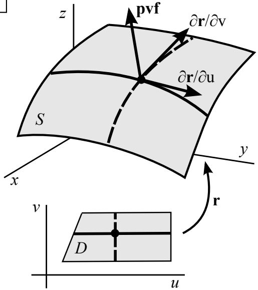
Integrales de superficie. 6.1 Definición y cálculo

Generalizamos las integrales de línea (de campos escalares y vectoriales). Una **superficie** a veces viene dada por $F(x,y,z)=0$. Si se puede despejar la z, por $z=f(x,y)$. Pero lo más general es que se puede describir **paramétricamente** (aquí en función de 2 parámetros) mediante:

$$\boxed{\mathbf{r}: D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3\text{, con }\mathbf{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\,,\ (u,v)\in D}$$



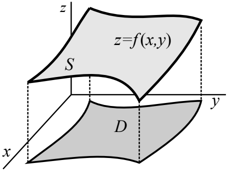
Suponemos que la superficie $S=\mathbf{r}(D)$ es C^1 [que lo es $\mathbf{r}$]. Entonces:

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k}}\ \text{ y }\ \boxed{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}}$$

serán vectores tangentes a las curvas contenidas en S que se obtienen tomando, respectivamente, $v=k$ y $u=k$. Su producto vectorial

producto vectorial fundamental $$\boxed{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$ es **vector normal** a S.

[Y al plano tangente, si es $\neq\mathbf{0}$].



Cuando la superfice está escrita en la forma $z=f(x,y)$ una parametrización posible de S es $\mathbf{r}(x,y)=\big(x,y,f(x,y)\big)$, con $(x,y)\in D$ proyección de S sobre $z=0$. El producto vectorial fundamental queda en este caso:

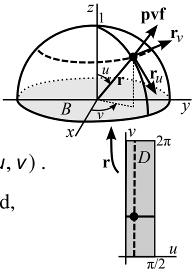
$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&f_x\\0&1&f_y\end{vmatrix}=\boxed{\big(-f_x\,,-f_y\,,1\big)}\,.$$

Ej 1a. Parametricemos la semisuperficie esférica unidad superior. Una posibilidad:

$$\begin{array}{l} x(u,v)=\operatorname{sen} u\,\cos v \\ y(u,v)=\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v \\ z(u,v)=\cos u \end{array} \quad \begin{array}{l} u\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ v\in[0,2\pi] \end{array}, \quad \begin{array}{l} \mathbf{r}_u=\cos u\cos v\,\mathbf{i}+\cos u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j}-\operatorname{sen} u\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_v=-\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v\,\mathbf{i}+\operatorname{sen} u\cos v\,\mathbf{j} \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ cc & cs & -s \\ -ss & sc & 0 \end{vmatrix}=\operatorname{sen}^2 u\cos v\,\mathbf{i}+\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j}+\operatorname{sen} u\cos u\,\mathbf{k}$$

$$=\operatorname{sen} u(\operatorname{sen} u\cos v,\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v,\cos u)=\operatorname{sen} u\,\mathbf{r}(u,v)\,.$$



O podemos parametrizarla: $\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\,\right)$, con $(x,y)\in B$ círculo unidad,

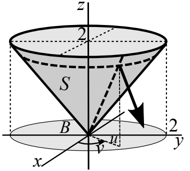
que nos proporciona este otro **pvf**: $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathbf{i}+\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Ej 2. $\begin{array}{l} x=u\cos v \\ y=u\operatorname{sen} v \\ z=u \end{array} \quad \begin{array}{l} u\in[0,2] \\ v\in[0,2\pi] \end{array}$ Por ser $x^2+y^2=z^2$, nos da la superficie cónica de la derecha, comprendida entre $z=0$ y $z=2$.

[$v=k$ sigue una recta y $u=k$ una circunferencia].

El **pfv** es $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & s & 1 \\ -us & uc & 0 \end{vmatrix}=(-u\cos v,-u\operatorname{sen} v,u)$.

[Para $u=0$ el **pvf** $=\mathbf{0}$ y en ese punto no hay plano tangente]. sentido opuesto al del dibujo $\longrightarrow$

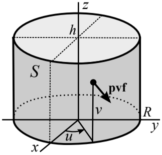


De otra forma: $\mathbf{r}(x,y)=\left(x,y,\sqrt{x^2+y^2}\,\right)$, con $(x,y)\in B$ círculo de radio 2.

Ahora el producto vectorial fundamental $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$.

Ej 3. $\begin{array}{l} x=R\cos u \\ y=R\operatorname{sen} u \\ z=v \end{array} \quad \begin{array}{l} u\in[0,2\pi] \\ v\in[0,h] \end{array}$ Superficie cilíndrica de radio R (pues $x^2+y^2=R^2$) y altura h.

$$\mathbf{r}_u=(-R\operatorname{sen} u,R\cos u,0),\ \mathbf{r}_v=(0,0,1)\longrightarrow\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=R(\cos u,\operatorname{sen} u,0)\,.$$

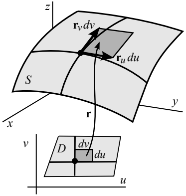


Integrales de superficie de campos escalares

$$\boxed{\text{Sea } S \text{ la superficie } C^1 \text{ dada por } \mathbf{r}: D\subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \text{ inyectiva y sea } f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \text{ tal que } f(\mathbf{r}(u,v)) \text{ es continua. Entonces: } \iint_S f\,dS \equiv \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\,\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|du\,dv\,.}$$

La notación $\iint_S f\,dS$ es inequívoca pues también se prueba que **sólo depende de la superficie** y no de la parametrización la integral de una f escalar. Si S la forman varias superficies C^1 se suman las integrales.

Si $f\equiv 1$ la integral es el **área** de la superficie S: $\boxed{A=\iint_S dS=\iint_D \|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,du\,dv}$.



[Pues un rectangulo $du\,dv$ de D da lugar a un diferencial de superficie dS igual aproximadamente al rectángulo dado por los vectores $\mathbf{r}_u\,du$ y $\mathbf{r}_v\,dv$, cuyo área es el módulo de su producto vectorial].

Para una superficie $z=f(x,y)$ queda $A=\iint_D \sqrt{(f_x)^2+(f_y)^2+1}\;dx\,dy$.

Ej 1b. Hallemos la integral de $f(x,y,z)=z^2$ sobre la semisuperficie esférica S del ejemplo 1a.

Con $\mathbf{r}(u,v)=(\operatorname{sen}u\cos v,\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v,\cos u)$. $\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|=|\operatorname{sen}u|\,\|\mathbf{r}\|=\operatorname{sen}u$ [$\mathbf{r}$ es unitario y $\operatorname{sen}u\geq 0$].

Por tanto, $\iint_S z^2\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\operatorname{sen}u\,du\,dv=-\frac{2\pi}{3}\left[\cos^3 u\right]_0^{\pi/2}=\frac{2\pi}{3}$.

Con $(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ resulta ser: $\|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y\|=\left[\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}+1\right]^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\Rightarrow$

$$\iint_S z^2\,dS=\iint_B\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy\underset{\text{polares}\uparrow}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta=\frac{2\pi}{3}\left[-(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1=\frac{2\pi}{3}.$$

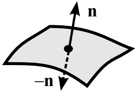
La integral da bien el **área** de S: $A=\iint_S 1\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}u\,du\,dv=2\pi$ [el de toda la superficie esférica era $4\pi\cdot 1^2$].

Integrales de superficie de campos vectoriales

Sea S la superficie de C^1 dada por $\mathbf{r}: D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ inyectiva y sea $\mathbf{f}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ continua sobre S. Entonces: $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_D \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\big)\,du\,dv$.

Esta integral, si $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la S con el mismo sentido que el producto vectorial fundamental, se puede poner de otra forma que a veces simplifica cálculos y además clarifica el significado físico de este tipo de integrales, el **flujo** del campo vectorial **f a través de la superficie** S:

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\mathbf{n}(u,v)\,\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\,du\,dv = \iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS\,.$$



Se prueba que, **salvo el signo**, esta integral **es independiente de la parametrización**.

Hay dos unitarios normales a una superficie orientada $\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$ (que conste que las hay no orientadas como la banda de Moebius). Parametrizaciones distintas dan **pvf** con el sentido de uno u otro. Si son el mismo, las integrales serán iguales. Si no, tendrán el signo opuesto. $\mathbf{f}$, S y el sentido de la normal sí determinan la integral. Más preciso sería pues escribir $\iint_{\mathbf{r}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$.

Ej 1c. Integremos $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,z)$ sobre la semisuperficie esférica S del 1ab, con los **r** de siempre.

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{r}(u,v)\cdot\big[\operatorname{sen} u\,\mathbf{r}(u,v)\big]\,du\,dv \underset{\mathbf{r}\text{ unitario}\uparrow}{=} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} u\,du\,dv = 2\pi\big[-\cos u\big]_0^{\pi/2} = 2\pi\,.$$

Con la otra parametrización: $\mathbf{f}\cdot(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y) = \big(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\,\big)\cdot\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,,\,\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\Big) \Rightarrow$

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S} = \iint_B \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2}\,dr\,d\theta = 2\pi\big[-(1-r^2)^{1/2}\big]_0^1 = 2\pi\,.$$

Las integrales coinciden porque el **pvf** apuntaba en ambos casos hacia el exterior de la esfera. Y el valor es positivo porque el campo $\mathbf{f}$ tiene también esa dirección (y así el flujo debe serlo).

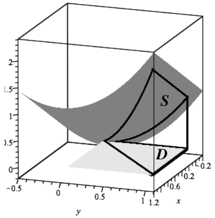
Ej 2*. Integremos la $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,z)$ de antes, ahora sobre la superficie cónica S del ejemplo 2.

Teníamos: $\mathbf{r}=(u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v, u)$, $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(-u\cos v\,,\,-u\,\mathrm{sen}\,v\,,\,u)$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,2]$.

Por lo tanto: $\mathbf{f}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)=(u\cos v, u\,\mathrm{sen}\,v, u)\cdot(-u\cos v,-u\,\mathrm{sen}\,v,u)=-u^2+u^2=0$.

Así pues: $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=0$. [Este campo era tangente a nuestro cono y el flujo debía ser nulo].

Ej 4. Sea S la porción de la superficie $z=x+y^2$ sobre el triángulo D dado por $0\le y\le 1$ y $0\le x\le y$. Primero hallamos su área e $\iint_S (z-x)\,dS$.



$$\mathbf{r}(x,y)=\big(x,y,x+y^2\big)\ \longrightarrow\ \mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=(-f_x,-f_y,1)=(-1,-2y,1)\ \longrightarrow$$

$$A=\iint_D\|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y\|\,dx\,dy=\int_0^1\!\!\int_0^y\sqrt{4y^2+2}\,dx\,dy=\int_0^1 y\sqrt{4y^2+2}\,dy=\underbrace{\frac{3\sqrt6-\sqrt2}{6}}_{\approx 0.99}\,.$$

[La presencia de la raíz muchas veces, no aquí, lleva a integrales complicadas o no calculables].

$$\iint_S (z-x)\,dS=\iint_D y^2\,\|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y\|\,dx\,dy=\int_0^1 y^2y\sqrt{4y^2+2}\,dy$$

$$\overset{4y^2+2=u}{=}\frac{1}{32}\int_2^6(u-2)\sqrt{u}\,du=\tfrac{1}{32}\Big[\tfrac25u^{5/2}-\tfrac43u^{3/2}\Big]_2^6=\tfrac15\sqrt6+\tfrac{1}{30}\sqrt2\approx 0.54\,.$$

Calculamos ahora $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$ para el campo $\mathbf{f}(x,y,z)=(2z,y,1)$. La integral resulta ser:

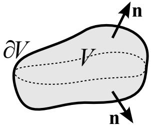
$$\iint_D(2x+2y^2,y\,,1)\cdot(-1,-2y,1)\,dx\,dy=\int_0^1\!\!\int_0^y(1-2x)\,dx\,dy=\int_0^1\big(y-y^2\big)\,dy=\tfrac16\,.$$

[Integrando campos vectoriales no aparecen las raíces que pueden dar problemas con los escalares].

Teorema de la divergencia en el espacio (o de Gauss-Ostrogradsky)

Sea V región acotada del espacio cuya frontera ∂V es una superficie conexa, $\mathbf{n}$ el vector normal unitario exterior a V y sea $\mathbf{f}$ de C^1 en V. Entonces:

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS\,.$$



[La segunda integral es $\iint_{\partial V}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}$ si el producto vectorial fundamental apunta hacia el exterior].

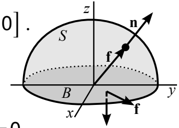
Ej 1. Comprobemos el teorema para $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,z)$ y V la famosa semiesfera de la sección 6.1.

Por una parte: $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_V dx\,dy\,dz = 3\times$ volumen de $V = 3\times\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3 = 2\pi$.

Por otra, la ∂V se compone de dos partes, la S superior y el círculo B de la base.

En S es $\mathbf{n}=\mathbf{f}=\mathbf{r}$ [$\to \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}=1$] y en B es $\mathbf{n}=-\mathbf{k}$ $\left[\to \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}=(x,y,0)\cdot(0,0,-1)=0\right]$.

Por tanto, $\iint_{\partial V}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S 1\,dS + \iint_B 0\,dS =$ área de $S = 2\pi$.



Esto resultó demasiado sencillo. Sea ahora $\mathbf{g}(x,y,z)=(xy,z,1)$ en la misma V .

$\operatorname{div}\mathbf{g}=y$, $\iiint_V y = \int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi/2}\!\int_0^1 \rho^3 \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{1}{4}\left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} s^2 = 0$.

$\uparrow y$ impar en V simétrico

Si $\mathbf{r}(\phi,\theta)=(\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\cos\phi)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\phi\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta = \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{r}(\phi,\theta)$.

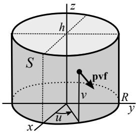
$$\iint_S \mathbf{g}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\left(\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\operatorname{sen}\theta,\cos\phi,1\right)\cdot(\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\cos\phi)\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\!\int_0^{\pi/2}\left(\operatorname{sen}^4\phi\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\phi\cos\phi\right)d\phi\,d\theta = \pi\left[\operatorname{sen}^2\phi\right]_0^{\pi/2} = \pi\,.$$

En B es $\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} = (xy,0,1)\cdot(0,0,-1) = -1$, luego $\iint_B \mathbf{g}\cdot\mathbf{n}\,dS = -$ área de $S = -\pi \ \to\ \iint_{\partial V} = 0$.

Ej 2. Para el campo $\mathbf{f}(x,y,z)=\left(-x,0,z^3\right)$ y V el cilindro del ejemplo 3 de 6.1 de superficie lateral S:

$\mathbf{r}=(R\cos u, R\,\mathrm{sen}\,u, v)$, $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(R\cos u, R\,\mathrm{sen}\,u, 0)$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,h]$.



Sumamos $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\int_0^h\int_0^{2\pi}\left(-R\cos u,0,v^3\right)\cdot(R\cos u,R\,\mathrm{sen}\,u,0)\,du\,dv$

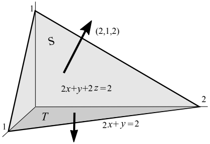
$$=-R^2\int_0^h\int_0^{2\pi}\cos^2 u\,du=-\frac{R^2h}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2u)\,du=-\pi R^2h$$

y las integrales sobre las tapas. Abajo es: $\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}=(-x,0,0)\cdot(0,0,-1)=0$. Arriba:

$\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}=(-x,0,h^3)\cdot(0,0,1)=h^3\to\iint_{B_R}h^3=\pi R^2h^3$. Así pues, $\iint_{\partial V}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\pi R^2\left(h^3-h\right)$.

Por otra parte es $\mathrm{div}\,\mathbf{f}=3z^2-1$, $\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{f}=\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h r\left(3z^2-1\right)dz\,dr\,d\theta=2\pi\frac{R^2}{2}\left(h^3-h\right)$.

Ej 5. Ahora $\mathbf{f}(x,y,z)=(0,xy,-1)$ y V limitado por el plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,1)$ y por los planos coordenados.



No es difícil dar el plano: $2x+y+2z=2$. Y como $\mathrm{div}\,\mathbf{f}=x$ la integral triple:

$$\iiint_V x=\int_0^1\int_0^{2(1-x)}\int_0^{1-x-y/2}x\,dz\,dy\,dx=\cdots=\int_0^1 x(1-x)^2\,dx=\frac{1}{12}\,.$$

Habría que calcular el flujo sobre los 4 triángulos que forman ∂V en la dirección de sus **n** exteriores. Pero en $x=0$ e $y=0$ es $\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}=0$ pues $\mathbf{f}=(0,0,-1)$ y las **n** son $(-1,0,0)$ y $(0,-1,0)$. El flujo es 0 . Sobre T es $\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}=(0,0,-1)\cdot(0,0,-1)=1$, con lo que $\iint_T 1=$ área de $T=1$ (base 1 y altura 2).

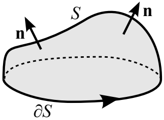
Sólo usamos integrales para el S dado por: $\mathbf{r}(x,y)=\left(x,y,1-x-\frac{y}{2}\right)$, $(x,y)\in T$. $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\left(1,\frac{1}{2},1\right)$.

$$\iint_T(0,xy,-1)\cdot\left(1,\tfrac{1}{2},1\right)dx\,dy=\int_0^1\int_0^{2(1-x)}\left(\frac{xy}{2}-1\right)dy\,dx=\int_0^1\left[x(1-x)^2-2(1-x)\right]dx=\frac{1}{12}-1\,.$$

El flujo total sobre ∂V , sumando las dos integrales no nulas, es $1+\frac{1}{12}-1=\frac{1}{12}$ como debía.

Teorema de Stokes

Sean S una superficie en el espacio limitada por la curva ∂S y $\mathbf{f} \in C^1$ en S. Entonces: $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$, con **n** vector unitario normal a S y los sentidos de **n** y de recorrido de ∂S indicados en el dibujo.



[Caminando por la ∂S, la superficie quedará a nuestra izquierda y la normal apunta de los pies a la cabeza. Estamos suponiendo con esto que nuestra superficie es orientable para poderlo afirmar].

$\Big[$Podríamos alternativamente escribir $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ si la **r** que utilizamos da el sentido de **n** adecuado$\Big]$.

$\Big[$Cuando S es una región del plano xy es $\mathbf{n} = (0,0,1)$, con lo que $\operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = g_x - f_y$, y $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ se reduce a $f\,dx + g\,dy$. El teorema de Stokes pasa a convertirse en el de Green. Y como sucedía allí, para un campo conservativo las dos integrales son nulas, por anularse el rotacional y por ser ∂S un camino cerrado$\Big]$.

Ej 1*. Comprobamos Stokes para $\mathbf{g}(x,y,z) = (0,0,y)$, y la semiesfera S habitual.

Es $\operatorname{rot} \mathbf{g} = \mathbf{i}$ $\big[\Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (1,0,0) \cdot (x,y,z) = x\big]$. Entonces:

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S x\, dS = \int_0^{2\pi} \cos v\, dv \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 u\, du = 0 \quad \text{[la primera integral lo es].}$$

La integral también se puede hacer: $\iint_B \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 (1-r^2)^{-1/2} \cos\theta\, dr\, d\theta = 0$.

Una parametrización de ∂S es $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = (0,0,\operatorname{sen} t)$.

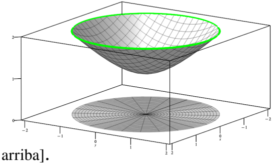
Así pues, $\oint_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (0,0,\operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$, como debía ser.

[La integral de línea sobre la circunferencia se anuló, a pesar de no ser $\mathbf{g}$ conservativo, por ser $\mathbf{g}$ y $\mathbf{c}'$ ortogonales. Sobre otras curvas cerradas, la integral será no nula. Dijimos que para ser conservativo, su integral a lo largo de **todo camino cerrado** debía ser cero].

Ejemplo verificando Stokes

Ej 7. Lo hacemos para $\mathbf{g}(x,y,z)=(x+y,2x,z)$ y el hiperboloide $z^2=1+x^2+y^2$, con $1\le z\le 2$.

$$\operatorname{rot}\mathbf{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ x+y&2x&z\end{vmatrix}=(0,0,1)\,.$$ Parametrizamos la superficie.



La más simple: $\mathbf{r}(r,\theta)=\big(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{1+r^2}\,\big)$, $\begin{array}{l}\theta\in[0,2\pi]\,,\\ r\in\big[0,\sqrt{3}\,\big]\,.\end{array}$

Para ella es: $\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ c&s&r/\sqrt{\cdot\cdot}\\ -rs&rc&0\end{vmatrix}=\big(-\frac{c}{\sqrt{\cdot\cdot}}r^2,-\frac{s}{\sqrt{\cdot\cdot}}r^2,r\big)$ [apunta hacia arriba].

El flujo en el sentido del teorema será: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\sqrt{3}}(0,0,1)\cdot(\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta)\,dr\,d\theta=\pi\big[r^2\big]_0^{\sqrt{3}}=3\pi$.

Trabajando en cartesianas también salen cálculos cortos:

$\mathbf{r}(x,y)=\big(x,y,\sqrt{1+x^2+y^2}\,\big)$, $(x,y)\in B$ círculo centrado de radio $\sqrt{3}$. $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=\big(-\frac{x}{\sqrt{\cdot\cdot}},-\frac{y}{\sqrt{\cdot\cdot}},1\big)$.

Y ahora será: $\displaystyle\iint_S\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\iint_B(0,0,1)\cdot(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y)\,dx\,dy=\iint_B 1=$ área de $B=3\pi$.

Para comprobar Stokes parametrizamos la ∂S en el sentido adecuado:

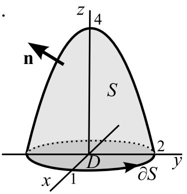
$$\mathbf{c}(t)=\big(\sqrt{3}\cos t,\sqrt{3}\operatorname{sen}t,2\big)\,,\ \text{con}\ t\in[0,2\pi]\,.$$

Y es entonces: $\displaystyle\oint_{\partial S}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}\big(\sqrt{3}\,(c+s),2\sqrt{3}\,c,2\big)\cdot\big(-\sqrt{3}\,s,\sqrt{3}\,c,0\big)\,dt$

$$=3\int_0^{2\pi}\big(2c^2-s^2-sc\big)\,dt=\tfrac{3}{2}\int_0^{2\pi}(3\cos 2t+1)\,dt=3\pi\,,\ \text{como debía.}$$

Ej 9. Comprobemos Stokes para la superficie $z=4-4x^2-y^2$ con $z\geq 0$ y $\mathbf{f}(x,y,z)=(y,2x,1+yz)$.

La mejor parametrización de la elipse que limita S es: $\mathbf{c}(t)=(\cos t,2\,\mathrm{sen}\,t,0)$.



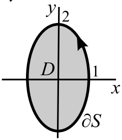
$$\oint_{\partial S}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}(2s,2c,1)\cdot(-s,2c,0)\,dt=\int_0^{2\pi}(1+3\cos 2t)\,dt=2\pi\,.$$

Una posible parametrización de la superficie S es

$\mathbf{r}(x,y)=\big(x,y,4-4x^2-y^2\big)$, $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=(8x,2y,1)$, $(x,y)\in D$ elíptica.

[El **pvf** apunta en el sentido adecuado al recorrido de ∂D que pide Stokes].

Ahora calculamos la integral de superficie de $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ y&2x&1+yz\end{vmatrix}=(z,0,1)$.



$$\iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\iint_D \big[\underbrace{8x\big(4-4x^2-y^2\big)}_{\text{impar y } D \text{ simétrico}}+1\big]\,dx\,dy=\iint_D 1=2\pi\ \ \big[=\text{área de } D=\pi ab\big].$$

Para hallar el área integrando hacemos $x=\cos\theta$, $y=2\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $J=2r$ $\longrightarrow$

Área de $D=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\,dr\,d\theta=2\pi$. $\Big[$Sin usar la imparidad, sale $\int_0^{2\pi}\int_0^1 16r^2c\,(4-4r^2)\,dr\,d\theta=0\Big]$.

$\Big[$En cartesianas (tras simplificar) aparece: $\int_{-1}^{1}\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\,dx=8\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=2\pi\Big]$.

También podíamos parametrizar S usando las polares anteriores típicas de las elipses:

$$\mathbf{r}=\big(r\cos\theta,2r\,\mathrm{sen}\,\theta,4-4r^2\big)\,,\ \begin{matrix}0\leq r\leq 1\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{matrix}\ \longrightarrow\ \mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ c&2s&-2r\\ -rs&2rc&0\end{vmatrix}=2r\,(8r\cos\theta,4r\,\mathrm{sen}\,\theta,1)\,.$$

Con ellas: $\iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{f}\cdot d\mathbf{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\,(4-4r^2,0,1)\cdot(8r\cos\theta,4r\,\mathrm{sen}\,\theta,1)\,dr\,d\theta=2\pi$ como antes.