

Integrales de superficie. 6.1 Definición y cálculo

Generalizamos las integrales de línea (de campos escalares y vectoriales). Una **superficie** a veces viene dada por $F(x, y, z) = 0$. Si se puede despejar la z , por $z = f(x, y)$. Pero lo más general es que se puede describir **paramétricamente** (aquí en función de 2 parámetros) mediante:

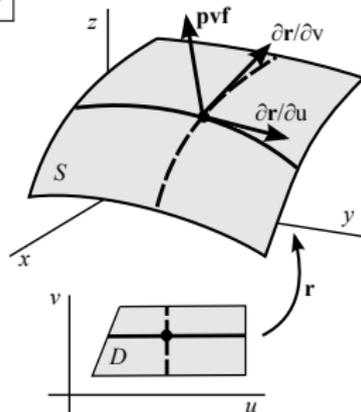
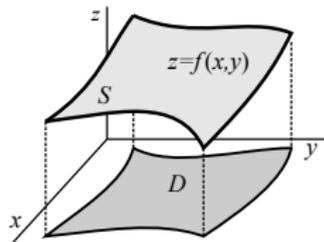
$$\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ con } \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$$

Suponemos que la superficie $S = \mathbf{r}(D)$ es C^1 [que lo es \mathbf{r}]. Entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

serán vectores tangentes a las curvas contenidas en S que se obtienen tomando, respectivamente, $v = k$ y $u = k$. Su producto vectorial

producto vectorial fundamental $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$ es **vector normal** a S . [Y al plano tangente, si es $\neq 0$].



Cuando la superficie está escrita en la forma $z = f(x, y)$ una parametrización posible de S es $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, con $(x, y) \in D$ proyección de S sobre $z = 0$. El producto vectorial fundamental queda en este caso:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \boxed{(-f_x, -f_y, 1)}$$

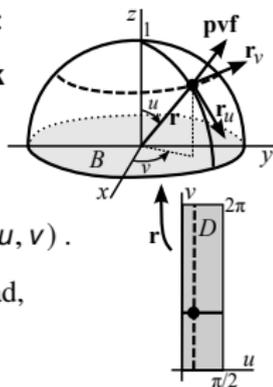
Tres superficies parametrizadas

Ej 1a. Parametricemos la semisuperficie esférica unidad superior. Una posibilidad:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \sin u \cos v & u \in [0, \frac{\pi}{2}] & & \mathbf{r}_u &= \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} - \sin u \mathbf{k} \\ y(u, v) &= \sin u \sin v & v \in [0, 2\pi] & & \mathbf{r}_v &= -\sin u \sin v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} \\ z(u, v) &= \cos u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k}$$

$$= \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) = \sin u \mathbf{r}(u, v).$$



O podemos parametrizarla: $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, con $(x, y) \in B$ círculo unidad, que nos proporciona este otro **pvf**: $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

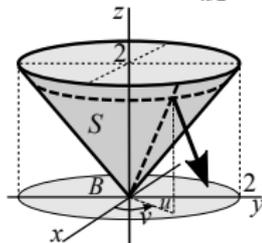
Ej 2. $x = u \cos v$ $u \in [0, 2]$ Por ser $x^2 + y^2 = z^2$, nos da la superficie cónica de la derecha, comprendida entre $z=0$ y $z=2$.
 $y = u \sin v$
 $z = u$ $v \in [0, 2\pi]$

[$v=k$ sigue una recta y $u=k$ una circunferencia]. El **pvf** es $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & s & 1 \\ -us & uc & 0 \end{vmatrix} = (-u \cos v, -u \sin v, u)$.

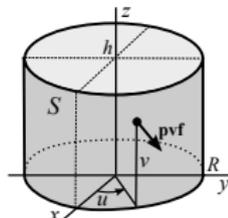
[Para $u=0$ el **pvf** = $\mathbf{0}$ y en ese punto no hay plano tangente]. sentido opuesto al del dibujo \rightarrow

De otra forma: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, con $(x, y) \in B$ círculo de radio 2.

Ahora el producto vectorial fundamental $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$.



Ej 3. $x = R \cos u$ $u \in [0, 2\pi]$ Superficie cilíndrica de radio R
 $y = R \sin u$ $v \in [0, h]$ (pues $x^2 + y^2 = R^2$) y altura h .
 $z = v$
 $\mathbf{r}_u = (-R \sin u, R \cos u, 0)$, $\mathbf{r}_v = (0, 0, 1) \rightarrow \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = R(\cos u, \sin u, 0)$.



Integrales de superficie de campos escalares

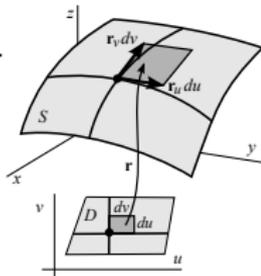
Sea S la superficie C^1 dada por $\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ inyectiva y sea $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(\mathbf{r}(u, v))$ es continua. Entonces:
$$\iint_S f dS \equiv \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv .$$

La notación $\iint_S f dS$ es inequívoca pues también se prueba que **sólo depende de la superficie** y no de la parametrización la integral de una f escalar. Si S la forman varias superficies C^1 se suman las integrales.

Si $f \equiv 1$ la integral es el **área** de la superficie S :
$$A = \iint_S dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv .$$

[Pues un rectángulo $du dv$ de D da lugar a un diferencial de superficie dS igual aproximadamente al rectángulo dado por los vectores $\mathbf{r}_u du$ y $\mathbf{r}_v dv$, cuyo área es el módulo de su producto vectorial].

Para una superficie $z=f(x, y)$ queda
$$A = \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dx dy .$$



Ej 1b. Hallemos la integral de $f(x, y, z) = z^2$ sobre la semisuperficie esférica S del ejemplo 1a.

Con $\mathbf{r}(u, v) = (\text{sen } u \cos v, \text{sen } u \text{ sen } v, \cos u)$. $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = |\text{sen } u| \|\mathbf{r}\| = \text{sen } u$ [\mathbf{r} es unitario y $\text{sen } u \geq 0$].

$$\text{Por tanto, } \iint_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \text{sen } u du dv = -\frac{2\pi}{3} [\cos^3 u]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3} .$$

Con $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ resulta ser: $\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \left[\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \Rightarrow$

$$\iint_S z^2 dS = \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr d\theta = \frac{2\pi}{3} [-(1-r^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{2\pi}{3} .$$

polares ↑

La integral da bien el **área** de S :
$$A = \iint_S 1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen } u du dv = 2\pi$$
 [el de toda la superficie esférica era $4\pi \cdot 1^2$].

Integrales de superficie de campos vectoriales

Sea S la superficie de C^1 dada por $\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ inyectiva y sea $\mathbf{f}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ continua sobre S . Entonces:
$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv.$$

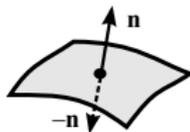
Esta integral, si \mathbf{n} es el vector unitario normal a la S con el mismo sentido que el producto vectorial fundamental, se puede poner de otra forma que a veces simplifica cálculos y además clarifica el significado físico de este tipo de integrales, el **flujo** del campo vectorial \mathbf{f} a través de la superficie S :

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Se prueba que, **salvo el signo**, esta integral es **independiente de la parametrización**.

Hay dos unitarios normales a una superficie orientada \mathbf{n} y $-\mathbf{n}$ (que conste que las hay no orientadas como la banda de Moebius). Parametrizaciones distintas dan **pvf** con el sentido de uno u otro. Si son el mismo, las integrales serán iguales. Si no, tendrán el signo opuesto.

\mathbf{f} , S y el sentido de la normal sí determinan la integral. Más preciso sería pues escribir $\iint_r \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$.



Ej 1c. Integremos $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ sobre la semisuperficie esférica S del 1ab, con los \mathbf{r} de siempre.

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{r}(u, v) \cdot \left[\underset{\substack{\mathbf{r} \\ \text{unitario} \uparrow}}{\text{sen } u} \mathbf{r}(u, v) \right] du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen } u du dv = 2\pi \left[-\cos u \right]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

Con la otra parametrización: $\mathbf{f} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right) \Rightarrow$

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2} dr d\theta = 2\pi \left[-(1-r^2)^{1/2} \right]_0^1 = 2\pi.$$

Las integrales coinciden porque el **pvf** apuntaba en ambos casos hacia el exterior de la esfera. Y el valor es positivo porque el campo \mathbf{f} tiene también esa dirección (y así el flujo debe serlo).

Ej 2*. Integremos la $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ de antes, ahora sobre la superficie cónica S del ejemplo 2.

Teníamos: $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, u)$, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2]$.

Por lo tanto: $\mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = (u \cos v, u \sin v, u) \cdot (-u \cos v, -u \sin v, u) = -u^2 + u^2 = 0$.

Así pues: $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0$. [Este campo era tangente a nuestro cono y el flujo debía ser nulo].

Ej 4. Sea S la porción de la superficie $z = x + y^2$ sobre el triángulo D dado por $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq x \leq y$. Primero hallamos su área e $\iint_S (z - x) dS$.

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x + y^2) \rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-1, -2y, 1) \rightarrow$$

$$A = \iint_D \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dx dy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{4y^2 + 2} dx dy = \int_0^1 y \sqrt{4y^2 + 2} dy = \frac{3\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6} \approx 0.99$$

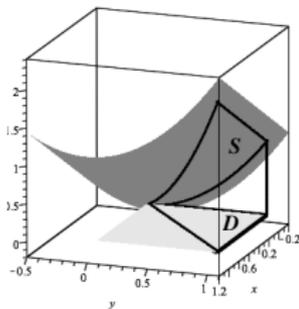
[La presencia de la raíz muchas veces, no aquí, lleva a integrales complicadas o no calculables].

$$\begin{aligned} \iint_S (z - x) dS &= \iint_D y^2 \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dx dy = \int_0^1 y^2 y \sqrt{4y^2 + 2} dy \\ &= \frac{4y^2 + 2 = u}{32} \int_2^6 (u - 2) \sqrt{u} du = \frac{1}{32} \left[\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{4}{3} u^{3/2} \right]_2^6 = \frac{1}{5} \sqrt{6} + \frac{1}{30} \sqrt{2} \approx 0.54. \end{aligned}$$

Calculamos ahora $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ para el campo $\mathbf{f}(x, y, z) = (2z, y, 1)$. La integral resulta ser:

$$\iint_D (2x + 2y^2, y, 1) \cdot (-1, -2y, 1) dx dy = \int_0^1 \int_0^y (1 - 2x) dx dy = \int_0^1 (y - y^2) dy = \frac{1}{6}.$$

[Integrando campos vectoriales no aparecen las raíces que pueden dar problemas con los escalares].

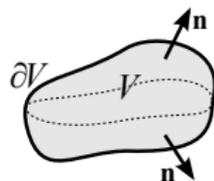


6.2 Teoremas de la divergencia y Stokes

Teorema de la divergencia en el espacio (o de Gauss-Ostrogradsky)

Sea V región acotada del espacio cuya frontera ∂V es una superficie conexa, \mathbf{n} el vector normal unitario exterior a V y sea \mathbf{f} de C^1 en V . Entonces:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$



[La segunda integral es $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ si el producto vectorial fundamental apunta hacia el exterior].

Ej 1. Comprobemos el teorema para $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ y V la famosa semiesfera de la sección 6.1.

Por una parte: $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_V dx \, dy \, dz = 3 \times \text{volumen de } V = 3 \times \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = 4\pi$.

Por otra, la ∂V se compone de dos partes, la S superior y el círculo B de la base.

En S es $\mathbf{n} = \mathbf{f} = \mathbf{r}$ [$\rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 1$] y en B es $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ [$\rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$].

Por tanto, $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S 1 \, dS + \iint_B 0 \, dS = \text{área de } S = 4\pi$.

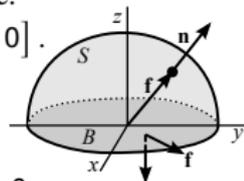
Esto resultó demasiado sencillo. Sea ahora $\mathbf{g}(x, y, z) = (xy, z, 1)$ en la misma V .

$\operatorname{div} \mathbf{g} = y$, $\iiint_V y \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \sin \theta \cos \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi = \frac{1}{4} [-\cos \theta]_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta = 0$.
¡y impar en V simétrico

Si $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin \phi \mathbf{r}(\phi, \theta)$.

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi (\sin^2 \phi \cos \theta \sin \theta, \cos \phi, 1) \cdot (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^4 \phi \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^2 \phi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \phi) \, d\phi \, d\theta = \pi [\sin^2 \phi]_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

En B es $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (xy, 0, 1) \cdot (0, 0, -1) = -1$, luego $\iint_B \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\text{área de } S = -\pi \rightarrow \iint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$.



Más ejemplos de comprobaciones del teorema de Gauss

Ej 2. Para el campo $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x, 0, z^3)$ y V el cilindro del ejemplo 3 de 6.1 de superficie lateral S :

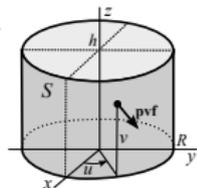
$$\mathbf{r} = (R \cos u, R \sin u, v), \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (R \cos u, R \sin u, 0), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, h].$$

$$\begin{aligned} \text{Sumamos } \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^h \int_0^{2\pi} (-R \cos u, 0, v^3) \cdot (R \cos u, R \sin u, 0) \, du \, dv \\ &= -R^2 \int_0^h \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du = -\frac{R^2 h}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2u) \, du = -\pi R^2 h \end{aligned}$$

y las integrales sobre las tapas. Abajo es: $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (-x, 0, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$. Arriba:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (-x, 0, h^3) \cdot (0, 0, 1) = h^3 \rightarrow \iint_{B_R} h^3 = \pi R^2 h^3. \text{ Así pues, } \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \pi R^2 (h^3 - h).$$

$$\text{Por otra parte es } \operatorname{div} \mathbf{f} = 3z^2 - 1, \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r(3z^2 - 1) \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \frac{R^2}{2} (h^3 - h).$$



Ej 5. Ahora $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, xy, -1)$ y V limitado por el plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 1)$ y por los planos coordenados.

No es difícil dar el plano: $2x + y + 2z = 2$. Y como $\operatorname{div} \mathbf{f} = x$ la integral triple:

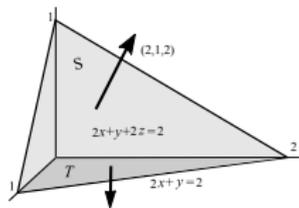
$$\iiint_V x = \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \int_0^{1-x-y/2} x \, dz \, dy \, dx = \dots = \int_0^1 x(1-x)^2 \, dx = \frac{1}{12}.$$

Habría que calcular el flujo sobre los 4 triángulos que forman ∂V en la dirección de sus \mathbf{n} exteriores. Pero en $x=0$ e $y=0$ es $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$ pues $\mathbf{f} = (0, 0, -1)$ y las \mathbf{n} son $(-1, 0, 0)$ y $(0, -1, 0)$. El flujo es 0. Sobre T es $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (0, 0, -1) \cdot (0, 0, -1) = 1$, con lo que $\iint_T 1 = \text{área de } T = 1$ (base 1 y altura 2).

Sólo usamos integrales para el S dado por: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - \frac{y}{2})$, $(x, y) \in T$. $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (1, \frac{1}{2}, 1)$.

$$\iint_T (0, xy, -1) \cdot (1, \frac{1}{2}, 1) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} (\frac{xy}{2} - 1) \, dy \, dx = \int_0^1 [x(1-x)^2 - 2(1-x)] \, dx = \frac{1}{12} - 1.$$

El flujo total sobre ∂V , sumando las dos integrales no nulas, es $1 + \frac{1}{12} - 1 = \frac{1}{12}$ como debía.

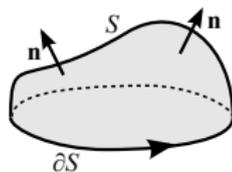


Teorema de Stokes

Teorema de Stokes

Sean S una superficie en el espacio limitada por la curva ∂S y $\mathbf{f} \in C^1$ en S .

Entonces: $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$, con \mathbf{n} vector unitario normal a S y los sentidos de \mathbf{n} y de recorrido de ∂S indicados en el dibujo.



[Caminando por la ∂S , la superficie quedará a nuestra izquierda y la normal apunta de los pies a la cabeza. Estamos suponiendo con esto que nuestra superficie es orientable para poderlo afirmar].

[Podríamos alternativamente escribir $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ si la \mathbf{r} que utilizamos da el sentido de \mathbf{n} adecuado].

[Cuando S es una región del plano xy es $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, con lo que $\text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = g_x - f_y$, y $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ se reduce a $f \, dx + g \, dy$. El teorema de Stokes pasa a convertirse en el de Green. Y como sucedía allí, para un campo conservativo las dos integrales son nulas, por anularse el rotacional y por ser ∂S un camino cerrado].

Ej 1*. Comprobamos Stokes para $\mathbf{g}(x, y, z) = (0, 0, y)$, y la semiesfera S habitual.

Es $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{i}$ [$\Rightarrow \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (1, 0, 0) \cdot (x, y, z) = x$]. Entonces:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S x \, dS = \int_0^{2\pi} \cos v \, dv \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du = 0 \quad [\text{la primera integral lo es}].$$

La integral también se puede hacer: $\iint_B \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (1-r^2)^{-1/2} \cos \theta \, dr \, d\theta = 0$.

Una parametrización de ∂S es $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = (0, 0, \sin t)$.

Así pues, $\oint_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (0, 0, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0$, como debía ser.

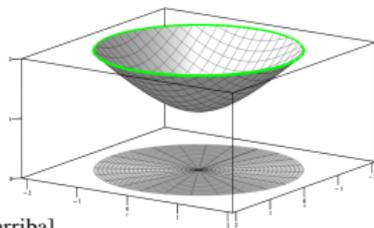
[La integral de línea sobre la circunferencia se anuló, a pesar de no ser \mathbf{g} conservativo, por ser \mathbf{g} y \mathbf{c}' ortogonales. Sobre otras curvas cerradas, la integral será no nula. Dijimos que para ser conservativo, su integral a lo largo de **todo camino cerrado** debía ser cero].

Ej 7. Lo hacemos para $\mathbf{g}(x, y, z) = (x+y, 2x, z)$ y el hiperboloide $z^2 = 1+x^2+y^2$, con $1 \leq z \leq 2$.

$$\text{rot } \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & 2x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1). \text{ Parametrizamos la superficie.}$$

La más simple: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1+r^2})$, $\theta \in [0, 2\pi]$,
 $r \in [0, \sqrt{3}]$.

Para ella es: $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & s & r/\sqrt{\cdot} \\ -rs & rc & 0 \end{vmatrix} = (-\frac{c}{\sqrt{\cdot}} r^2, -\frac{s}{\sqrt{\cdot}} r^2, r)$ [apunta hacia arriba].



El flujo en el sentido del teorema será: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (0, 0, 1) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta) dr d\theta = \pi [r^2]_0^{\sqrt{3}} = 3\pi$.

Trabajando en cartesianas también salen cálculos cortos:

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{1+x^2+y^2}), (x, y) \in B \text{ círculo centrado de radio } \sqrt{3}. \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-\frac{x}{\sqrt{\cdot}}, -\frac{y}{\sqrt{\cdot}}, 1).$$

Y ahora será: $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_B (0, 0, 1) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) dx dy = \iint_B 1 = \text{área de } B = 3\pi$.

Para comprobar Stokes parametrizamos la ∂S en el sentido adecuado:

$$\mathbf{c}(t) = (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t, 2), \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

Y es entonces: $\oint_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}(c+s), 2\sqrt{3}c, 2) \cdot (-\sqrt{3}s, \sqrt{3}c, 0) dt$
 $= 3 \int_0^{2\pi} (2c^2 - s^2 - sc) dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (3 \cos 2t + 1) dt = 3\pi$, como debía.

Ej 9. Comprobemos Stokes para la superficie $z=4-4x^2-y^2$ con $z \geq 0$ y $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, 2x, 1+yz)$.

La mejor parametrización de la elipse que limita S es: $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t, 0)$.

$$\oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (2s, 2c, 1) \cdot (-s, 2c, 0) dt = \int_0^{2\pi} (1+3 \cos 2t) dt = 2\pi.$$

Una posible parametrización de la superficie S es

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 4-4x^2-y^2), \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (8x, 2y, 1), \quad (x, y) \in D \text{ elíptica.}$$

[El **pvf** apunta en el sentido adecuado al recorrido de ∂D que pide Stokes].

Ahora calculamos la integral de superficie de $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & 2x & 1+yz \end{vmatrix} = (z, 0, 1)$.

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [8x(4-4x^2-y^2)+1] dx dy = \iint_D 1 = 2\pi \quad [= \text{área de } D = \pi ab].$$

Para hallar el área integrando hacemos $x = \cos \theta$, $y = 2 \operatorname{sen} \theta$, con $J = 2r \rightarrow$

$$\text{Área de } D = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r dr d\theta = 2\pi. \quad [\text{Sin usar la imparidad, sale } \int_0^{2\pi} \int_0^1 16r^2 c(4-4r^2) dr d\theta = 0].$$

$$[\text{En cartesianas (tras simplificar) aparece: } \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\pi].$$

También podíamos parametrizar S usando las polares anteriores típicas de las elipses:

$$\mathbf{r} = (r \cos \theta, 2r \operatorname{sen} \theta, 4-4r^2), \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & 2s & -2r \\ -rs & 2rc & 0 \end{vmatrix} = 2r(8r \cos \theta, 4r \operatorname{sen} \theta, 1).$$

Con ellas: $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r(4-4r^2, 0, 1) \cdot (8r \cos \theta, 4r \operatorname{sen} \theta, 1) dr d\theta = 2\pi$ como antes.

