf{c}(t))\geq 0\ \forall t\in[a,b]$, $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ representa si $n=2$ el **área de la valla** de altura $f(x,y)$ en cada (x,y) de la curva C, pues un 'diferencial de valla' tiene por área $f(\mathbf{c}(t))\,ds=f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$.



Más ejemplos

Ej 5. Integremos $f(x,y)=x-y$ sobre la curva C^1 a trozos $\mathbf{c}(t)=\begin{cases}(0,1-t),\ t\in[0,1]\\(t-1,0),\ t\in[1,2]\end{cases}$.

Integramos sobre cada segmento y sumamos el resultado.



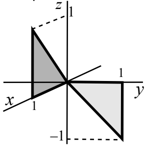
Sobre el vertical, $f(\mathbf{c}_1(t))=t-1$, $\|\mathbf{c}_1'(t)\|=\|(0,-1)\|=1 \ \rightarrow$

$$\int_{\mathbf{c}_1} f\,ds=\int_0^1 (t-1)\,dt=\tfrac{1}{2}-1=-\tfrac{1}{2}.$$

Sobre el otro, $f(\mathbf{c}_2(t))=t-1$, $\|\mathbf{c}_2'(t)\|=1$, $\int_{\mathbf{c}_2} f\,ds=\int_1^2 (t-1)\,dt=\tfrac{1}{2}$.

La integral total es, por tanto: $\int_{\mathbf{c}} f\,ds=\int_{\mathbf{c}_1}+\int_{\mathbf{c}_2}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=0$.

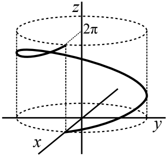
[El área de la valla positiva sobre el eje de las x se cancela con el área de la valla negativa sobre el eje de las y].



Otro significado de las integrales de línea de campos escalares: si $\mathbf{c}(t)$ describe un **alambre** (en el plano o el espacio) **de densidad variable** dada por $\sigma(\mathbf{x})$, la **masa del alambre** será $M=\int_C \sigma\,ds$.

Un ejemplo de longitud y masa calculables exactamente en el espacio:

Ej 6. Sea el alambre en forma de hélice $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,t)$, $t\in[0,2\pi]$, y de densidad variable $\sigma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.



Como $\|\mathbf{c}'\|=\sqrt{2}$, su longitud es $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,dt=2\pi\sqrt{2}\approx 8.9$.

Su masa: $M=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t+t^2)\,dt=\sqrt{2}\big(2\pi+\tfrac{8}{3}\pi^3\big)\approx 125.8$.

Sea $\mathbf{c}(t):[a,b]\to\mathbf{R}^n$ de C^1 y sea $\mathbf{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ campo vectorial continuo sobre la gráfica de $\mathbf{c}$. Entonces la integral de línea del campo $\mathbf{f}$ a lo largo de $\mathbf{c}$ se define

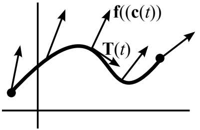
$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b\mathbf{f}\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt\,.$$

Si $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)$ es continua a trozos, se divide el intervalo y se suman las integrales.

Si $\mathbf{c}'(t)\neq\mathbf{0}\ \forall t$ y $\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ es el vector tangente unitario:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b\big[\mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{T}(t)\big]\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt=\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,ds\,,$$

que se puede mirar como la integral del campo escalar $\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}$, componente tangencial de $\mathbf{f}$ en la dirección de $\mathbf{c}$. Por tanto:

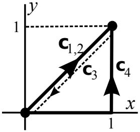


$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas $\mathbf{f}$ sobre la partícula que recorre $\mathbf{c}$.

Ej 1. Calculemos varias integrales del línea de $\mathbf{f}(x,y)=\big(x^2,2y+x\big)$ sobre distintos caminos:

$\mathbf{c}_1(t)=(t,t)$, $t\in[0,1]$, $\mathbf{c}_2(t)=(4t^2,4t^2)$, $t\in\big[0,\frac{1}{2}\big]$, $\mathbf{c}_3(t)=(1-t,1-t)$, $t\in[0,1]$

[describen la misma curva, la tercera en sentido contrario].



$$\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t^2,3t)\cdot(1,1)\,dt=\int_0^1(t^2+3t)\,dt=\tfrac{1}{3}+\tfrac{3}{2}=\tfrac{11}{6}\,.$$

$$\int_{\mathbf{c}_2}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{1/2}(16t^4,12t^2)\cdot(8t,8t)\,dt=16\int_0^{1/2}(8t^5+6t^3)\,dt=\tfrac{11}{6}\,,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big((1-t)^2,3(1-t)\big)\cdot(-1,-1)\,dt=\int_0^1\big(-4+5t+t^2\big)\,dt=-\tfrac{11}{6}\,.$$

$$\mathbf{c}_4(t)=\begin{cases}(t,0)\,,& t\in[0,1]\\(1,t-1), & t\in[1,2]\end{cases},\quad\int_{\mathbf{c}_4}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t^2,t)\cdot(1,0)\,dt+\int_1^2(t^2,2t-1)\cdot(0,1)\,dt=\tfrac{1}{3}+2=\tfrac{7}{3}\,.$$

La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre. Incluso para algunos campos no dependerá siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final.

Ej 2. Hallemos la integrales para los mismos $\mathbf{c_k}$, pero ahora para el campo $\mathbf{g}(x,y)=(y,x-4y)$:

$$\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t,-3t)\cdot(1,1)\,dt=-\int_0^1 2t\,dt=-1\,,$$

$$\int_{\mathbf{c}_2}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{1/2}(4t^2,-12t^2)\cdot(8t,8t)\,dt=-\int_0^{1/2}16t^3\,dt=-1\,,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big((1-t),-3(1-t)\big)\cdot(-1,-1)\,dt=\int_0^1 2(1-t)\,dt=1\ \text{[única distinta]}.$$

$$\int_{\mathbf{c}_4}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(0,t)\cdot(1,0)\,dt+\int_1^2(t-1,5-4t)\cdot(0,1)\,dt=\int_1^2(5-4t)\,dt=-1\,.$$

Veamos qué sucede en general con las integrales de campos vectoriales al parametrizarlas de un modo distinto. Se prueba que no cambia el valor absoluto, pero sí el signo:

Teor Si $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}_*$ describen la misma curva C, entonces según $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}_*$ lo hagan en el mismo sentido o en el opuesto se tiene, respectivamente:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{\mathbf{c}_*}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}\,,\quad\text{o bien}\quad\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=-\int_{\mathbf{c}_*}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}\,.$$

[Eso nos pasaba en los ejemplos 1 y 2 con $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$].

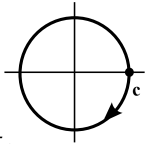
Ej 3. Todo es análogo en $\mathbf{R}^3$. Si $\mathbf{h}(x,y,z)=\big(zx^2,xy,y^3\big)$ y $\mathbf{c}(t)=\big(t,t^2,1\big)$, $t\in[0,1]$ es:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{h}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big(t^2,t^3,t^6\big)\cdot(1,2t,0)\,dt=\int_0^1\big(t^2+2t^4\big)\,dt=\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{5}=\tfrac{11}{15}\,.$$

Dos ejemplos más

Como **la integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva C y el sentido en que se recorre** (y la uno escalar sólo de C), podemos elegir las **c** más sencillas para calcularlas.

Ej 5. Tiene sentido preciso hablar de la integral de $\mathbf{f}(x,y)=(y,0)$ a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en sentido de las agujas del reloj.



[Las integrales sobre curvas cerradas suelen representarse de la forma $\oint$].

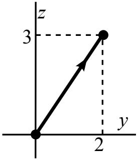
Podemos elegir $\mathbf{c}(t)=(\cos t,-\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$ (o $[-\pi,\pi]$, o...) ,

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen} t,0)\cdot(-\operatorname{sen} t,-\cos t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\pi\,.$$

Cualquier parametrización que proporcionase el mismo sentido nos daría a lo mismo.

[En cartesianas habría dos caminos: $\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$, $x\in[-1,1]$ y $\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right)$, $x\in[1,-1]$].

Ej 6. Calculemos la integral de línea del campo $\mathbf{g}(x,y,z)=\left(z,\mathrm{e}^y,xy\right)$ desde $(1,0,0)$ hasta $(1,2,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.



Hay muchas formas de parametrizar un segmento en el espacio. Para este, con $x=1$ constante, una **c** salta a la vista: $\mathbf{c}(t)=(1,2t,3t)$, $t\in[0,1]$.

Esta misma parametrización es la que nos daría la expresión dada en 1.1: $\mathbf{c}(t)=\mathbf{p}+(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,t$, $t\in[0,1]$ [si $t=0$ estamos en **p** y si $t=1$ en **q**].

Del dibujo de la derecha sale una distinta: $\mathbf{c}_*(y)=\left(1,y,\frac{3}{2}y\right)$, $y\in[0,2]$.

Calculemos ya la integral pedida con ambas parametrizaciones (debe salir lo mismo):

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\left(3t,\mathrm{e}^{2t},2t\right)\cdot(0,2,3)\,dt=\int_0^1\left(2\mathrm{e}^{2t}+6t\right)dt=\mathrm{e}^2+2\,.$$

$$\int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^2\left(\tfrac{3}{2}y,\mathrm{e}^{y},y\right)\cdot\left(0,1,\tfrac{3}{2}\right)dy=\int_0^2\left(\mathrm{e}^y+\tfrac{3}{2}y\right)dy=\mathrm{e}^2+2\,.$$

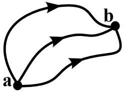
5.3. Integrales de gradientes

Generalizamos la sencilla fórmula de $\mathbf{R}$: $\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$.

Teor 1. Sea $U:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un campo escalar C^1 y $\mathbf{c}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ camino C^1 a trozos.
Entonces: $\int_{\mathbf{c}} \nabla U\cdot d\mathbf{s} = U\big(\mathbf{c}(b)\big) - U\big(\mathbf{c}(a)\big)$.

Si $\mathbf{c}\in C^1$ (si no, dividimos), $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt = \int_a^b (U\circ\mathbf{c})'(t)\,dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$.

Por tanto, **la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final**. Si vemos que un campo es un gradiente, la integral es muy sencilla. Cuando $\mathbf{c}(a)=\mathbf{c}(b)$, $\mathbf{c}$ define una curva cerrada e $\oint_{\mathbf{c}} \nabla U\cdot d\mathbf{s} = 0$: **la integral de línea de un gradiente sobre cualquier curva cerrada es** 0 .



Si un campo vectorial $\mathbf{f}$ es gradiente de alguna función U, a U se le llama **función potencial** para $\mathbf{f}$, y el campo $\mathbf{f}$ se dice **conservativo**.

¿Cómo saber si $\mathbf{f}$ es conservativo? Condiciones necesarias sencillas para $n=2$ y $n=3$ son:

Teor 2. Si $\mathbf{f}(x,y)=\big(f(x,y),g(x,y)\big)$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow f_y \equiv g_x$.
Si $\mathbf{f}(x,y,z)=\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow \operatorname{rot}\mathbf{f}=\mathbf{0}$.

Si $(f,g)=(U_x,U_y)=\nabla U$, con $U\in C^2$, debe ser $f_y\equiv g_x$, pues, como sabemos, $U_{xy}=U_{yx}$.
Y lo mismo para $n=3$. Ya vimos en 1.2 que el rotacional de un gradiente siempre era $\mathbf{0}$.

Pidiendo muy poco más las implicaciones opuestas se cumplen (aunque es difícil de demostrar):

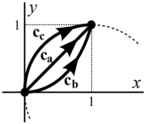
Teor 3. Si $\mathbf{f}$ es C^1 en todo $\mathbf{R}^2$ $\big[\,\mathbf{R}^3\,\big]$ y $f_y\equiv g_x$ $\big[\operatorname{rot}\mathbf{f}=\mathbf{0}\big] \Rightarrow \mathbf{f}$ es conservativo.

Cuando $\mathbf{f}$ es conservativo, muchas veces es sencillo hallar una U tal que $\nabla U=\mathbf{f}$ como aquí:

Ej 1. Sea $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,2xy)$. Hallemos la integral entre $(0,0)$ y $(1,1)$ sobre diferentes curvas:
a) la recta que une los puntos, b) la parábola $y=x^2$, c) la circunferencia $x^2+y^2=2x$.

Posibles parametrizaciones: a) $\mathbf{c_a}=(t,t)$, b) $\mathbf{c_b}=(t,t^2)$, c) $\mathbf{c_c}=\left(t,\sqrt{2t-t^2}\right)$, con $t\in[0,1]$.

Las integrales en cada caso son, respectivamente:



$$\int_0^1 (t^2,2t^2)\cdot(1,1)\,dt=\int_0^1 3t^2dt=1\,,\quad \int_0^1 (t^4,2t^3)\cdot(1,2t)\,dt=\int_0^1 5t^4dt=1\,,$$
$$\int_0^1 \left(2t-t^2,2t\sqrt{2t-t^2}\right)\cdot\left(1,\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}\right)dt=\int_0^1 (4t-3t^2)\,dt=1\,.$$

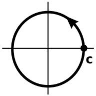
Como $\frac{\partial}{\partial y}(y^2)=2y=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)$ y $\mathbf{f}\in C^1$ existe potencial U . Y es fácil en este caso hallarlo:

Si $U_x=y^2$, debe ser $U=xy^2+p(y)$ para alguna función p
Si $U_y=2xy$, debe ser $U=xy^2+q(x)$ para alguna función q $\quad\Rightarrow\ U(x,y)=xy^2$.

Por tanto, las parametrizaciones y cálculos de integrales anteriores han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer $U(1,1)-U(0,0)=1-0=1$.

[El campo $(y,0)$ del ejemplo 5 de 5.2 no era conservativo. No podía serlo desde que vimos que su integral sobre un camino cerrado era no nula. Pero también lo asegura $f_y=1\neq 0=g_x$].

Ej 2. Integremos $\mathbf{f}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ a lo largo de $x^2+y^2=1$ en sentido antihorario.



Si $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$, $\oint_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}(-s,c)\cdot(-s,c)\,dt=2\pi$.

No hay ningún potencial C^1 que contenga la curva, aunque $f_y=g_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Además de coincidir sus derivadas, las f y g han de ser C^1.

Ej 3. Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(4x\,,3z-2y\,,3y)$ desde $(1\,,0\,,0)$ hasta $(1\,,2\,,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

En la sección anterior ya parametrizamos el segmento y podemos hallar la integral directamente:

$$\mathbf{c}(t)=(1,2t,3t)\,,\ t\in[0,1] \to \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1 (1,5t,6t)\cdot(0,2,3)\,dt=\int_0^1 28\,t\,dt=14\,.$$

Pero para este campo es $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4x & 3z-2y & 3y \end{vmatrix}=(3-3)\,\mathbf{i}+(0-0)\,\mathbf{j}+(0-0)\,\mathbf{k}=\mathbf{0}\,.$

y además $\mathbf{f}$ es C^1 en $\mathbf{R}^3$. Existe, por tanto, una función potencial $U(x,y,z)$ para el campo $\mathbf{f}$.

Debe ser
$$\begin{array}{l} U_x=4x \ \to\ U=2x^2+p(y,z) \\ U_y=3z-2y \ \to\ U=3yz-y^2+q(x,z) \\ U_z=3y \ \to\ U=3yz+r(x,y) \end{array}\ ,\quad U=2x^2+3yz-y^2 \ \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,2,3)-U(1,0,0)=16-2=14\,.$$

Este es el valor de la integral sobre cualquier camino que una los puntos, por complicado que sea.

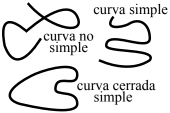
Por ejemplo, hallemos la integral a lo largo de $\mathbf{c}^*(t)=\left(\mathrm{e}^{t-t^2},\,2t^3,\,3t^2\right)\,,\ t\in[0,1]$:

$$\int_{\mathbf{c}^*} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1 \left(4\,\mathrm{e}^{t-t^2},9t^2-4t^3,6t^3\right)\cdot\left((1-2t)\,\mathrm{e}^{t-t^2},6t^2,6t\right)dt$$
$$=\int_0^1 \left(2(2-4t)\,\mathrm{e}^{2t-2t^2}+90t^4-24t^5\right)dt=2\,\mathrm{e}^{2t-2t^2}+18t^5-4t^6\Big]_0^1=14\,.$$

[El campo $\mathbf{g}$ del ejemplo 6 no era conservativo, por ser $\operatorname{rot}\mathbf{g}=(x,1-y,0)\neq\mathbf{0}$, y era necesario utilizar la definición para calcular la integral pedida].

Teorema de Green (relaciona una integral doble y una de linea)

Una **curva simple** será la imagen de una $\mathbf{c}:[a,b]\to\mathbf{R}^2$, C^1 a trozos e **inyectiva**. Si además es $\mathbf{c}(a)=\mathbf{c}(b)$, se llama **curva cerrada simple**. Una curva de estas puede recorrerse en dos sentidos opuestos; para indicar que se recorre en sentido antihorario indicaremos $\oint$.



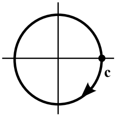
Teorema de Green:

> Sea $D\subset\mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple y el campo $\mathbf{f}=(f,g)\in C^1(D)$.
> Entonces $\iint_D [\,g_x-f_y\,]\,dx\,dy = \oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$.

[Obsérvese que si $\mathbf{f}$ es conservativo, el teorema de Green dice $0=\oint \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ como debía ser].

Ej 7. Hallemos, usando Green, el valor π de la integral de $\mathbf{f}(x,y)=(y,0)$ sobre la circunferencia unidad calculado ya en el ejemplo 5 de 5.2.
Como el sentido es el opuesto al que pide Green y $g_x-f_y=-1$ es:

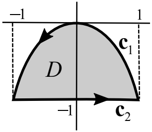
$$\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = -\iint_D(-1)\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy = \text{área de } D=\pi 1^2=\pi\ .$$



Ej 8. Comprobémoslo ahora para $\mathbf{f}(x,y)=(y,2x)$ en la región acotada por $y=-x^2$ e $y=-1$.

$g_x-f_y=1$ (luego $\iint_D$ medirá el área de la región y debe ser positiva).

La integral doble: $\iint_D[g_x-f_y]\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-x^2}dy\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=\frac{4}{3}$.



La frontera ∂D está formada por dos curvas:

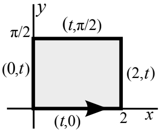
$$\mathbf{c}_1(x)=(x,-x^2)\ ,\ x\in[1,-1]\ ,\quad \mathbf{c}_2(x)=(x,-1)\ ,\ x\in[-1,1]\ \to$$

$$\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_1^{-1}(-x^2,2x)\cdot(1,-2x)\,dx + \int_{-1}^{1}(-1,2x)\cdot(1,0)\,dx = \int_{-1}^{1}5x^2\,dx - \int_{-1}^{1}dx = \frac{4}{3}\ .$$

Otro ejemplo de Green y teorema de la **divergencia**

Ej 10. Si $\mathbf{f}(x,y)=(e^x\operatorname{sen} y, e^{2x}\cos y)$ y $D=[0,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ hallemos $\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$.

La ∂D la forman ahora 4 curvas (segmentos sencillos) distintas:



$$\int_0^2 0\,dt+\int_0^{\pi/2}e^4\cos t\,dt-\int_0^2 e^t\,dt-\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt$$
$$=e^4\big[-\operatorname{sen} t\big]_0^{\pi/2}-\big[e^t\big]_0^2-\big[\operatorname{sen} t\big]_0^{\pi/2}=e^4-e^2\,.$$

Utilizando Green es bastante más corto: $g_x-f_y=2\,e^{2x}\cos y-e^x\cos y$,

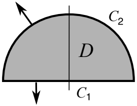
$$\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^2(2e^{2x}-e^x)\cos y\,dx\,dy=\big[\operatorname{sen} y\big]_0^{\pi/2}\big[e^{2x}-e^x\big]_0^2=e^4-e^2\,.$$

Del teorema de Green se deduce el **teorema de la divergencia en el plano**:

> Sean $D\subset\mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f}:D\to\mathbf{R}^2$ campo vectorial C^1, y $\mathbf{n}$ el vector normal unitario exterior a ∂D. Entonces $\iint_D \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,ds$.

Ej 12. Comprobemos este teorema para $\mathbf{f}(x,y)=(7,y^2-1)$ en el semicírculo $r\le 3$, $0\le\theta\le\pi$:

$\operatorname{div}\mathbf{f}=2y$, $\iint_D 2y\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\!\int_0^3 2r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta=36$.



Para C_1, $\mathbf{c}(x)=(x,0)$, $x\in[-3,3]$, $\mathbf{n}=(0,-1)$, $\int_{C_1}(1-y^2)\,ds=\int_{-3}^3 dx=6$.

Para C_2, $\mathbf{c}(t)=(3\cos t,3\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,\pi]$, $\|\mathbf{c}'(t)\|=3$.

Como $\mathbf{n}=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $\int_{C_2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,ds=3\int_0^{\pi}(7\cos t+9\operatorname{sen}^3 t-\operatorname{sen} t)dt=30$.