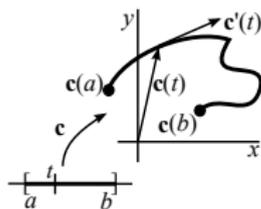
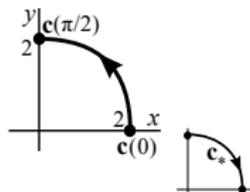


## 5. Integrales de línea. 5.1. De campos escalares

Una **función vectorial** (que también llamaremos **trayectoria** o **camino**) era una  $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , cuya gráfica era una **curva orientada**  $C$  en  $\mathbf{R}^n$  y  $\mathbf{c}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$  daba el vector tangente a la curva. Se dice  $\mathbf{c} \in C^1$  si es continua y  $\mathbf{c}'$  existe y es continua  $\forall t \in (a, b)$ . Será  $C^1$  a trozos si  $C$  es continua y se puede dividir  $[a, b]$  en un número finito de subintervalos siendo  $C^1$  en cada uno.



**Ej 1.**  $\mathbf{c}: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$  con  $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  es trayectoria  $C^1$  pues  $\mathbf{c}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$  existe  $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .



$\mathbf{c}_*: [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2$  con  $\mathbf{c}_*(t) = (t, \sqrt{4-t^2})$ ,  $\mathbf{c}'_*(t) = (1, -t(4-t^2)^{-1/2})$  es otro camino  $C^1$ , que describe esa misma curva (en sentido opuesto). Se dice que  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  son dos **parametrizaciones** de la misma curva  $C$ .

Hay dos tipos de integrales de línea: de campos **escalares** y de **vectoriales**. Comencemos con las **integrales de campos escalares a lo largo de curvas**:

Sea  $\mathbf{c}(t): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  camino  $C^1$  y sea  $f$  un campo escalar en  $\mathbf{R}^n$  tal que  $f(\mathbf{c}(t))$  es continua en  $[a, b]$ . La integral de  $f$  sobre  $\mathbf{c}$  (o a lo largo de  $\mathbf{c}$ ) se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Si  $\mathbf{c}$  es  $C^1$  a trozos o  $f(\mathbf{c}(t))$  continua a trozos, se divide  $[a, b]$  en intervalos sobre los que  $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$  sea continua y será  $\int_{\mathbf{c}} f ds$  la suma de las integrales.

## No dependen de la parametrización

**Ej 1\*.** Si  $f(x, y) = xy^2$  y  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}_*$  son los de antes, las integrales a lo largo de los dos caminos son:

$$\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2, \quad \int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_0^{\pi/2} 16 \cos t \sin^2 t \, dt = \frac{16}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}.$$

$$\|\mathbf{c}'_*\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{4-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}, \quad \int_{\mathbf{c}_*} f \, ds = \int_0^2 t(4-t^2) \frac{2}{\sqrt{4-t^2}} \, dt = -\frac{2}{3} (4-t^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Se prueba que:

**Teor** Si  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  describen la misma curva  $C$ , entonces  $\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_{\mathbf{c}_*} f \, ds \equiv \int_C f \, ds$ .

**La integral de línea de una  $f$  escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva** y es lícita la notación  $\int_C f \, ds$  (integral de  $f$  sobre  $C$ ) donde  $\mathbf{c}$  no aparece.

La raíz de la norma hace que el cálculo de estas integrales sea complicado (salvo para curvas sencillas) y no es raro que aparezcan integrales no calculables. [Con los campos vectoriales no ocurrirá esto]. Además de las circunferencias, también suelen ser fáciles sobre segmentos:

**Ej 2.** Calculemos la integral de la  $f(x, y) = xy^2$  ahora sobre el segmento que une  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$ .

Podemos parametrizarlo utilizando que pertenece a la recta  $y = 2 - x$ :

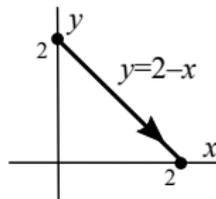
$$\mathbf{c}(x) = (x, 2-x), \quad x \in [0, 2]. \quad \|\mathbf{c}'(x)\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_0^2 \sqrt{2} x(2-x)^2 \, dx = \sqrt{2} \left[ 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \sqrt{2}.$$

O también con la expresión para los segmentos que conocemos desde 1.1:

$$\mathbf{c}_*(t) = (0, 2) + t(2, -2) = (2t, 2-2t), \quad t \in [0, 1] \quad [\text{doble velocidad}].$$

$$\|\mathbf{c}'_*(t)\| = 2\sqrt{2} \rightarrow \int_{\mathbf{c}_*} f \, ds = 16\sqrt{2} \int_0^1 t(1-t)^2 \, dt = 16\sqrt{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right] = \frac{4}{3} \sqrt{2} \quad [\text{debe salir lo mismo}].$$



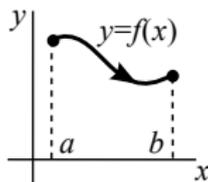
## Interpretaciones de estas integrales

Sea primero  $f \equiv 1$ . Si  $\mathbf{c}(t)$  describe una partícula, al ser  $\|\mathbf{c}'(t)\|$  la velocidad escalar,  $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt$  dará la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo  $dt$ ' y por tanto:

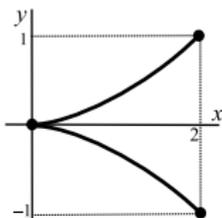
$$L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt \text{ representa la longitud de la curva } C \text{ definida por } \mathbf{c}.$$

Veamos como queda la fórmula para la gráfica de una función  $y=f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$ . Una parametrización clara es  $\mathbf{c}(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in [a, b]$ . Y como  $\mathbf{c}'(x) = (1, f'(x))$ , la longitud pasa a ser

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Fórmula análoga para } x=f(y). \\ \text{En general, integrales difíciles.} \end{array} \right]$$



**Ej 4.** Hallemos la longitud de la curva dada por la función vectorial  $\mathbf{c}(t) = (2t^2, t^3)$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

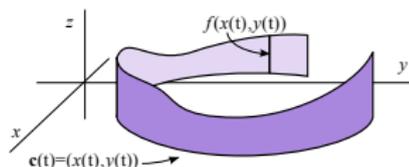


$$\mathbf{c}'(t) = (4t, 3t^2), \quad L = 2 \int_0^1 t \sqrt{16+9t^2} dt = \frac{2}{27} (16+9t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{122}{27} \approx 4.52.$$

O con la parametrización  $(2x, x^{3/2})$ ,  $x \in [0, 1]$  (y utilizando la simetría):

$$\Rightarrow L = 2 \int_0^1 \sqrt{4 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{2}{27} (16+9x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{27} [125 - 64].$$

Si  $f$  es un campo con  $f(\mathbf{c}(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ ,  $\int_C f ds$  representa si  $n=2$  el **área de la valla** de altura  $f(x, y)$  en cada  $(x, y)$  de la curva  $C$ , pues un 'diferencial de valla' tiene por área  $f(\mathbf{c}(t)) ds = f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$ .



**Ej 7.** Integremos  $f(x, y) = x - y$  sobre la curva  $C^1$  a trozos  $\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (0, 1-t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 0), & t \in [1, 2] \end{cases}$ .

Integramos sobre cada segmento y sumamos el resultado.

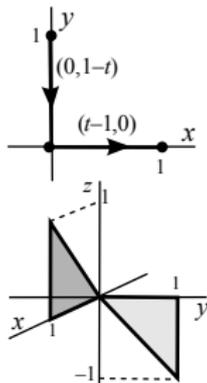
Sobre el vertical,  $f(\mathbf{c}_1(t)) = t - 1$ ,  $\|\mathbf{c}'_1(t)\| = \|(0, -1)\| = 1 \rightarrow$

$$\int_{\mathbf{c}_1} f \, ds = \int_0^1 (t-1) \, dt = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Sobre el otro,  $f(\mathbf{c}_2(t)) = t - 1$ ,  $\|\mathbf{c}'_2(t)\| = 1$ ,  $\int_{\mathbf{c}_2} f \, ds = \int_1^2 (t-1) \, dt = \frac{1}{2}$ .

La integral total es, por tanto:  $\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_{\mathbf{c}_1} + \int_{\mathbf{c}_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ .

[El área de la valla positiva sobre el eje de las  $x$  se cancela con el área de la valla negativa sobre el eje de las  $y$ ].



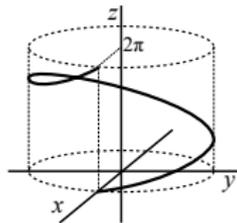
Otro significado de las integrales de línea de campos escalares: si  $\mathbf{c}(t)$  describe un **alambre** (en el plano o el espacio) **de densidad variable** dada por  $\sigma(\mathbf{x})$ , la **masa del alambre** será  $M = \int_C \sigma \, ds$ .

Un ejemplo de longitud y masa calculables exactamente en el espacio:

**Ej 8.** Sea el alambre en forma de hélice  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , y de densidad variable  $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

Como  $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{2}$ , su longitud es  $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.9$ .

Su masa:  $M = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \, dt = \sqrt{2} \left( 2\pi + \frac{8}{3} \pi^3 \right) \approx 125.8$ .



## 5.2. Integrales de campos vectoriales

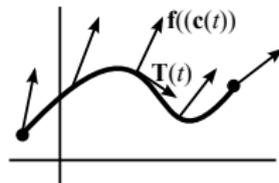
Sea  $\mathbf{c}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  de  $C^1$  y sea  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  campo vectorial continuo sobre la gráfica de  $\mathbf{c}$ . Entonces la integral de línea del campo  $\mathbf{f}$  a lo largo de  $\mathbf{c}$  se define

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt.$$

Si  $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$  es continua a trozos, se divide el intervalo y se suman las integrales.

Si  $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t$  y  $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$  es el vector tangente unitario:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds,$$
  
que se puede mirar como la integral del campo escalar  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$ ,  
componente tangencial de  $\mathbf{f}$  en la dirección de  $\mathbf{c}$ . Por tanto:



$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas  $\mathbf{f}$  sobre la partícula que recorre  $\mathbf{c}$ .

**Ej 1.** Calculemos varias integrales de línea de  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 2y+x)$  sobre distintos caminos:

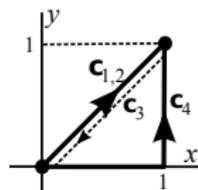
$$\mathbf{c}_1(t) = (t, t), t \in [0, 1], \quad \mathbf{c}_2(t) = (4t^2, 4t^2), t \in [0, \frac{1}{2}], \quad \mathbf{c}_3(t) = (1-t, 1-t), t \in [0, 1]$$

[describen la misma curva, la tercera en sentido contrario].

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, 3t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 (t^2 + 3t) dt = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}.$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (16t^4, 12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = 16 \int_0^{1/2} (8t^5 + 6t^3) dt = \frac{11}{6},$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t)^2, 3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 (-4 + 5t + t^2) dt = -\frac{11}{6}.$$



$$\mathbf{c}_4(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, 1] \\ (1, t-1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t^2, 2t-1) \cdot (0, 1) dt = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre. Incluso para algunos campos no dependerá siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final.

**Ej 2.** Hallemos la integrales para los mismos  $\mathbf{c}_k$ , pero ahora para el campo  $\mathbf{g}(x,y) = (y, x-4y)$  :

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -3t) \cdot (1, 1) dt = -\int_0^1 2t dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (4t^2, -12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = -\int_0^{1/2} 16t^3 dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t), -3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 2(1-t) dt = 1 \text{ [única distinta].}$$

$$\int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t-1, 5-4t) \cdot (0, 1) dt = \int_1^2 (5-4t) dt = -1.$$

Veamos qué sucede en general con las integrales de campos vectoriales al parametrizarlas de un modo distinto. Se prueba que no cambia el valor absoluto, pero sí el signo:

**Teor**

Si  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  describen la misma curva  $C$ , entonces según  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{c}_*$  lo hagan en el mismo sentido o en el opuesto se tiene, respectivamente:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \text{ o bien } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

[Eso nos pasaba en los ejemplos 1 y 2 con  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{c}_3$ ].

**Ej 3.** Todo es análogo en  $\mathbf{R}^3$ . Si  $\mathbf{h}(x, y, z) = (zx^2, xy, y^3)$  y  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1)$ ,  $t \in [0, 1]$  es:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, t^3, t^6) \cdot (1, 2t, 0) dt = \int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

Como la **integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva  $C$  y el sentido en que se recorre** (y la uno escalar sólo de  $C$ ), podemos elegir las  $\mathbf{c}$  más sencillas para calcularlas.

**Ej 5.** Tiene sentido preciso hablar de la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$  a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en sentido de las agujas del reloj.

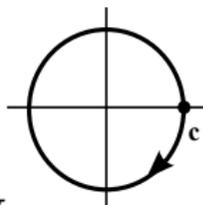
[Las integrales sobre curvas cerradas suelen representarse de la forma  $\oint$ ].

Podemos elegir  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, -\sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  (o  $[-\pi, \pi]$ , o...),

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi.$$

Cualquier parametrización que proporcionase el mismo sentido nos daría a lo mismo.

[En cartesianas habría dos caminos:  $(x, \sqrt{1-x^2})$ ,  $x \in [-1, 1]$  y  $(x, -\sqrt{1-x^2})$ ,  $x \in [1, -1]$ ].



**Ej 6.** Calculemos la integral de línea del campo  $\mathbf{g}(x, y, z) = (z, e^y, xy)$  desde  $(1, 0, 0)$  hasta  $(1, 2, 3)$  a lo largo del segmento que une los puntos.

Hay muchas formas de parametrizar un segmento en el espacio. Para este, con  $x=1$  constante, una  $\mathbf{c}$  salta a la vista:  $\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Esta misma parametrización es la que nos daría la expresión dada en 1.1:

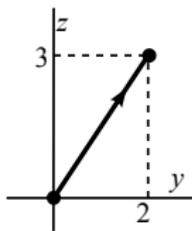
$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p} + (\mathbf{q} - \mathbf{p})t$ ,  $t \in [0, 1]$  [si  $t=0$  estamos en  $\mathbf{p}$  y si  $t=1$  en  $\mathbf{q}$ ].

Del dibujo de la derecha sale una distinta:  $\mathbf{c}_*(y) = (1, y, \frac{3}{2}y)$ ,  $y \in [0, 2]$ .

Calculemos ya la integral pedida con ambas parametrizaciones (debe salir lo mismo):

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (3t, e^{2t}, 2t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 (2e^{2t} + 6t) dt = e^2 + 2.$$

$$\int_{\mathbf{c}_*} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 (\frac{3}{2}y, e^y, y) \cdot (0, 1, \frac{3}{2}) dy = \int_0^2 (e^y + \frac{3}{2}y) dy = e^2 + 2.$$



## Integrales de gradientes

Generalizamos la sencilla fórmula de  $\mathbf{R}$ :  $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$ .

**Teor.** Sea  $U: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  un campo escalar  $C^1$  y  $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  camino  $C^1$  a trozos.  
Entonces:  $\int_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ .

Si  $\mathbf{c} \in C^1$  (si no, dividimos),  $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b (U \circ \mathbf{c})'(t) dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$ .

Por tanto, **la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final**. Si vemos que un campo es un gradiente, la integral es muy sencilla. Cuando  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ ,  $\mathbf{c}$  define una curva cerrada e  $\oint_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = 0$ : **la integral de línea de un gradiente sobre cualquier curva cerrada es 0**.



Si un campo vectorial  $\mathbf{f}$  es gradiente de alguna función  $U$ , a  $U$  se le llama **función potencial** para  $\mathbf{f}$ , y el campo  $\mathbf{f}$  se dice **conservativo**.

¿Cómo saber si  $\mathbf{f}$  es conservativo? Condiciones necesarias sencillas para  $n=2$  y  $n=3$  son:

**Teor.** Si  $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  de  $C^1$  es conservativo  $\Rightarrow f_y \equiv g_x$ .  
Si  $\mathbf{f}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$  de  $C^1$  es conservativo  $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ .

Si  $(f, g) = (U_x, U_y) = \nabla U$ , con  $U \in C^2$ , debe ser  $f_y \equiv g_x$ , pues, como sabemos,  $U_{xy} = U_{yx}$ .  
Y lo mismo para  $n=3$ . Ya vimos en 1.2 que el rotacional de un gradiente siempre era  $\mathbf{0}$ .

Pidiendo muy poco más las implicaciones opuestas se cumplen (aunque es difícil de demostrar):

**Teor.** Si  $\mathbf{f}$  es  $C^1$  en todo  $\mathbf{R}^2$  [ $\mathbf{R}^3$ ] y  $f_y \equiv g_x$  [ $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ ]  $\Rightarrow \mathbf{f}$  es conservativo.

## Ejemplos sobre campos conservativos

Cuando  $\mathbf{f}$  es conservativo, muchas veces es sencillo hallar una  $U$  tal que  $\nabla U = \mathbf{f}$  como aquí:

**Ej 8.** Sea  $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2xy)$ . Hallemos la integral entre  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  sobre diferentes curvas:

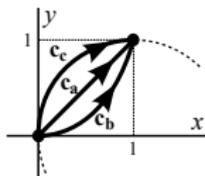
a) la recta que une los puntos, b) la parábola  $y = x^2$ , c) la circunferencia  $x^2 + y^2 = 2x$ .

Posibles parametrizaciones: a)  $\mathbf{c}_a = (t, t)$ , b)  $\mathbf{c}_b = (t, t^2)$ , c)  $\mathbf{c}_c = (t, \sqrt{2t - t^2})$ , con  $t \in [0, 1]$ .

Las integrales en cada caso son, respectivamente:

$$\int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1, \quad \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 5t^4 dt = 1,$$

$$\int_0^1 (2t - t^2, 2t\sqrt{2t - t^2}) \cdot \left(1, \frac{1-t}{\sqrt{2t - t^2}}\right) dt = \int_0^1 (4t - 3t^2) dt = 1.$$



Como  $\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$  y  $\mathbf{f} \in C^1$  existe potencial  $U$ . Y es fácil en este caso hallarlo:

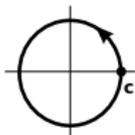
Si  $U_x = y^2$ , debe ser  $U = xy^2 + p(y)$  para alguna función  $p \Rightarrow U(x, y) = xy^2$ .

Si  $U_y = 2xy$ , debe ser  $U = xy^2 + q(x)$  para alguna función  $q$

Por tanto, las parametrizaciones y cálculos de integrales anteriores han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer  $U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1$ .

[El campo  $(y, 0)$  del ejemplo 5 no era conservativo. No podía serlo desde que vimos que su integral sobre un camino cerrado era no nula. Pero también lo asegura  $f_y = 1 \neq 0 = g_x$ ].

**Ej 9.** Integremos  $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$  a lo largo de  $x^2 + y^2 = 1$  en sentido antihorario.



Si  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi$ .

No hay ningún potencial  $C^1$  que contenga la curva, aunque  $f_y = g_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ .

Además de coincidir sus derivadas, las  $f$  y  $g$  han de ser  $C^1$ .

**Ej 6\*.** Calculemos la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (4x, 3z - 2y, 3y)$  desde  $(1, 0, 0)$  hasta  $(1, 2, 3)$  a lo largo del segmento que une los puntos.

En la sección anterior ya parametrizamos el segmento y podemos hallar la integral directamente:

$$\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t), \quad t \in [0, 1] \rightarrow \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (1, 5t, 6t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 28t dt = 14.$$

Pero para este campo es  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4x & 3z-2y & 3y \end{vmatrix} = (3-3)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (0-0)\mathbf{k} = \mathbf{0}$ .

y además  $\mathbf{f}$  es  $C^1$  en  $\mathbf{R}^3$ . Existe, por tanto, una función potencial  $U(x, y, z)$  para el campo  $\mathbf{f}$ .

$$U_x = 4x \rightarrow U = 2x^2 + p(y, z)$$

Debe ser  $U_y = 3z - 2y \rightarrow U = 3yz - y^2 + q(x, z)$ ,  $U = 2x^2 + 3yz - y^2 \Rightarrow$

$$U_z = 3y \rightarrow U = 3yz + r(x, y) \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U(1, 2, 3) - U(1, 0, 0) = 16 - 2 = 14.$$

Este es el valor de la integral sobre cualquier camino que una los puntos, por complicado que sea.

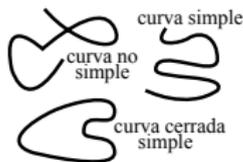
Por ejemplo, hallemos la integral a lo largo de  $\mathbf{c}^*(t) = (e^{t-t^2}, 2t^3, 3t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}^*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 (4e^{t-t^2}, 9t^2 - 4t^3, 6t^3) \cdot ((1-2t)e^{t-t^2}, 6t^2, 6t) dt \\ &= \int_0^1 (2(2-4t)e^{2t-2t^2} + 90t^4 - 24t^5) dt = 2e^{2t-2t^2} + 18t^5 - 4t^6 \Big|_0^1 = 14. \end{aligned}$$

[El campo  $\mathbf{g}$  del ejemplo 6 no era conservativo, por ser  $\operatorname{rot} \mathbf{g} = (x, 1-y, 0) \neq \mathbf{0}$ , y era necesario utilizar la definición para calcular la integral pedida].

### 5.3. Teorema de Green (relaciona una integral doble y una de línea)

Una **curva simple** será la imagen de una  $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $C^1$  a trozos e **inyectiva**. Si además es  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ , se llama **curva cerrada simple**. Una curva de estas puede recorrerse en dos sentidos opuestos; para indicar que se recorre en sentido antihorario indicaremos  $\oint$ .



#### Teorema de Green:

Sea  $D \subset \mathbf{R}^2$  limitado por  $\partial D$  curva cerrada simple y el campo  $\mathbf{f} = (f, g) \in C^1(D)$ .

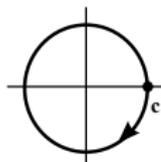
$$\text{Entonces } \iint_D [g_x - f_y] dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

[Obsérvese que si  $\mathbf{f}$  es conservativo, el teorema de Green dice  $0 = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  como debía ser].

**Ej 1.** Hallemos, usando Green, el valor  $\pi$  de la integral de  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$  sobre la circunferencia unidad calculado ya en el ejemplo 5 de 5.2.

Como el sentido es el opuesto al que pide Green y  $g_x - f_y = -1$  es:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_D (-1) dx dy = \iint_D dx dy = \text{área de } D = \pi 1^2 = \pi.$$



**Ej 3.** Comprobémoslo ahora para  $\mathbf{f}(x, y) = (y, 2x)$  en la región acotada por  $y = -x^2$  e  $y = -1$ .

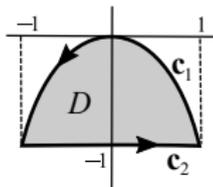
$g_x - f_y = 1$  (luego  $\iint_D$  medirá el área de la región y debe ser positiva).

$$\text{La integral doble: } \iint_D [g_x - f_y] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-x^2} dy dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

La frontera  $\partial D$  está formada por dos curvas:

$$\mathbf{c}_1(x) = (x, -x^2), x \in [1, -1], \quad \mathbf{c}_2(x) = (x, -1), x \in [-1, 1] \rightarrow$$

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^{-1} (-x^2, 2x) \cdot (1, -2x) dx + \int_{-1}^1 (-1, 2x) \cdot (1, 0) dx = \int_{-1}^1 5x^2 dx - \int_{-1}^1 dx = \frac{4}{3}.$$



## Otro ejemplo de Green y teorema de la **divergencia**

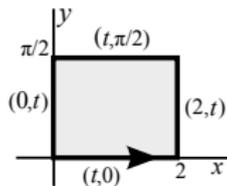
**Ej 6.** Si  $\mathbf{f}(x, y) = (e^x \sin y, e^{2x} \cos y)$  y  $D = [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$  hallemos  $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ .

La  $\partial D$  la forman ahora 4 curvas (segmentos sencillos) distintas:

$$\begin{aligned} \int_0^2 0 dt + \int_0^{\pi/2} e^4 \cos t dt - \int_0^2 e^t dt - \int_0^{\pi/2} \cos t dt \\ = e^4 [-\sin t]_0^{\pi/2} - [e^t]_0^2 - [\sin t]_0^{\pi/2} = e^4 - e^2. \end{aligned}$$

Utilizando Green es bastante más corto:  $g_x - f_y = 2e^{2x} \cos y - e^x \cos y$ ,

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2e^{2x} - e^x) \cos y dx dy = [\sin y]_0^{\pi/2} [e^{2x} - e^x]_0^2 = e^4 - e^2.$$



Del teorema de Green se deduce el **teorema de la divergencia en el plano**:

Sean  $D \subset \mathbf{R}^2$  limitado por  $\partial D$  curva cerrada simple,  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbf{R}^2$  campo vectorial  $C^1$ , y  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario exterior a  $\partial D$ . Entonces  $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{f} dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds$ .

**Ej 8.** Comprobemos este teorema para  $\mathbf{f}(x, y) = (7, y^2 - 1)$  en el semicírculo  $r \leq 3$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 2y, \quad \iint_D 2y dx dy = \int_0^\pi \int_0^3 2r^2 \sin \theta dr d\theta = 36.$$

Para  $C_1$ ,  $\mathbf{c}(x) = (x, 0)$ ,  $x \in [-3, 3]$ ,  $\mathbf{n} = (0, -1)$ ,  $\int_{C_1} (1 - y^2) ds = \int_{-3}^3 dx = 6$ .

Para  $C_2$ ,  $\mathbf{c}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ ,  $\|\mathbf{c}'(t)\| = 3$ .

$$\text{Como } \mathbf{n} = (\cos t, \sin t), \quad \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = 3 \int_0^\pi (7 \cos t + 9 \sin^3 t - \sin t) dt = 30.$$

