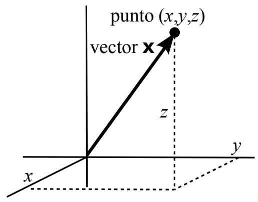
1. Conceptos básicos

1.1 El espacio $\mathbf{R}^n$. Rectas y planos. Abiertos y cerrados.

El conjunto $\mathbf{R}^n$ se define como $\boxed{\mathbf{R}^n \equiv \{\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n) : x_k \in \mathbf{R}\}}$.

[Otras notaciones para los elementos de $\mathbf{R}^n$ son $\bar{x}$ o $\vec{x}$].

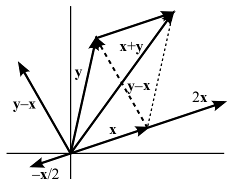


A cada elemento de $\mathbf{R}^n$ le llamaremos indistintamente **punto** o **vector** de $\mathbf{R}^n$. Casi todos nuestros ejemplos serán en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ donde llamaremos $\mathbf{x}=(x,y)$ o $\mathbf{x}=(x,y,z)$. Un $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2$ se puede ver como el punto de coordenadas cartesianas (x,y) o como el vector que une el origen $(0,0)$ con (x,y) [análogo en $\mathbf{R}^3$]. $\mathbf{R}$ es caso particular de $\mathbf{R}^n$ y a los números reales se les llama a veces **escalares**.

La **suma de vectores** $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se define: $\boxed{\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)}$, que tiene las mismas propiedades que la suma de números reales: es conmutativa, asociativa, existe el elemento $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$ con $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}\ \forall\mathbf{x}$ y el opuesto $-\mathbf{x}=(-x_1,\ldots,-x_n)$ con $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. La diferencia de vectores se define entonces como $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{x}+(-\mathbf{y}) = (x_1-y_1,\ldots,x_n-y_n)$.

El **producto de un escalar** $k\in\mathbf{R}$ **por un vector** $\mathbf{x}$ es el vector $\boxed{k\,\mathbf{x}=(kx_1,\ldots,kx_n)}$, que tiene las propiedades: $k(m\mathbf{x})=(km)\mathbf{x}$, $(k+m)\mathbf{x} = k\mathbf{x}+m\mathbf{x}$, $k(\mathbf{x}+\mathbf{y})=k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$, $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$, $0\,\mathbf{x}=k\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ estas dos definiciones tienen claro significado geométrico. Suma es el vector diagonal del paralelogramo de lados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. O lo que es lo mismo, es el vector cuya punta es el punto en el que acaba $\mathbf{x}$ si llevamos paralelamente su base al extremo de $\mathbf{y}$. La diferencia la da la otra diagonal. $k\mathbf{x}$ es otro vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{x}$ y que tiene mismo o distinto sentido que él. Su longitud, además, se ve modificada por el factor $|k|$.



Todas las propiedades anteriores eran inmediatas de demostrar a partir de las propiedades de $\mathbf{R}$.

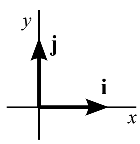
Un conjunto en el que haya dos operaciones con esas propiedades se llama **espacio vectorial** (estos conjuntos se tratan extensamente en el álgebra).

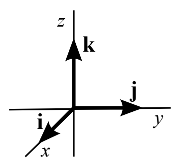
Son importantes los vectores de $\mathbf{R}^n$: $\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0)$, . . . , $\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,1)$, pues todo vector se puede escribir como una suma de escalares por esos vectores: $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$.

[En idioma algebraico: $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ es la 'base canónica' del espacio vectorial de 'dimensión n' (número de elementos de la base) y cualquier vector se puede escribir como 'combinación lineal' (suma de escalares por vectores) de esos n elementos].

En $\mathbf{R}^2$ se suele escribir $\mathbf{e}_1=\mathbf{i}=(1,0)$ y $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}=(0,1)$.

Y en $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{e}_1=\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{e}_3=\mathbf{k}=(0,0,1)$.



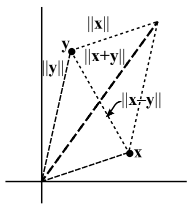


Otras definiciones que describen longitudes de vectores:

La **norma** o **módulo** de $\mathbf{x}$ es $\boxed{\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}$. La **distancia** de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ es $\boxed{d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$.

[Ambas son reales ≥ 0 . En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, $\|\mathbf{x}\|$ es su longitud y $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ la distancia entre los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$].

Propiedades de la norma: $\boxed{\|k\,\mathbf{x}\|=|k|\|\mathbf{x}\|\ ,\ \|\mathbf{x}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}\ ,\ \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|}$.



La última, **desigualdad triangular**, geométricamente afirma que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Las dos primeras son de demostración inmediata y se probará la segunda después de definir el producto escalar].

Un vector se dice **unitario** cuando tiene norma 1. Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son unitarios.

Dado cualquier $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ es muy fácil dar un vector unitario con su misma dirección y sentido: $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

Definamos dos importantes productos de vectores: el escalar y el vectorial.

Si $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ se define el **producto escalar** de dos vectores como $\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n}$.

$\Big[$Obsérvese que $\|\mathbf{x}\|=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}$ y que, por tanto, $\|\mathbf{x}\|^2=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\Big]$.

[El producto escalar de dos vectores es un **número real** que perfectamente puede ser negativo].

[En el caso particular de $\mathbf{R}$, el producto escalar es el producto y $\|x\|$ pasa a ser el valor absoluto $|x|$].

Las siguientes propiedades (menos la última, que demostramos) son fáciles de probar:

$$\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x},\ (k\,\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=k\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot(k\,\mathbf{y}),\ \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z},\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0,\ \underbrace{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}_{\text{desigualdad de Cauchy-Schwartz}}.}$$

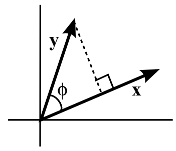
C-S: Si $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ es trivial. Sea $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ y sea el número real $k=\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Entonces:

$$0\leq(\mathbf{x}-k\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-k\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+k^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|^2-\frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}\Rightarrow|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2\leq\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\Rightarrow|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

Probemos ahora la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\leq\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2=\big(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|\big)^2\Rightarrow\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|.$$

Hay una forma alternativa de expresar un producto escalar, en términos de la norma de los vectores y del ángulo formado por ellos, que a veces resulta ser más útil que la inicial. Del teorema del coseno se deduce (ver Marsden-Tromba):



En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ es $\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi}$, con $\phi\in[0,\pi]$ ángulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$.

Deducimos que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$ si son **perpendiculares** y que $\phi=\arccos\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$. (Y aquí es clara C-S).

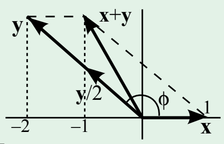
$\big[\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ es, por tanto, el producto de la norma de un vector por la norma de la proyección del otro sobre él$\big]$.

Ej 1. Sean $\mathbf{x}=(1,0)=\mathbf{i}$ e $\mathbf{y}=(-2,2)=-2\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}$. Entonces es:

$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(-1,2)$. $\frac{1}{2}\,\mathbf{y}=(-1,1)$. $\|\mathbf{x}\|=1$, $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|=\sqrt{5}$.

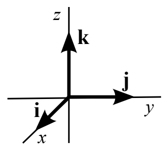
El vector unitario con la dirección y sentido de $\mathbf{y}$ es $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=-2$.

$\Big[$Como $\phi>\frac{\pi}{2}$ debía ser $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi<0$; es $\phi=\arccos\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{3\pi}{4}\Big]$. $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|=2\leq\sqrt{8}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$.



Para $n=3$, se define el **producto vectorial** de $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ e $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ como el vector:

$$\boxed{\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=(x_2y_3-x_3y_2)\,\mathbf{i}-(x_1y_3-x_3y_1)\,\mathbf{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\,\mathbf{k}}\,.$$



Propiedades inmediatas de este producto son: $\boxed{\mathbf{x}\times\mathbf{x}=\mathbf{0},\ \mathbf{x}\times\mathbf{y}=-\mathbf{y}\times\mathbf{x}}$.

Y para los vectores de la base canónica: $\boxed{\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}}$.

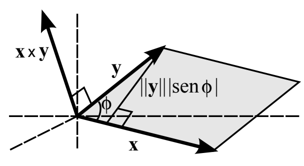
Lo que pasa con estos vectores ocurre en general. El vector $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ **es perpendicular** a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (ver M-T) y tiene el sentido que sugieren esos ejemplos. [El que dice la 'ley de la mano derecha': si los dedos apuntan de $\mathbf{x}$ hacia $\mathbf{y}$, su producto vectorial tiene el sentido del pulgar]. Además, se tiene:

$$(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$

$$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2\overset{\uparrow}{=}\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2=\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1-\cos^2\phi)$$

$$\Rightarrow\ \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\,|\mathrm{sen}\,\phi|\ \Rightarrow$$

La **longitud** de $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ es el **área del paralelogramo** que tiene por lados adyacentes a los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.



Ej 2. Si $\mathbf{x}=(1,0,2)$, $\mathbf{y}=(-2,1,3)$ Su producto escalar es $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=4$. $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{5}$, $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{14}$.

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|(3,-1,-1)\|=\sqrt{11}$ nos proporciona la distancia entre los dos puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

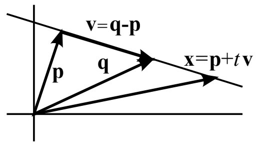
$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&2\\-2&1&3\end{vmatrix}=(0-2)\,\mathbf{i}-(3+4)\,\mathbf{j}+(1-0)\,\mathbf{k}=(-2,-7,1)$. Que es perpendicular a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

$(1,0,2)\cdot(-2,-7,1)=0$, $(-2,1,3)\cdot(-2,-7,1)=0$.

$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=3\sqrt{6}$ nos da el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores.

Rectas y planos

En Cálculo en una variable, una **recta del plano** se suele escribir $y=mx+b$ ó $y=y_0+m(x-x_0)$, fijándonos en la pendiente m, la ordenada en el origen b o un punto (x_0,y_0) por el que pasa.



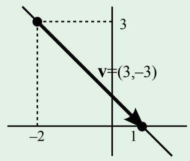
Veamos otras expresiones ahora utilizando vectores. La recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}=(p_1,p_2)$ y $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$ se puede escribir:

$$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \quad \text{o} \quad \mathbf{x}=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}\,,\ t\in\mathbf{R}\,.$$

$\big[$Para $t\in[0,1]$, $\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ describe el segmento que une esos puntos$\big]$.

O dado $\mathbf{p}$ y el vector dirección $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$: $\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{v}$, o en coordenadas: $\begin{cases} x=p_1+tv_1 \\ y=p_2+tv_2 \end{cases}$.

Ej 3. Describamos paramétricamente de diferentes formas el segmento que une $\mathbf{p}=(-2,3)$ y $\mathbf{q}=(1,0)$.



En coordenadas cartesianas la recta es $y=1-x$. De aquí: $(t,1-t)$, $t\in[-2,1]$.

Usando las expresiones de arriba, como $\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}=(3,-3)$, obtenemos:

$$\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(-2+3t,3-3t)\,,\ t\in[0,1]\,.$$

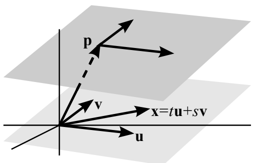
O cambiando los papeles de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$: $\mathbf{q}+t(\mathbf{p}-\mathbf{q})=(1-3t,3t)$, $t\in[0,1]$.

[Las 2 primeras expresiones describen el segmento, al crecer t, en el mismo sentido y la tercera en el opuesto].

Las ecuaciones vectoriales de las **rectas en el espacio** son las mismas, pero con 3 coordenadas:

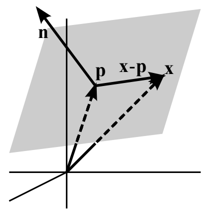
$\begin{cases} x=p_1+tv_1 \\ y=p_2+tv_2 \\ z=p_3+tv_3 \end{cases}$. Eliminando la t: $\dfrac{x-p_1}{v_1}=\dfrac{y-p_2}{v_2}=\dfrac{z-p_3}{v_3}$ [interpretando que el numerador es 0 si se anula su denominador].

La ecuación general de un **plano en el espacio** es $\boxed{ax+by+cz=d}$ [con a,b,c no las tres cero] [si $d=0$, pasa por el origen]



Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores (no múltiplo uno de otro), $\mathbf{x}=t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$, $t,s\in\mathbf{R}$ describe el plano que contiene esos vectores y pasa por el origen.

$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$ es otro plano, paralelo al otro y que pasa por $\mathbf{p}$ y los puntos $\mathbf{p}+\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}+\mathbf{v}$.



Un plano queda también determinado conocidos un punto $\mathbf{p}$ suyo y un vector $\mathbf{n}$ normal (perpendicular) al plano pues: $\boxed{(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}=0}$.

Si es $\mathbf{n}=(a,b,c)$, desarrollando: $a(x-p_1)+b(y-p_2)+c(z-p_3)=0$, que podemos poner $ax+by+cz=-ap_1-bp_2-cp_3$. Comparando con la ecuación escrita arriba, concluimos que un **vector normal a un plano** $ax+by+cz=d$ es el vector (a,b,c).

Ej 4. Demos varias expresiones para la recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}=(1,2,-8)$ y $\mathbf{q}=(7,5,1)$.

Un vector dirección es $\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}=(6,3,9)$, y la recta es: $\mathbf{p}+t\,\mathbf{v}=(1+6t,2+3t,-8+9t)$, $t\in\mathbf{R}$.

O con un vector más bonito $\mathbf{u}=(2,1,3)$ y $\mathbf{q}$ en vez de $\mathbf{p}$: $\mathbf{q}+t\,\mathbf{u}=(7+2t,5+t,1+3t)$, $t\in\mathbf{R}$.

Eliminando t, por ejemplo, de la segunda: $\begin{cases} x=7+2t \\ y=5+t \\ z=1+3t \end{cases} \longrightarrow \dfrac{x-7}{2}=y-5=\dfrac{z-1}{3}$.

Y eligiendo dos pares de términos (nosotros los primero = tercero y segundo = tercero) obtenemos la recta como intersección de dos planos:

$$3x-21=2z-2\,,\ 3y-15=z-1\,,\ \text{es decir,}\ \begin{cases} 3x-2z=19 \\ 3y-z=14 \end{cases}.$$

Ej 5. Hallemos la ecuación del plano que pasa por $\mathbf{p}=(3,2,-1)$, $\mathbf{q}=(1,-1,3)$ y $\mathbf{r}=(3,-2,4)$.

Es perpendicular al plano, por ejemplo, $(\mathbf{q}-\mathbf{p})\times(\mathbf{r}-\mathbf{p})=(-2,-3,4)\times(0,-4,5)=(1,10,8)$.

El plano es, por tanto: $1(x-3)+10(y-2)+8(z+1)=0$, o sea, $x+10y+8z=15$.

Más largo es eliminar t y s de $\mathbf{x}=t(\mathbf{q}-\mathbf{p})+s(\mathbf{r}-\mathbf{p})=\begin{cases} x=3-2t \ \longrightarrow\ t=\frac{3}{2}-\frac{x}{2} \searrow \\ y=2-3t-4s \qquad s=\frac{3x}{8}-\frac{y}{8}-\frac{5}{8} \searrow\cdots \\ z=-1+4t+5s \end{cases}$

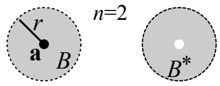
O, aún peor, resolver el sistema $\begin{cases} 3a+2b-c=d \\ a-b+3c=d \\ 3a-2b+4c=d \end{cases}$ [imponiendo que pase por los puntos] $\xrightarrow{\cdots}$ $a=\frac{d}{15}$, $b=\frac{10d}{15}$, $c=\frac{8d}{15}$.

Conjuntos abiertos y cerrados

Entorno de centro $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ y radio $r>0$ es $B_r(\mathbf{a})\equiv\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n:\ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$

[A veces se le llama **disco** o **bola**].

Es un círculo en el plano y una esfera en el espacio, en ambos casos sin borde.
[Para $n=1$ era un intervalo abierto centrado en el punto].
Llamaremos **entorno perforado** o reducido al conjunto $B_r^*(\mathbf{a})=B_r(\mathbf{a})-\{\mathbf{a}\}$.

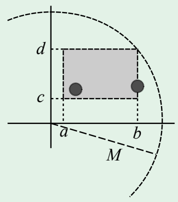


El punto $\mathbf{a}\in A$ es **interior** al conjunto $A\subset\mathbf{R}^n$ si hay algún r tal que el entorno $B_r(\mathbf{a})\subset A$.
A es **abierto** si todos sus puntos son interiores, es decir, si $A=int\,A\equiv\{\mathbf{x}$ interiores a $A\}$.
$\mathbf{p}\in\mathbf{R}^n$ es **punto de acumulación** de A si en todo entorno de $\mathbf{p}$ hay infinitos puntos de A.
A es **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación $\Leftrightarrow$ $\mathbf{R}^n-A$ es abierto (teorema).
La **frontera** o **borde** de A es $\partial A\equiv\{\mathbf{x}:\forall r,\ B_r(\mathbf{x})$ contiene puntos de A y de $\mathbf{R}^n-A\}$.
El **cierre** de A es el conjunto $\bar{A}=int\,A\cup\partial A$. $\bar{A}$ es un conjunto cerrado (teorema).
A es **acotado** si existe $M\in\mathbf{R}$ con $\|\mathbf{x}\|<M\ \ \forall\mathbf{x}\in A$. A es **compacto** si es cerrado y acotado.

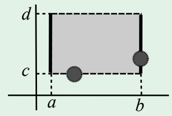
[La demostración del primer teorema es la misma que quizás se vió en $\mathbf{R}$:
A cerrado, $a\in\mathbf{R}-A\Leftrightarrow a\notin A\Rightarrow a$ no de acumulación de $A\Rightarrow\exists B(a,r)\cap A=\varnothing$, $B(a,r)\subset\mathbf{R}-A$.
Si $\mathbf{R}-A$ abierto, demostremos que A es cerrado probando: '$a\notin A\Rightarrow a$ no es de acum. de A':
$a\notin A\Rightarrow a\in\mathbf{R}-A$ abierto $\Rightarrow\exists r/B(a,r)\subset\mathbf{R}-A\Rightarrow B(a,r)\cap A=\varnothing\Rightarrow a$ no es de acumulación.
El otro. Si $\mathbf{p}$ es de acumulación de $\bar{A}$ o pertenece a ∂A si en todo entorno suyo hay, además de los infinitos puntos de A, otros que no son de A, o pertenece $int\,A$ si para algún r todos son de A].

[Intuitivamente, A es abierto cuando no contiene a su frontera, y cerrado cuando lo hace].

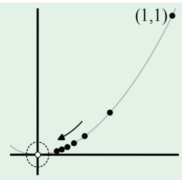
Ej 6. El producto cartesiano de intervalos abiertos $(a,b)\times(c,d)$ (rectángulo sin borde) es un conjunto A abierto en $\mathbf{R}^2$: para cualquier $\mathbf{a}$ del conjunto hay un $B_r(\mathbf{a})\subset A$ (por ejemplo, si r es el mínimo de las distancias a los 4 lados). A no es cerrado pues los puntos de ∂A son de acumulación y no son de A. Como su frontera ∂A son los 4 lados, es $\bar{A}=[a,b]\times[c,d]$. $\bar{A}$ no es abierto (los puntos de ∂A no son interiores) y es cerrado, pues sus puntos de acumulación son los puntos de A o de ∂A y todos son del conjunto. Como también $\bar{A}$ es acotado es compacto.



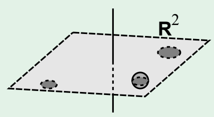
Ej 7. Hay conjuntos que no son no ni abiertos ni cerrados, como $A=[a,b]\times(c,d)$.
Los puntos de los lados derecho e izquierdo son de A, pero no son interiores.
Los de los lados superior e inferior son de acumulación y no son de A.
[Los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son el $\varnothing$ y $\mathbf{R}^n$].



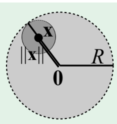
Ej 8. $S=\{(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}),\ n\in\mathbf{N}\}$ no un es abierto, pues posee puntos no interiores (de hecho, ninguno lo es). S tiene sólo un punto de acumulación, el $(0,0)\notin S$, límite de esta sucesión en $\mathbf{R}^2$ (no se tratan sucesiones en estos apuntes, pero basta hallar los límites de cada componente). $S\cup\{\mathbf{0}\}$ sí sería cerrado, con lo que también sería compacto, pues está claramente acotado (sería el cierre $\bar{S}=\partial S$).



Ej 9. Es inmediato comprobar que $\mathbf{R}^2$ como subconjunto de $\mathbf{R}^2$ es abierto y cerrado.
Pero visto como subconjunto de $\mathbf{R}^3$ no es abierto pues ninguno de sus puntos es interior: dado cualquier $\mathbf{a}$ cualquier bola $B_r(\mathbf{a})$ se sale de $\mathbf{R}^2$. Sigue siendo cerrado como subconjunto de $\mathbf{R}^3$ (pero no está acotado y no es compacto).

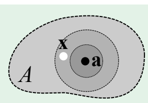


Ej 10. $A=B_R(\mathbf{0})$ es, para cualquier R, un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$:
Para cualquier $\mathbf{x}\in B_R(\mathbf{0})$, $\exists r=R-\|\mathbf{x}\|$ tal que $B_{R-\|\mathbf{x}\|}(\mathbf{x})\subset A$,
pues si $\mathbf{y}\in B_{R-\|\mathbf{x}\|}(\mathbf{x})$ es $\|\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|+\|\mathbf{x}\|<R-\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{x}\|=R$.



[imagen en $\mathbf{R}^2$ para intuir].

Ej 11. Demostremos que si A es un abierto de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{x}\in A$ entonces $A-\{\mathbf{x}\}$ es abierto.
Sea $\mathbf{a}\in A-\{\mathbf{x}\}$. Como A es abierto, hay $B_r(\mathbf{a})\subset A$, pero la bola podría contener a $\mathbf{x}$.
Si $R=\text{mín}\{r,\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|\}$ está $B_R(\mathbf{a})\subset A-\{\mathbf{x}\}\Rightarrow\mathbf{a}$ interior a $A-\{\mathbf{x}\}\Rightarrow A-\{\mathbf{x}\}$ abierto.



1.2 Gráficas de funciones escalares

$\boxed{\begin{array}{c} f: D\subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\to f(\mathbf{x}) \end{array}}$ Las **funciones escalares** (que también se llaman **campos escalares** o funciones reales de varias variables reales) asignan a cada punto $\mathbf{x}$ de un **dominio** $D\equiv \operatorname{dom} f$ un único número real $f(\mathbf{x})$.

[Si no se dice nada más, el dominio D del campo serán los $\mathbf{x}$ para los que f tiene sentido].

La **imagen** o **recorrido** de f será (igual que en $\mathbf{R}$) el conjunto $\operatorname{im} f = f(D)\equiv \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x}\in D\}$.

Su **gráfica** será el conjunto de puntos de la forma $\big(x_1,\dots,x_n, f(x_1,\dots,x_n)\big)$, con $(x_1,\dots,x_n)\in D$.

Si $n=1$ las gráficas son las curvas en el plano que se habrán dibujado en el cálculo en una variable. Para $n\geq 3$ se mueven en un espacio de dimensión ≥ 4 y no se pueden ya representar. Pero si $n=2$, la gráfica es una **superficie en el espacio** que se puede intentar trazar en perspectiva. Veamos cómo obtener información sobre ella.

$\boxed{\begin{array}{c} f:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x,y)\to f(x,y) \end{array}}$ Para esquematizar (sin ordenador) su gráfica $z=f(x,y)$ hallaremos **secciones** (curvas en el espacio) obtenidas cortando la superficie con diferentes planos.

Las secciones más interesantes se consiguen cortando con planos $z=\text{cte}$, llamadas **curvas de nivel** (es decir, curvas del plano xy sobre las que f toma un valor constante, que pueden ser complicadas).

Unas fáciles de hallar son las obtenidas haciendo $x=\text{cte}$ o $y=\text{cte}$, en particular el corte con el plano yz (el del papel o la pizarra, para $x=0$) o con el xz (el perpendicular, para $y=0$).

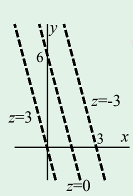
Veamos varios ejemplos de superficies, más o menos sencillas. Serán fáciles de dibujar aquellas que sean de revolución o que no dependan de una de las variables. Pero en muchas ocasiones nos deberemos conformar con tener sus curvas de nivel (que ya nos describen la gráfica, como un mapa da idea de una zona montañosa). Como último recurso acudiremos a veces al ordenador (al programa Maple, casi siempre en estos apuntes).

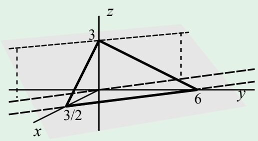
Ej 1. Comencemos esquematizando un par de planos. El primero lleva a una f de las anteriores:

$\boxed{4x+y+2z=6}$ $\rightarrow$ $z=f(x,y)=3-2x-\frac{1}{2}y$. Los cortes con los 3 planos coordenados son $z=3-2x$, $z=3-\frac{1}{2}y$, $y=6-4x$.

Las curvas (rectas) de nivel son: $z=C \rightarrow y=6-2C-4x \nearrow C{=}0$

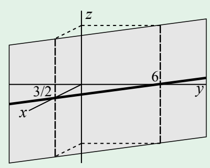
$\big[$Sabemos además que el vector $(4,1,2)$ es normal al plano$\big]$.





$\boxed{4x+y=6}$ no define $z=f(x,y)$ pero, al no depender de z, es sencillo dar su gráfica: la recta $y=6-4x$ trasladada verticalmente.

[Igual de fácil sería si no dependiese de y o de x].

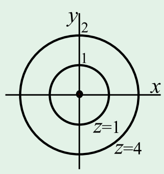


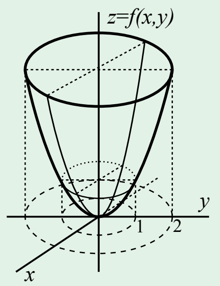
Ej 2. $\boxed{f(x,y)=x^2+y^2}$. Las curvas de nivel, dadas por $x^2+y^2=C$, son circunferencias, de radio $\sqrt{C}$, $C\geq 0$.

$\big[$Si $C=0$ es sólo $(0,0)$, la imagen de f es $[0,\infty)\big]$.

Las secciones con $\begin{array}{l} x=0 \rightarrow z=y^2 \\ y=0 \rightarrow z=x^2 \end{array}$ son parábolas. Es fácil (en este caso) dibujar la gráfica: un '**paraboloide de revolución**'.

$\big[$**Si las curvas de nivel son circunferencias centradas, y esto sucede cuando f depende de x^2+y^2, la superficie es de revolución**$\big]$.



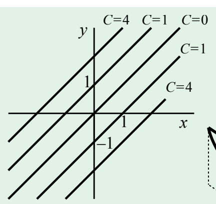


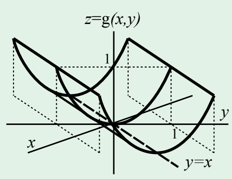
Ej 3. $\boxed{g(x,y)=(x-y)^2}=C \rightarrow x-y=\pm\sqrt{C}$ (rectas paralelas).

En concreto, si $C=0,1,4$ se tiene $y=x$, $y=x\pm 1$, $y=x\pm 2$.

El corte con $x=0$ es una parábola: $z=y^2$. También lo son los cortes con $y=0$ $\big(z=x^2\big)$ o con $y=-x$ $\big(z=4x^2\big)$.

Viene a ser la gáfica de la parábola $z=y^2$ trasladada en horizontal siguiendo la recta $y=x$ (que es donde se anula la g).



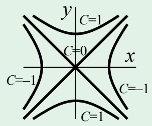


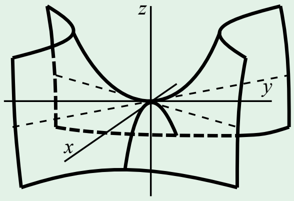
Ej 4. $\boxed{h(x,y)=y^2-x^2}$. Dibujemos la gráfica de este '**paraboloide hiperbólico**' (silla de montar).

Los cortes con $y=0$ y $x=0$ son las parábolas $z=-x^2$ y $z=y^2$
[y en general son parábolas los cortes con $y=C$ y $x=C$].

Las curvas de nivel son las hipérbolas $y^2-x^2=C$
[en particular, para $C=0$ son las rectas $y=\pm x$].

No es fácil hacer el dibujo en 3 dimensiones, pero las curvas de nivel y los cortes ya nos daban una idea de la gráfica.

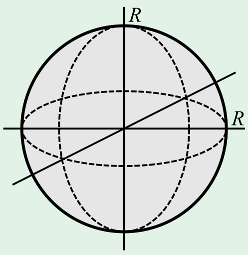




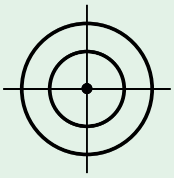
Hay otras **superficies importantes** en el curso que definen más de una (o no definen ninguna) función escalar. Las 3 siguientes no vienen dadas en la forma anterior $z=f(x,y)$ sino en la forma más general $F(x,y,z)=k$. [En el capítulo 6 veremos otra forma de describir superficies, como función de dos parámetros u y v].

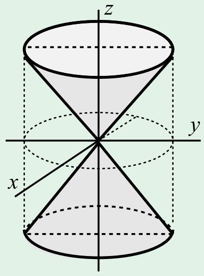
Ej 5. Dibujamos ahora $\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$ (superficie esférica) , $\boxed{z^2=x^2+y^2}$ (cono), $\boxed{x^2+y^2=R^2}$ (cilindro).

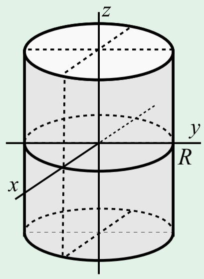
Las primeras definen dos campos escalares $z=f(x,y)$: $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, y la otra ninguno (el + describe la parte superior de la superficie esférica o el cono y el − la parte inferior).



[las curvas de nivel son circunferencias]







Los cortes con $x=0$ son, para la esfera, la circunferencia $y^2+z^2=R^2$, es decir, $z=\pm\sqrt{R^2-y^2}$ y, para este sencillo cono, las rectas $z=\pm y$ de pendiente ± 1 .

El cilindro no depende de z . Circunferencia de radio R llevada verticalmente (desde $-\infty$ hasta ∞).

En todos los ejemplos dibujados hasta ahora aparecían potencias ≤ 2 , con lo que son varios tipos de '**cuádricas**': $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+ax+by+cz=d$ (equivalentes a las cónicas en $\mathbf{R}^3$).

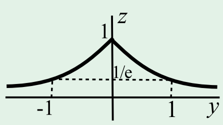
Los términos en xy,xz,yz vienen a girar la cuádrica y los lineales x,y,z a trasladar su centro. Además de las anteriores, en teoría y problemas nos irán apareciendo otras: elipsoides, hiperboloides de una y dos hojas,... y en esa expresión general se pueden ocultar otro tipo de objetos más simples, como planos o incluso el conjunto vacío (por ejemplo, $y^2-2yz+z^2=0$ es simplemente el plano $z=y$ y ningún punto cumple $x^2+y^2+z^2=-1$). La clasificación general de las cuádricas (y de las cónicas) es más propia de los libros de álgebra.

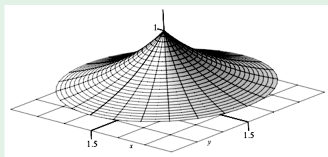
Dibujemos otra superficie fácil, pero definida a través de una exponencial:

Ej 6. $\boxed{k(x,y)=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}$. Es de revolución, porque sobre $x^2+y^2=C$ es constante $\left(\text{vale } e^{-\sqrt{C}}\right)$.

Basta dibujar el corte con $x=0$ (el plano del papel) para deducir su gráfica.

$k(0,y)=e^{-\sqrt{y^2}}=e^{-|y|}$, par y es e^{-y}, si $y\geq 0$.





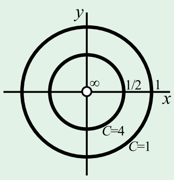
[Es fácil hacer el dibujo pero nos hemos ayudado del ordenador (del Maple)].

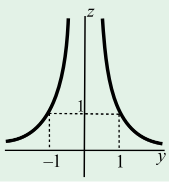
Y otra sencilla (también de revolución), que es la primera que 'se va al infinito' en algún punto.

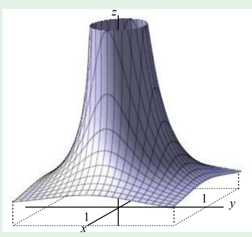
Ej 7. $\boxed{i(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}}$ con curvas de nivel $x^2+y^2=\frac{1}{C}$ y corte $z=\frac{1}{y^2}$ con $x=0$.

Volvemos a dibujar las curvas de nivel y el corte con el plano del papel.

Bastaría hacer rotar la sección, pero, por comodidad, le hemos pedido al Maple que nos dibuje la gráfica en $[-1,1]\times[-1,1]$.



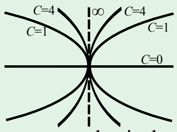




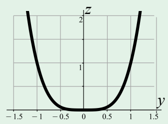
Pero es claro que, en general, aunque se puedan dibujar algunas secciones será muy difícil dar su gráfica en perspectiva, aunque se pueda dar una idea de 'por donde va la gráfica', sobre todo si ha sido posible calcular sus curvas de nivel. Como en los siguientes ejemplos (que muestran discontinuidades):

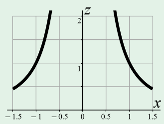
Ej 8. $\boxed{p(x,y)=\frac{y^4}{x^2}}=C \;\to\; x=\pm\frac{1}{\sqrt{C}}y^2$ (parábolas para los $C>0$).

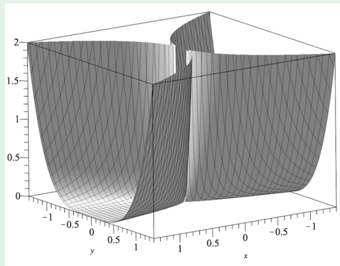
Además es $p(x,y)=0$ si $y=0$ y la p no está definida si $x=0$.
Cuando $x=a$ todos los cortes son parábolas cuárticas $z=\frac{1}{a^2}y^4$.
Para $y=b$ son curvas que se van a infinito al tender x hacia 0.



curvas de nivel


corte con $x=1$

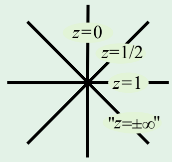

corte con $y=1$

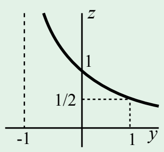


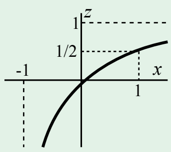
Con lo anterior es fácil hacerse una idea de la gráfica, pero lo difícil es plasmarlo en el papel.

Ej 9. $\boxed{r(x,y)=\frac{x}{x+y}}=C \;\to\; y=\left(\frac{1}{C}-1\right)x$ (rectas pasando por el origen).

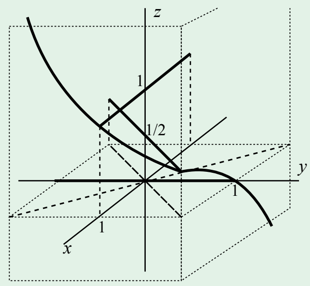
Dando valores a C, o mejor, como son $y=mx$, dando valores a m en $r(x,mx)=\frac{1}{1+m}$, se tienen las curvas de nivel (y ya una idea de la gráfica).





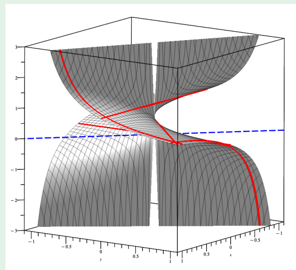


Los cortes con:
$x=1 \to z=\frac{1}{1+y}$, $y=1 \to z=\frac{x}{x+1}$
son los dibujos de la izquierda.



Todas las rectas y curvas pintadas en línea continua en el dibujo espacial pertenecen a la superficie. Utilizando Maple (con el código de abajo) hemos dibujado a la derecha la superficie y junto a ella (en rojo) dichas curvas. Fuera de $y=-x$, donde r no está definida, la función es suave (será continua con la definición que veremos en la próxima sección).

```
> with(plots):s9:=plot3d(x/(x+y),x=-1.1..1.1,y=-1.1..1.1,
    view=-3..3,color=white,grid=[201,201]):
  G:=spacecurve([t,-t,0],t=-1.1..1.1,thickness=3,color=blue,
    linestyle=dash):
  RR:=spacecurve([[0,t,0],[t,0,1],[t,t,1/2]],t=-1.1..1.1,
    thickness=5,color=red):
  Cy:=spacecurve([1,t,1/(1+t)],t=-0.7..1.1,thickness=5,color=red):
  Cx:=spacecurve([t,1,t/(1+t)],t=-0.8..1.1,thickness=5,color=red):
  display([s9,G,RR,Cy,Cx]);
```



[Los dibujos 3d del Maple y otros programas permiten su giro mediante ratón o similar, pudiendo mirar la superficie bajo distintas perspectivas].

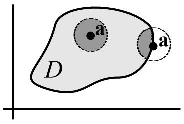
[Para $n=3$ lo único que se puede dibujar (si son sencillas) son sus 'superficies de nivel' $f(x,y,z)=C$. Por ejemplo, esas superficies de nivel son para $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ esferas de diferente radio].

1.3 Límites y continuidad en $\mathbf{R}^n$

Las definiciones de **límite** y **continuidad** para un campo escalar $f: D\in\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ de dominio D son muy parecidas (aparentemente) a las de $\mathbf{R}$. Si $\mathbf{a}$ es interior a D es casi igual:

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=L \text{ si } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que si } 0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \text{ entonces } |f(\mathbf{x})-L|<\varepsilon .}$$

Para $n=2$, esto significa que debe existir un δ tal que la imagen de f en $B^*_\delta(\mathbf{a})$ esté comprendida entre los planos $z=L-\varepsilon$ y $z=L+\varepsilon$, por pequeño que sea ε.



Con el siguiente retoque de la definición (para generalizar los límites laterales) también podemos hablar de límites en los puntos $\mathbf{a}\in\partial D$:

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=L \text{ si } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que si } \mathbf{x}\in D \text{ y } 0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \text{ entonces } |f(\mathbf{x})-L|<\varepsilon .}$$

[También son análogas las definiciones de límites que incluyen infinitos como $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=\infty$].

La definición de **continuidad** para puntos interiores es también como la de $\mathbf{R}$:

$$\boxed{f \text{ continua en } \mathbf{a}\in intD \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \forall\varepsilon\ \exists\delta \text{ tal que } \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|<\varepsilon .}$$

Y si D incluye su frontera y $\mathbf{a}\in\partial D$ basta añadir $\mathbf{x}\in D$ para definir su continuidad.

Decir que una f es continua en un conjunto A significa que lo es en cada uno de los puntos de A.

Teoremas (como los de $\mathbf{R}$ y que no demostramos aquí) aseguran que **suma**, **producto** y **cociente con denominador no nulo** de f y g continuas en un punto son continuas en ese punto. Y también lo es la **composición** de campos escalares con funciones reales continuas:

Teor 1. $\boxed{f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R} \text{ continua en } \mathbf{a},\ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \text{ continua en } f(\mathbf{a}) \Rightarrow g\circ f \text{ continua en } \mathbf{a}.}$

[En $\mathbf{R}$ probamos estos teoremas utilizando sucesiones que aquí no hemos tratado y podríamos usar ahora sólo para demostrarlos todos la definición $\varepsilon-\delta$. Por ejemplo, para éste último bastaría precisar la idea de que $|g(f(\mathbf{x}))-g(f(\mathbf{a}))|<\varepsilon$ si $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta$ suficientemente pequeño, lo que es cierto porque entonces $|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|$ lo es por ser f continua en $\mathbf{a}$ y g ser continua en $f(\mathbf{a})$].

Probemos ahora que $f(\mathbf{x})=C$ y que $f(x_1,\dots,x_n)=x_k$ son continuas en todos los puntos de $\mathbf{R}^n$:

$$|f(\mathbf{x})-C|=0<\varepsilon\ \forall\delta, \quad |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|=|x_k-a_k|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\varepsilon \text{ tomando } \delta=\varepsilon .$$

De esto y los teoremas deducimos, como ocurría en $\mathbf{R}$, que muchísimos campos escalares lo son en todos o en casi todos los puntos a simple vista y que no se necesita, por tanto, la definición casi nunca. Por ejemplo, son obviamente continuas en todo $\mathbf{R}^2$ todas las funciones polinómicas dibujadas en los ejemplos 1-4 de la sección 1.2 anterior, pues son sumas de productos de funciones continuas.

También se puede asegurar sin más que son continuas en todo su dominio:

$$f(x,y)=\frac{xy-x^2}{y^2+3} \quad \text{(cociente de polinomios en } xy \text{ con denominador no nulo)}$$

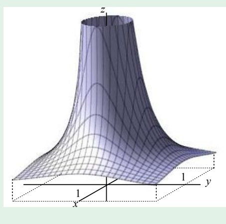
$$h(x,y,x)=\mathrm{e}^{xyz} \quad \big(\text{composición del campo } f(x,y,z)=xyz \text{ y la continua } g(z)=\mathrm{e}^z\big).$$

También es continua en $\mathbf{R}^2$ la $k(x,y)=\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ del ejemplo 6 de 1.2 ($\sqrt{z}$ lo es para z positivos). Y también lo es la $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ del 5 en todo su dominio $\|(x,y)\|\le R$, borde incluido, donde se usaría la definición de continuidad en los puntos frontera.

No es difícil analizar tampoco nuestra primera función discontinua (el ejemplo 7):

Ej 1. $i(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ es claramente continua para $(x,y)\neq(0,0)$, que es el único punto en el que se anula su denominador. Y también es claro que no tiene límite en ese punto y que 'tiende a ∞' (o sea, para $\mathbf{x}$ en un entorno $B^*_\delta(\mathbf{0})$ será $i(\mathbf{x})>K$ para cualquier K dado, siendo δ suficientemente pequeño).

[Hay teoremas como en $\mathbf{R}$ que precisan el esquema "$\frac{1}{+0}=\infty$" (algo positivo dividido por algo que tiende a 0 y es positivo tiende a ∞). No olvidemos el **falso** $1/0=\infty$.]



Sólo hay que detenerse a mirar la continuidad en algunos puntos patológicos (lo mismo que se hacía en $\mathbf{R}$). Pero aquí el análisis de estos puntos muchas veces se complica bastante. El concepto de límite en varias variables presenta algunas sutilezas que no aparecen en el de una variable. Veamos más ejemplos en $\mathbf{R}^2$ para ir aprendiendo algunas de las técnicas:

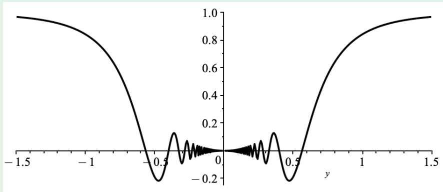
Ej 2. $h(x,y)=(x^2+y^2)\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}$, con $h(0,0)=0$, es también obviamente continua si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

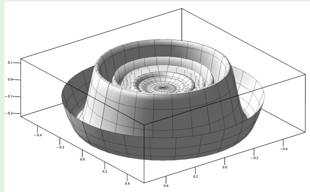
Para ver que lo es además en el origen se puede utilizar en este caso poco complicado la definición

$$\left|h(x,y)-h(0,0)\right|\leq|x^2+y^2|<\varepsilon \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\sqrt{\varepsilon}\ ,$$

o mirarla como composición de la conocida continua $g(x)=x\,\text{sen}\frac{1}{x}$ y el campo $f(x,y)=x^2+y^2$, o incluso utilizar que sigue siendo aquí cierto (y es fácil de probar) que 'cero $\times$ acotado $=$ cero'.

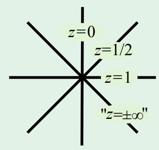
[La gráfica de la superficie de revolución es el giro de su corte con $x=0$ que es la curva de la izquierda].





Ej 3. El ejemplo 9 de 1.2: $r(x,y)=\frac{x}{x+y}$ es evidentemente continua todo (x,y) tal que $x+y\neq 0$.

Que no tiene límite en el origen es muy claro a la vista de las curvas de nivel: tan cerca del punto como queramos (por pequeño que sea el δ) hay puntos en los que r vale 0 , otros en los que vale $1/2$, en otros 1 , ...

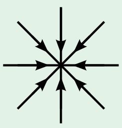


¿Existe el límite en algún otro punto $(a,-a)$? Tampoco, porque cerca de cada uno [el (0,0) incluido] r toma valores tan grandes (y tan pequeños) como queramos, como nos aseguran, por ejemplo, las secciones con cada $x=a\neq 0$: $z=\frac{a}{a+y}$ que tienen asíntota vertical en $y=-a$.

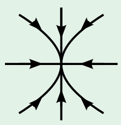
Ej 4. $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, con $f(0,0)=0$ vuelve a ser continua claramente si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. ¿Lo es en $(0,0)$?

Vamos a acercarnos al origen a lo largo de diferentes curvas.

Empezamos con las rectas $y=mx$: $f(x,mx)=\frac{m^2x}{1+m^4x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}0$.

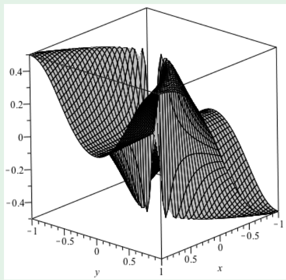


Pero esto no es la definición del límite en $\mathbf{R}^2$.



La f pide más las **parábolas** $x=py^2$: $f(py^2,y)=\frac{p}{p^2+1}$.

Tan cerca como se quiera del origen hay puntos en los que el campo vale, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ $(p=1)$. **Discontinua** en $\mathbf{0}$.



[Dibujada con un ordenador, presenta f el aspecto feo del dibujo de la derecha].

Acercarse al punto problemático siguiendo diferentes curvas y obtener siempre el mismo límite **no prueba** nunca la existencia del límite en $\mathbf{R}^n$, pues existen otras infinitas formas distintas de hacerlo. Con estos cálculos lo que se consigue a veces (como en el ejemplo anterior) es probar que no existe obteniendo límites distintos entre sí, o diferentes del valor de la función en el punto, o curvas sobre las que no hay límite. Y para los límites de una variable se tienen además las técnicas ya conocidas.

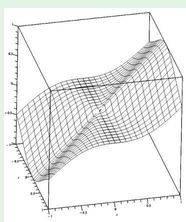
Para calcular límites (y analizar la continuidad) en $(0,0)$ a veces es útil (pero en general lo complica) utilizar las **coordenadas polares**: $x=r\cos\theta$, $y=\text{sen}\,\theta$:

Ej 5. Sea $f(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. ¿Es continua en $(0,0)$? Con su expresión polar $f(r,\theta)=r\,\text{sen}^3\theta$, queda claro que cerca del origen se puede hacer tan pequeño como queramos:

$$\left|f(r,\theta)-0\right|=r\left|\text{sen}^3\theta\right|\leq r<\varepsilon \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\|=r<\delta=\varepsilon\ .$$

Usar cartesianas exige más vista:

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}-0\right|=|x|\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon \text{ si } \|(x,y)\|<\delta=\varepsilon\ .$$



Adjuntamos dibujo de maple. Es continua pero con algún pliegue raro.
[Esta función no será diferenciable en el origen].

Generalicemos la idea del cálculo anterior con un teorema:

Teor 2. $\boxed{\text{Si } \left|f(r,\theta)-L\right| \le g(r) \text{ y } g(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ entonces } \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L\,.}$

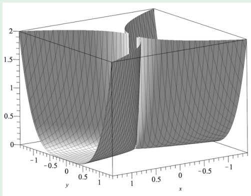
$\big[$Pues $|f(r,\theta)-L|<\varepsilon$ para el δ que garantiza que $|g(r)-0|<\varepsilon\,\big]$.

El teorema **no dice** que el límite exista si $f(r,\theta)\to L$ cuando $r\to 0$, exige que también podamos acotar los términos en θ. Nos da un contraejemplo la $p(x,y)$ dibujada en el ejemplo 8 de 1.2:

Ej 6. Para $p(x,y)=\frac{y^4}{x^2}$, $p(0,y)=0$ se cumple que $p(r,\theta)=r^2\,\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{\cos^2\theta} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ $\big($incluso si $x=0$, $\theta=\pm\frac{\pi}{2}\big)$.

Pero cualquier corte con $y=b$, $z=\frac{b^4}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$ y no tiene límite en $(0,0)$

$\big[$ni en ningún $(0,b)$, pues en ellos esta función positiva se va a infinito, y es obvio que es continua (y tiene límite) en cualquier (a,b), $a\neq 0\,\big]$.



$\big[$Que $f(r,\theta) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ viene a equivaler a que el límite acercándonos por rectas sea 0. En este caso es $p(x,mx)=m^4x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ que, desde luego, no dice que p tienda a $0\,\big]$.

Nuestros últimos ejemplos serán en $\mathbf{R}^3$, con técnicas análogas a las de $n=2$ (aunque sin dibujos).

Ej 7. Estudiemos la continuidad en $\mathbf{0}=(0,0,0)$ de $F(x,y,z)=\frac{3x^m}{x^2+y^2+4z^2}$, $F(\mathbf{0})=0$, para $m=1,2$ y 3.
[En los otros puntos es trivial, por ser el denominador no nulo].

En primer lugar, observemos que para $m=1$ es **discontinua**, pues $F(x,0,0)=\frac{3}{x}\to\pm\infty$ si $x\to 0^{\pm}$.

Obtengamos ahora información, ya con $m\ge 2$, al acercarnos por distintas rectas (at,bt,ct), $t\to 0$:

$F(at,bt,ct)=\frac{3a^m\,t^{m-2}}{a^2+b^2+4c^2}$. Si $m=2$, F toma valores distintos sobre cada una y es **discontinua**. Para $m=3$, la F tiende a 0 cuando $t\to 0$ y **puede ser** F **continua**.

Ya con $m=3$, si no estuviese el 4 acompañando al z^2 las coordenadas esféricas cumplirían aquí el papel sencillo de las polares del plano. El cálculo se complica, pero se puede usar hasta la definición para probar la continuidad en este último caso:

$$\left|F(x,y,z)-0\right|=|x|\,\frac{3x^2}{x^2+y^2+4z^2}\le 3|x|\le 3\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\varepsilon \text{ si } \|(x,y,z)\|<\delta=\tfrac{\varepsilon}{3}\,.$$

[En estos cocientes de polinomios en los que el denominador sólo se anula en un punto la idea es que el campo será continuo cuando todas las potencias del numerador son mayores].

Acabamos la sección admitiendo el siguiente importante teorema sobre continuidad en conjuntos compactos que generaliza el conocido resultado del cálculo en $\mathbf{R}$ para funciones continuas en intervalos cerrados:

Teor 3. $\boxed{f \text{ continua en un compacto } A \Rightarrow f \text{ alcanza sus valores máximo y mínimo en } A\,.}$

$\big[$Si f no es continua, o A no es cerrado o no acotado es fácil dar ejemplos en los que alguno de los extremos no se alcanza. La i discontinua del ejemplo 1 no tiene máximo en cualquier compacto que contenga el origen. Cualquier plano inclinado no alcanza su máximo ni su mínimo en la no cerrada bola unidad $B_1(\mathbf{0})$, ni en el no acotado espacio $\mathbf{R}^2\,\big]$.

[Para calcular esos extremos, como en $\mathbf{R}$, acudiremos a derivadas (en el capítulo 3)].