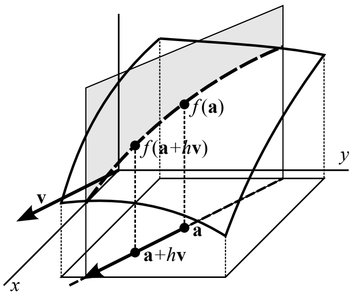
2. Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

2.1 Derivadas de campos escalares

Derivadas direcionales, derivadas parciales y gradiente

Sean $f: D\subset\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ y $\mathbf{a}\in int\, D$ para que f esté definida en un entorno de $\mathbf{a}$. Para hallar la derivada en $\mathbf{R}$ se usan los valores de f en a y en puntos cercanos $a{+}h$. En $\mathbf{R}^n$ hay puntos en cualquier dirección. Miremos cómo varía f a lo largo de una recta que pase por $\mathbf{a}$ (dada por un vector $\mathbf{v}$), es decir, en $\mathbf{R}^2$, la variación de la función de una variable obtenida al cortar su gráfica con un plano vertical que pase por $\mathbf{a}$. Definimos entonces:



La **derivada según el vector v** de f en un punto $\mathbf{a}$ es:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) \equiv f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\,\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{h} \quad \text{(si existe).}$$

Cuando $\mathbf{v}$ es **unitario** se le llama **derivada direccional** (de f en la dirección del vector $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{a}$).

[Es la derivada de la función de una variable $f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$ en $t=0$].

Veremos pronto formas cortas de hallar estas derivadas, pero por ahora sólo utilizamos la definición:

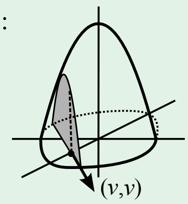
Ej 1a. Hallemos la derivada de $\boxed{f(x,y)=4-x^2-4y^2}$ en $(1,0)$ según el vector (v,v):

$$D_{\mathbf{v}}f(1,0) = \lim_{h\to 0}\frac{4-(1+hv)^2-4(hv)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2hv-5h^2v^2}{h} = -2v\,.$$

[O bien, si $h(t)=f(1+tv,tv)=3-2tv-5t^2v^2$ es $h'(0)=-2v$].

En particular, en ese punto son: $D_{(1,1)}=-2$, $D_{(2,2)}=-4$, $D_{(-1,-1)}=2, \dots$

Las dos derivadas direccionales son $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,0)=-\sqrt{2}$ y $D_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,0)=\sqrt{2}$.



El caso más importante aparece al tomar como $\mathbf{v}$ algún vector de la base canónica:

A la derivada de f en la dirección de $\mathbf{e}_k$ se le llama **derivada parcial** de f respecto a x_k:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \equiv f_{x_k}(\mathbf{a}) \equiv D_k f(\mathbf{a}) \equiv D_{\mathbf{e}_k}f(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\dots,a_k+h,\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_k,\dots,a_n)}{h}\,.$$

Es decir, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})$ **es la derivada en el punto** $x=a_k$ **de la función** $g(x)=f(a_1,\dots,x,\dots,a_n)$ **de una sola variable que se obtiene mirando todas las** x_i **constantes menos la** x_k.

En $\mathbf{R}^2$ usaremos las notaciones $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=f_x\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}=f_y}$, y en $\mathbf{R}^3$ además $\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}=f_z}$.

Por tanto, para $\mathbf{R}^2$, $f_x(a,b)$ es la derivada de $f(x,b)$ en $x=a$ y $f_y(a,b)$ la de $f(a,y)$ en $y=b$.

Y el significado geométrico de las derivadas parciales en $\mathbf{R}^2$ es claro: representan las **pendientes de las tangentes a las curvas corte con planos** $x=a$ **o** $y=b$.

Si las parciales existen para cada uno de los $\mathbf{x}\in D$ las $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ son otros n campos escalares.

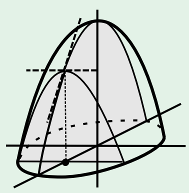
Se dice que **un campo** $f\in C^1$ **en un abierto** D **si sus parciales con continuas** en ese conjunto.

[Se lee 'f es c uno' o 'f es de clase uno' en D y se abrevia $f\in C^1(D)$].

Se llama **gradiente** de f al **vector** $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ y es $\nabla f(\mathbf{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$.

Ej 1b. Si $f(x,y)=4-x^2-4y^2$ es $f_x=-2x$ (4 y $-4y^2$ son constantes en este paso) y es $f_y=-8y$. La f es, pues, C^1 en todo $\mathbf{R}^2$. Y el gradiente es $\nabla f=(-2x,-8y)$.

En particular, son $f_x(1,0)=-2$, $f_y(1,0)=0$, pendientes de las tangentes a las parábolas corte con $y=0$, $x=1$ [$g(x)=4-x^2$ y $g(y)=3-4y^2$] en $x=1$, $y=0$, respectivamente. [$f_x<0$ por decrecer f al crecer x y $f_y=0$ por el máximo].



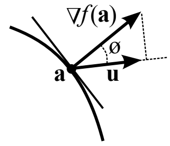
Una vez calculado el ∇f es muy fácil, casi siempre, hallar las derivadas según cualquier vector [la definición inicial, al igual que en $\mathbf{R}$, sólo se necesitará para funciones raras y en algunos puntos]:

Teor 1. $\boxed{\text{Si } f\in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a}\text{, la derivada según el vector } \mathbf{v} \text{ es } D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})=\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}\,.}$

En $\mathbf{R}^2$: $\mathbf{v}=(u,v)$, $\frac{f(a+hu,b+hv)-f(a,b)}{h}=\frac{f(a+hu,b+hv)-f(a,b+hv)}{h}+\frac{f(a,b+hv)-f(a,b)}{hv}v\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f_x(a,b)u+f_y(a,b)v$

$\big[$aplicando el TVM a $g(x)=f(x,b+hv)$ en $[a,a+hu]$, $\exists c$ con $g(a+hu)-g(a)=g'(c)hu$, o sea: $f(a+hu,b+hv)-f(a,b+hv)=f_x(c,b+hv)hu$ y $f_x(c,b+hv)\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f_x(a,b)$ por ser f_x continua$\big]$.

Significado del gradiente: Sea $\nabla f(\mathbf{a})\neq\mathbf{0}$ y sea $\mathbf{u}$ unitario. Según el teorema es $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})=\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}=\|\nabla f(\mathbf{a})\|\cos\phi$. Así que la $D_{\mathbf{u}}$ direccional es la componente del gradiente en la dirección de $\mathbf{u}$. La $D_{\mathbf{u}}$ será máxima cuando $\cos\phi=1$ $\big[$si ambos vectores tienen la misma dirección y sentido, y su valor es $\|\nabla f\|(\mathbf{a})$ $\big]$. **La dirección y sentido de ∇f son aquellos en los que f crece más deprisa**. Si $\cos\phi=0$, será $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})=0$: **en la dirección perpendicular a ∇f el campo no varía**. Así, en $\mathbf{R}^2$, será ∇f **perpendicular a las curvas de nivel de** f (a sus tangentes). [Y en $\mathbf{R}^3$ será perpendicular a las superficies de nivel].

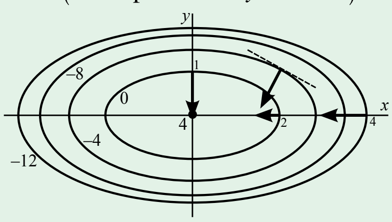


Ej 1c. Para la $f(x,y)=4-x^2-4y^2$, ya es muy fácil hallar las $D_{\mathbf{v}}$ del Ej 1a: $\nabla f=(-2x,-8y)$ $\Rightarrow$

$$D_{(1,1)}f(1,0)=(-2,0)\cdot(1,1)=-2\,,\quad D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}f(1,0)=(-2,0)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}\,,\ \ldots$$

Dibujemos ahora algunos vectores gradientes y algunas curvas de nivel $\big($las elipses $x^2+4y^2=4-C\big)$.

Se dibuja ∇f en los puntos $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$ y $(2,1)$ $\big[$vectores, a escala, $(-4,0)$, $(-8,0)$, $(0,-8)$ y $(-4,-8)$ $\big]$ y las curvas para $C=4,0,-4,-8,-12$.



Viendo la gráfica de f como una montaña, ∇f indica la máxima pendiente. Entre las derivadas direccionales en $(2,1)$ es máxima la fijada por ∇f, es decir, en la dirección de

$\mathbf{u}=(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})$ $\big[$y el valor máximo es $D_{\mathbf{v}}f(2,1)=\nabla f(2,1)\cdot\mathbf{u}=4\sqrt{5}=\|\nabla f(2,1)\|$ $\big]$.

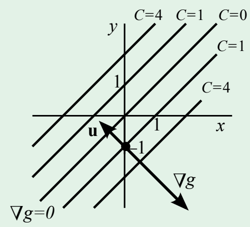
Es mínima en la dirección opuesta al gradiente: $\mathbf{u}=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$ $\big[$su valor será $-4\sqrt{5}$ $\big]$.

Será nula en la dirección de los vectores perpendiculares a ∇f $\big[$ $(2,-1)$ o $(-2,1)$ $\big]$, vectores que son tangentes a la elipse de nivel $x^2+4y^2=8$ que pasa por el punto $(2,1)$.

Ej 2. Hacemos cálculos similares a los del **Ej 1c** para el campo del Ej 3 de 1.2: $g(x,y)=(x-y)^2$.

Aquí es $\nabla g(x,y)=\big(2x-2y\,,2y-2x\big)=2(x-y)(1,-1)$.

$\big[$Vector perpenticular a las rectas de nivel que apunta hacia donde crece g con módulo $2\sqrt{2}\,|x-y|$ mayor según nos alejemos de la recta $y=x$ $\big]$.



En el punto $(0,-1)$ el vector ∇g es $(2,-2)$. El vector unitario $\mathbf{u}$ para el que es, por ejemplo, mínima la derivada direccional en el punto es:

$\mathbf{u}=\big(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ $\big[$pues $(-1,1)$, de módulo $\sqrt{2}$, es opuesto al ∇g $\big]$.

$\big[$La derivada mínima será $D_{\mathbf{u}}\,g(0,-1)=(2,-2)\cdot\mathbf{u}=-2\sqrt{2}=-\|\nabla g\|=\|\nabla g\|\,\|\mathbf{u}\|\cos\pi$ $\big]$.

[Obsérvese que $\nabla g=\mathbf{0}$ sobre $y=x$: los cortes con $x=a$ e $y=b$ son parábolas con mínimos ahí].

Ej 3. Los cálculos y significados son análogos en $\mathbf{R}^3$. Para $f(x,y,z)=x^2y-\cos(yz)$ es:

$\nabla f(x,y,z)=(f_x,f_y,f_z)=\big(2xy,x^2+z\,\text{sen}(yz),y\,\text{sen}(yz)\big)$. En particular es $\nabla f(1,1,0)=(2,1,0)$.

La derivada de f en el punto $\mathbf{a}=(1,1,0)$ según el vector $\mathbf{v}=(1,-1,2)$ es $(2,1,0)\cdot(1,-1,2)=1$.

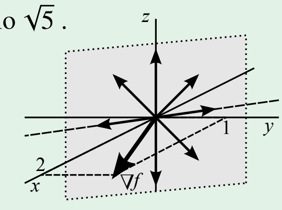
Si buscamos la derivada direccional debemos dividir por el módulo: $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v}\ \to\ D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

La $D_{\mathbf{u}}$ máxima es en la dirección y sentido de ∇f y su valor es su módulo $\sqrt{5}$.

Es $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})=0$ en la dirección de todo $\mathbf{v}=(a,b,c)$ perpendicular a ∇f, que ahora no forman una recta, sino un plano. Si es perpendicular:

$(2,1,0)\cdot(a,b,c)=2a+b=0\ \to\ \mathbf{v}=(a,-2a,c)\,,\ \|\mathbf{v}\|=\sqrt{5a^2+c^2}\ \to$

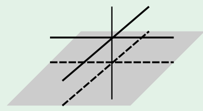
$\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{5a^2+c^2}}(a,-2a,c)$. Un par de $\mathbf{u}$ son: $(0,0,1)$ y $\big(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\big)$.



Diferencial de campos escalares y plano tangente

En $\mathbf{R}$ se tenía 'derivable $\Rightarrow$ continua'. En $\mathbf{R}^n$ la existencia de las parciales **no** implica la continuidad:

Ej 4. Para $f(x,y)=\begin{cases}1 \text{ si } x=0 \text{ o } y=0\\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}$ se tiene que $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,
(son derivadas de la función constante 1)
pero la función es claramente discontinua en el origen.



Ni siquiera la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto implica que sea continua [se precisa una definición, la diferencial, que recoja información globlal de todos los puntos cercanos a $\mathbf{a}$]:

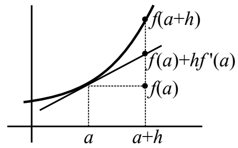
Ej 5. $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0,0)=0$ del Ej 4 de 1.3, que era discontinua en $(0,0)$ [se vio usando parábolas], tiene, sin embargo, derivadas según cualquier vector $\mathbf{v}=(u,v)$ en ese punto, ya que:

$$f(tu,tv)=\frac{uv^2t}{u^2+v^4t^2} \text{ es derivable para todo } u,v \text{ en } t=0 \text{ [también lo es si } u \text{ o } v \text{ son } 0\text{]}.$$

Una función en $\mathbf{R}$ era derivable si tenía recta tangente. En $\mathbf{R}^2$ **será diferenciable si posee plano tangente**. Reescribimos la definición de derivada:

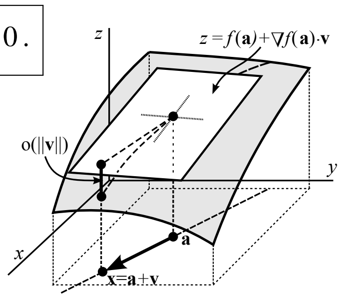
$$f \text{ derivable en } a \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}\underset{\uparrow}{=}0 \Leftrightarrow f(a+h)=f(a)+f'(a)\,h+o(h)\,.$$

si el numerador es $o(h)$



En $\mathbf{R}^n$ ser diferenciable será casi lo mismo, con el gradiente ocupando el lugar de la derivada. Como en $\mathbf{R}$, la notación $g(\mathbf{x})=o(\|\mathbf{x}\|)$ significa que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{g(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|}=0$.

$$\boxed{f \text{ es } \textbf{diferenciable} \text{ en } \mathbf{a} \text{ si existe } \nabla f(\mathbf{a}) \text{ y } \frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})-\nabla f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\underset{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}{\longrightarrow}0\,.}$$



O sea, llamando $\mathbf{v}=\mathbf{x}-\mathbf{a}$, lo es si $\boxed{f(\mathbf{a}+\mathbf{v})=f(\mathbf{a})+\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}+o(\|\mathbf{v}\|)}$.

Cuando $n=2$, si son $\mathbf{a}=(a,b)$ y $\mathbf{v}=(u,v)$, f será diferenciable si cerca de (a,b) es $f(x,y)=f(\mathbf{a})+f_x(\mathbf{a})u+f_y(\mathbf{a})v+o(\|\mathbf{v}\|)$, es decir, cuando su gráfica se parece a la de un plano $z=k+c_1(x-a)+c_2(y-b)$.

En idioma algebraico, f es diferenciable en $\mathbf{a}$ si una 'aplicación lineal' $df_{\mathbf{a}}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, llamada **diferencial** de f , la aproxima cerca del punto $\mathbf{a}$: $f(\mathbf{a}+\mathbf{v})=f(\mathbf{a})+df_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})+o(\|\mathbf{v}\|)$. Los n números que dan una aplicación lineal son aquí las parciales en $\mathbf{a}$, es decir, el gradiente. Abusando algo del lenguaje diríamos que, si f es diferenciable 'su diferencial es ∇f' .

Si f es diferenciable parece que existirán todas las derivadas direccionales y que va a ser continua.

Teor 2.

$$\boxed{f \text{ diferenciable en } \mathbf{a} \Rightarrow \text{existe } D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})\ \forall\mathbf{v}, \text{ es } D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})=\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v} \text{ y } f \text{ es continua en } \mathbf{a}\,.}$$

$$\text{Si } f \text{ diferenciable, } \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{h}=\frac{\nabla f(\mathbf{a})\cdot h\mathbf{v}+o(\|h\mathbf{v}\|)}{h}=\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}+\frac{o(\|h\mathbf{v}\|)}{\|h\mathbf{v}\|}\frac{|h|\|\mathbf{v}\|}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}\,.$$

$$\big|f(\mathbf{a}+\mathbf{v})-f(\mathbf{a})\big|\le\|\nabla f(\mathbf{a})\|\|\mathbf{v}\|+\big|o(\|\mathbf{v}\|)\big|\underset{\mathbf{v}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow}0 \Leftrightarrow f(\mathbf{x})\underset{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}{\longrightarrow}f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow f \text{ continua en } \mathbf{a}\,.$$

¿Cómo saber en la práctica si un campo f es diferenciable? Con la siguiente **condición suficiente** (demostrada en los libros de cálculo en $\mathbf{R}^n$) es inmediato en la mayoría de los casos:

Teor 3. $\boxed{f\in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a} \Rightarrow f \text{ diferenciable en } \mathbf{a}\,.}$

Ej 1d. La $f(x,y)=4-x^2-4y^2$ de siempre, que es C^1 en $\mathbf{R}^2$, es diferenciable, pues, en cada punto.
En particular, en $(2,1)$, con $f(2,1)=-4$ y $\nabla f(2,1)=(-4,-8)$ se tiene entonces que

$$f(2+u,1+w)=-4-4u-8v+o\big(\sqrt{u^2+v^2}\big) \Leftrightarrow f(x,y)=-4-4(x-2)-8(y-1)+o\big(\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\big)\,.$$

Ej 3b. Para $f(x,y,z)=x^2y-\cos(yz)$, como $f_x=2xy$, $f_y=x^2+z\,\mathrm{sen}(yz)$ y $f_z=y\,\mathrm{sen}(yz)$ son continuas $\forall(x,y,z)$, será f diferenciable en todos los puntos de $\mathbf{R}^3$ y todo es fácil de calcular.
Por ejemplo, cerca de $(1,1,0)$ tenemos esta buena aproximación para f :

$$f(1+u,1+v,w)\approx f(1,1,0)+\nabla f(1,1,0)\cdot(u,v,w)=0+(2,1,0)\cdot(u,v,w)=2u+v\,.$$

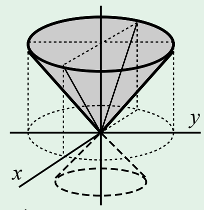
[Con una calculadora: $f(1.01,1.01,0.01)\approx 0.0303$, $f(1.1,1.1,0.1)\approx 0.337$, parecidos a 0.03 y 0.3].

Analizar la diferenciabilidad en puntos problemáticos normalmente, como pasaba con la continuidad, no es sencillo. Al igual que en continuidad, es muchas veces fácil ver que una f no es diferenciable (viendo que no se cumple algo que implica la diferenciabilidad) y más complicado es probar que sí lo es.

Por ejemplo, es inmediato afirmar que las funciones de los ejemplos 4 y 5 **no son diferenciables** en el origen, **porque no son continuas** en dicho punto, y deben serlo según el teorema 2.

Una f diferenciable debe tener todas las derivadas direccionales en el punto, con lo que tampoco lo puede ser, por ejemplo, una f para la que alguna derivada parcial no exista:

Ej 6. ¿Es diferenciable $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$? (mitad superior del cono $z^2=x^2+y^2$).



Lo es claramente en cualquier punto distinto del $(0,0)$ por ser continuas sus derivadas parciales $f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ¿Qué ocurre en el origen?

Sobre los ejes son $f(x,0)=|x|$ y $f(0,y)=|y|$, funciones no derivables en 0 .
No existen ni $f_x(0,0)$ ni $f_y(0,0)$ (ni ninguna direccional). No es diferenciable.

(Claramente no hay plano tangente en el origen y sí lo hay en cualquier otro punto).

Sólo en contadas ocasiones y en algunos puntos habrá que acudir a la definición de diferencial:

Ej 7. ¿Es $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$ (Ej 5 de 1.3) diferenciable en $(0,0)$? (en cualquier otro punto sí).

Vimos que era continua. Además: $f(x,0)=x \Rightarrow f_x(0,0)=1$, $f(0,y)=0 \Rightarrow f_y(0,0)=0$.

Para ser diferenciable, debe tener límite cuando $(x,y)\to(0,0)$:

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^3(x^2+y^2)^{-1}-x}{(x^2+y^2)^{1/2}}=\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} ,$$

pero el límite no existe, ya que sobre las rectas $y=mx$ su valor $\frac{-m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$ es distinto para cada m .

Ej 8. $f(x,y)=\frac{x^4}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$ sí es diferenciable en $(0,0)$. El polares la continuidad es fácil:

$$\big|f(r,\theta)-0\big|=r^2\cos^4\theta\le r^2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f \text{ continua en } \mathbf{0} .$$

Y tambien existen las parciales (una vez más tenemos que acudir a la definición):

$$f(x,0)=x^2 \Rightarrow f_x(0,0)=2x\big|_{x=0}=0 ,\ f(0,y)=0 \Rightarrow f_y(0,0)=0 . \text{ Es decir, } \nabla f(0,0)=\mathbf{0} .$$

Sólo falta comprobar que: $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{0})-\mathbf{0}\cdot\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$ (que es fácil en polares).

Ej 9. $f(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Ya vimos (Ej 2 de 1.3) que era continua en el origen.

Para ver si es diferenciable comenzamos hallando sus parciales en el origen:

$$f(x,0)=x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x^2} \Rightarrow f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}(h^{-2})-0}{h}=\lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}\frac{1}{h^2}=0 \ \ (0\times \mathit{acotado}).$$

Análogamente, $f_y(0,0)=0$. Como $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{x})-0-0}{\|\mathbf{x}\|}=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}=0$ es diferenciable.

Hagamos un resumen de todas las implicaciones que hemos ido viendo anteriormente:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{C^1 \text{ en un entorno}} & \underset{1}{\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}} & \boxed{\text{diferenciable}} & \underset{2}{\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}} & \boxed{\text{existen todas las DD}} \\
 & & \Downarrow\not\Uparrow 3 & 7 \nearrow\!\!\!\!/ \ \swarrow\!\!\!\!/ \, 8 & \Downarrow\not\Uparrow 4 \\
 & & \boxed{\text{continua}} & \underset{6}{\overset{5}{\rightleftarrows}} & \boxed{\text{existen las parciales}}
\end{array}$$

Todas las flechas son falsas si $n>1$ (para $n=1$ son 2 y 4 trivialmente ciertas). Demos contraejemplos para cada una de ellas (la mayoría ya se han analizado):

1. $f(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$ (Ej 9) es diferenciable pero no C^1 , pues, por ejemplo,
$$f_x=2x\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \text{ no tiene límite en } (0,0) .$$

4,6. $f(x,y)=\begin{cases}1 \text{ si } x=0 \text{ o } y=0\\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}$ (Ej 4), con parciales en el origen, discontinua y sin más DD.

2,6,8. $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0,0)=0$ (Ej 5) tiene todas las DD, es discontinua y no es diferenciable.

3,5,7. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (cono), es continua pero sin ninguna DD (y no es diferenciable).

Volvamos al plano tangente. De la discusión sobre diferenciabilidad se deduce para $\mathbf{R}^2$ que si f es diferenciable, el **plano tangente** a la gráfica de f en el punto (a,b) es:

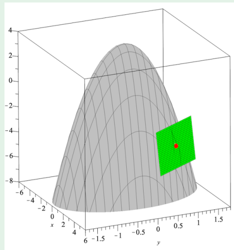
$$\boxed{z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)}\,.$$

Ej 1e. Calculemos el plano tangente en $(2,1)$ a la superficie descrita por la muy analizada función $f(x,y)=4-x^2-4y^2$:

$$f(2,1)=-4\,,\ \nabla f(2,1)=(-4,-8)\ \rightarrow\ z=-4-4(x-2)-8(y-1)\,.$$

Es decir: $\boxed{z=12-4x-8y}$ (bastaba quitar el o del ejemplo 1d).

[Dibujamos con Maple, para comprobar la tangencia, la superficie (en gris) para $-6\leq x\leq 6$, $-1.8\leq y\leq 1.8$, $-8\leq z\leq 4$, y el plano tangente (en verde)].



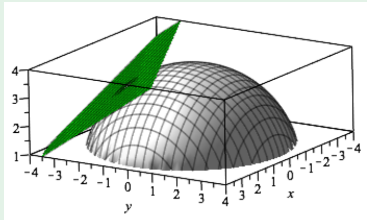
Como en $\mathbf{R}^3$ es ∇F perpendicular a las superficies de nivel, esto nos da un modo de hallar el **plano tangente en un punto** (a,b,c) **de una superficie** S **dada en la forma** $F(x,y,z)=K$:

$$\boxed{\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0}\quad\left[\text{si } \nabla F\neq 0\right]$$

Ej 10. Por ejemplo, hallemos el plano tangente en $(1,-2,3)$ a la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=14$:

$$\nabla F(1,-2,3)=(2x,2y,2z)\big|_{(1,-2,3)}=(2,-4,6)\ \rightarrow$$

$$2(x-1)-4(y+2)+6(z-3)=0\text{ , o bien, }\ \boxed{z=\tfrac{1}{3}(14-x+2y)}\,.$$



Más largo es hallar el plano tangente a $z=+\sqrt{14-x^2-y^2}$ usando la fórmula de más arriba: $z_x=\frac{-x}{\sqrt{\ }}$, $z_y=\frac{-y}{\sqrt{\ }}$,

$$z_x(1,-2)=-\tfrac{1}{3}\,,\ z_y(1,-2)=\tfrac{2}{3}\ \rightarrow\ z=3-\tfrac{1}{3}(x-1)+\tfrac{2}{3}(y+2)\ \uparrow$$

La segunda expresión del plano tangente permite hallarlo incluso en los casos en que, a diferencia del ejemplo anterior, no se pueda despejar la z (lo difícil en esos casos no suele ser hallar el plano tangente, sino encontrar puntos de la superficie):

Ej 11. Sea $F(x,y,z)=x^2e^{2y+2}+4\,\mathrm{sen}(x+2z)+2z^2$. Hallemos el plano tangente y la recta normal a la superficie $F(x,y,z)=6$ en el punto $(2,-1,-1)$.

$$\nabla F(x,y,z)=\left(2x\,e^{2y+2}+4\cos(x+2z)\,,\,2x^2e^{2y+2}\,,\,8\cos(x+2z)+4z\right).$$

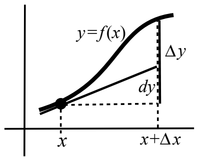
$$\nabla F(2,-1,-1)=(8,8,4)=4(2,2,1)\ \text{[usamos el vector normal más sencillo].}$$

El plano tangente es, pues: $2(x-2)+2(y+1)+(z+1)=0$, o más compacto, $\boxed{2x+2y+z=1}$.

Y la recta normal será: $\boxed{\mathbf{x}=(2t+2,2t-1,t-1)}$ (conocemos un punto y el vector director).

Hagamos ahora unos pequeños comentarios sobre la '**diferencial de los físicos**', empezando con las f derivables de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Con la notación de la sección podemos poner:

$$df_x(h)=f'(x)\,h\ \text{ o }\ df_x(\Delta x)=f'(x)\Delta x\,,\ \text{ y es }\ \Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)\,.$$



O, llamando $dy=f'(x)\Delta x$ al incremento de la parte lineal: $\Delta y=dy+o(\Delta x)$, y cuando Δx es pequeño se comete poco error tomando dy en lugar de Δy .

No es raro ver escrito simplemente $dy=f'(x)\,dx$, interpretando dy como un 'incremento infinitesimal' de la y para otro dx de la x . Se está sustituyendo entonces sin decirlo Δy por dy , el incremento correspondiente a la función por el correspondiente a la tangente.

En $\mathbf{R}^2$, para una $z=f(x,y)$ diferenciable (si no, carece de sentido), no es impreciso escribir:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

y se parecen, para Δx , Δy pequeños, Δz y el incremento de la parte lineal $dz=df_{(x,y)}(\Delta x,\Delta y)$. (O, lo que es lo mismo, se parecen la función y su plano tangente).

Pero sí vuelve a ser impreciso escribir simplemente $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ o $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$, típico de los físicos, suponiendo que los incrementos son 'infinitesimales'. dz no es simplemente un número pequeño, es el incremento correspondiente a una aplicación lineal (la diferencial).

Derivadas de orden superior y desarrollos de Taylor

Si las $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existen para todos los $\mathbf{x}\in D$ obtenemos n nuevos campos escalares $\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ que podemos volver a derivar consiguiendo las **derivadas parciales de orden** $2,3,\dots$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\Big]\equiv\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k\partial x_j}\equiv f_{x_jx_k}(\mathbf{x})\equiv D_{jk}f(\mathbf{x})\,,\ \dots$$

Ej 12. Si $f(x,y)=x^2\,\mathrm{e}^{-2y}$, sus derivadas primeras $\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=2x\,\mathrm{e}^{-2y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=-2x^2\mathrm{e}^{-2y}$ vuelven a tener derivadas parciales $\forall(x,y)$, con lo que tiene sentido calcular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=2\,\mathrm{e}^{-2y},\ \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\Big]=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}=-4x\,\mathrm{e}^{-2y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx}=-4x\,\mathrm{e}^{-2y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=4x^2\mathrm{e}^{-2y}.$$

Y podríamos seguir calculando derivadas: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=f_{xxx}=0\,,\dots,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=f_{yyy}=-8x^2\mathrm{e}^{-2y}\,,\dots$

Ej 13. Probemos que $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4t}$ es solución de $u_t-u_{xx}=0$ ('ecuación del calor en la recta').

$$u_t=-\tfrac{1}{2}\,t^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/4t}+t^{-1/2}\tfrac{1}{4}\,x^2\,t^{-2}\,\mathrm{e}^{-x^2/4t}=\frac{x^2-2t}{4\,t^{5/2}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4t}\,,\quad u_x=-\tfrac{1}{2}\,x\,t^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/4t}\,,$$

$$u_{xx}=-\tfrac{1}{2}\,t^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/4t}+\tfrac{1}{2}\,x\,t^{-3/2}\,\tfrac{1}{2}\,x\,t^{-2}\,\mathrm{e}^{-x^2/4t}=\frac{x^2-2t}{4\,t^{5/2}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4t}\,.\ \text{Por tanto,}\ u_t-u_{xx}=0\,.$$

Ej 3c. Si $f(x,y,z)=x^2y-\cos(yz)$ ya vimos que $f_x=2xy$, $f_y=x^2+z\,\mathrm{sen}(yz)$, $f_z=y\,\mathrm{sen}(yz)$ $\Rightarrow$

$f_{xx}=2y$, $f_{xy}=2x$, $f_{xz}=0$; $\quad f_{yx}=2x$, $f_{yy}=z^2\cos(yz)$, $f_{yz}=\mathrm{sen}(yz)+yz\cos(yz)$;

$f_{zx}=0$, $f_{zy}=\mathrm{sen}(yz)+yz\cos(yz)$, $f_{zz}=y^2\cos(yz)$. Algunas derivadas coinciden (no es casual).

Se dice que $f\in C^n$ en D abierto si sus derivadas parciales hasta orden n son continuas en D.

Igualdad de Schwarz o de Clairaut: $\boxed{\text{Si } f\in C^2 \text{ en un entorno de } \mathbf{a}\ \Rightarrow\ D_{kj}f(\mathbf{a})=D_{jk}f(\mathbf{a})\,,\ j,k=1,\dots,n\,.}$

[La demostración (ver libros), utiliza, como en otros casos, el teorema del valor medio en una variable].

Al igual que muchas funciones $f(x)$ se pueden aproximar por polinomios y desarrollar en serie de **Taylor** en torno a un punto, se ve en los libros de varias variables que los campos escalares f admiten también estos desarrollos. La diferencial representa el desarrollo de Taylor de orden 1. Sólo escribimos el polinomio de orden 2 de una f de dos variables, sin expresiones del resto:

Teor 4. Si $f\in C^2$ en un entorno de $\mathbf{a}=(a,b)$ y $\mathbf{x}=(a{+}h,b{+}k)$ está próximo a $\mathbf{a}$, entonces:

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{a})+f_x(\mathbf{a})\,h+f_y(\mathbf{a})\,k+\tfrac{1}{2}\big[f_{xx}(\mathbf{a})\,h^2+2f_{xy}(\mathbf{a})\,hk+f_{yy}(\mathbf{a})\,k^2\big]+o\big(h^2+k^2\big)\,.$$

En ocasiones convendrá escribir el polinomio $P_2(x,y)$ anterior en la forma más desarrollada:

$$f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\tfrac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2+f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+\tfrac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$$

y en muchas, más que calcular derivadas, serán más útiles los desarrollos conocidos de una variable.

Ej 12*. Hallemos el desarrollo de orden 2 de $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-2y}$ en torno a los puntos $(0,0)$ y $(-1,1)$:

El primero es casi inmediato: $f(x,y)=x^2(1-2y+2y^2+\cdots)=x^2+o(x^2+y^2)$

$\big[$coherente con el hecho de que la única derivada no nula es $f_{xx}(0,0)=2\,\big]$.

$f(-1,1)=\mathrm{e}^{-2}$, $f_x(-1,1)=f_y(-1,1)=-f_{xx}(-1,1)=-2\mathrm{e}^{-2}$, $f_{yy}(-1,1)=f_{xy}(-1,1)=4\mathrm{e}^{-2}$ $\rightarrow$

$$f(x,y)\approx\mathrm{e}^{-2}\big[1-2(x+1)-2(y-1)+(x+1)^2+4(x+1)(y-1)+2(y-1)^2\big]\,.$$

$\big[$A lo mismo llegaríamos desarrollando $(1-s)^2\,\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{-2}$ en torno a $(0,0)$, $s=x+1$, $t=y-1\,\big]$.

Además de dar valores aproximados de campos los desarrollos de Taylor permiten tratar límites complicados.

Ej 14. Estudiemos la continuidad y diferencibilidad en $(0,0)$ de $f(x,y)=\frac{1-\cos(2x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f(0,0)=2$.

$\cos(2t)=1-2t^2+\frac{2}{3}t^4-\cdots\ \Rightarrow\ 1-\cos(2x^2+2y^2)=2\big(x^2+y^2\big)^2-\frac{2}{3}\big(x^2+y^2\big)^4+\cdots\ \Rightarrow$

$f(x,y)=2-\frac{2}{3}\big(x^2+y^2\big)^2+\cdots\underset{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow}2$. Es f continua. El desarrollo da también fácil las parciales.

$f(x,0)=\frac{1-\cos(2x^2)}{x^4}=2-\frac{2}{3}x^4+\cdots\ \Rightarrow\ f_x(0,0)=0\ \big[f'(0)$ va con $x\,\big]$. Análogamente $f_y(0,0)=0$.

Para la diferenciabilidad: $\frac{f(\mathbf{x})-2-0}{\|\mathbf{x}\|}=-\frac{2}{3}\big(x^2+y^2\big)^{3/2}+\cdots\underset{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}{\longrightarrow}0\ \Rightarrow$ también es diferenciable.

2.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena

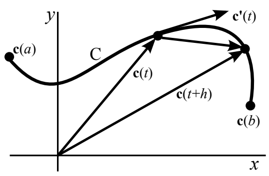
Tratamos funciones cuyos valores no son escalares, sino vectores. Primero el caso más sencillo:

Funciones vectoriales: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{c}: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n \\ \quad t \longrightarrow \mathbf{c}(t) = \big(c_1(t), ..., c_n(t)\big)\end{array}}$. Sus gráficas son **curvas** en $\mathbf{R}^n$.

Bastantes veces nos ocuparemos de $\mathbf{c}$ para t en un intervalo finito: $t \in [a, b]$. Entonces la imagen de $\mathbf{c}$ es una curva finita que une (en ese sentido) el punto $\mathbf{c}(a)$ con el $\mathbf{c}(b)$ [extremos de la curva]. A esa curva orientada la llamaremos también a veces **trayectoria** o **camino**.

Casi siempre trabajaremos en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ y será $\mathbf{c}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ o $\mathbf{c}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

Se dice que $\mathbf{c}$ es continua en un punto o intervalo si lo son sus n componentes $c_1(t), ..., c_n(t)$.
Y es **derivable** si las n lo son y su **derivada** es el vector $\boxed{\mathbf{c}'(t) = (c_1'(t), ..., c_n'(t))}$.



Interpretemos $\mathbf{c}'(t)$ para $n=2$ (o $n=3$). Al ser $\mathbf{c}'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h)-\mathbf{c}(t)}{h}$, la pendiente de la secante tenderá a la **pendiente de la recta tangente** a la curva C descrita por $\mathbf{c}(t)$. Físicamente, si $\mathbf{c}(t)$ describe el movimiento de una partícula a lo largo del tiempo [es decir, si es su vector posición, que se suele llamar $\mathbf{r}(t)$], $\mathbf{c}'(t)$ representa el **vector velocidad** $\mathbf{v}(t)$.

[El escalar $\|\mathbf{c}'(t)\|$ describe la rapidez (velocidad escalar) con la que la partícula avanza por la curva].

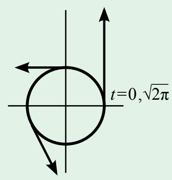
Por tanto, ecuaciones de la **recta tangente** a C en un punto $\mathbf{c}(t_o)$ (si $\mathbf{c}'(t_o) \neq \mathbf{0}$) pueden ser:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{c}(t_o) + t\,\mathbf{c}'(t_o)} \quad \text{o} \quad \boxed{\mathbf{x} = \mathbf{c}(t_o) + (t-t_o)\,\mathbf{c}'(t_o)}$$
[esta toca $\mathbf{c}(t_o)$ cuando $t = t_o$]

[Cuando $\mathbf{c}'(t_o) = \mathbf{0}$ no hay tangente definida y no es extraño que aparezcan picos en la curva].

Si las c_k' vuelven a ser derivables se puede hallar su derivada segunda $\mathbf{c}''(t) = \big(c_1''(t), ..., c_n''(t)\big)$ [que representa el **vector aceleración** $\mathbf{a}(t)$]. Y se pueden definir $\mathbf{c}'''(t)$, $\mathbf{c}^{iv}(t)$, . . .

Ej 1. Sea $\mathbf{c}(t) = \big(\cos t^2, \operatorname{sen} t^2\big)$, con $t \in \big[0, \sqrt{2\pi}\,\big]$. $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}\big(\sqrt{2\pi}\,\big) = (1,0)$.



Por ser $\|\mathbf{c}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t^2 + \operatorname{sen}^2 t^2} = 1$, recorrerá $\mathbf{c}$ la circunferencia unidad.

$\mathbf{c}'(t) = \big(-2t \operatorname{sen} t^2, 2t\cos t^2\big)$ será un vector tangente, y es $\|\mathbf{c}'(t)\| = 2t$

[con lo que este módulo (la velocidad escalar) crece con el tiempo].

[Obsérvese que llega a (0, 1) para $t = \sqrt{\pi/2} \approx 1.25$, y que tarda el doble de tiempo en dar la vuelta entera].

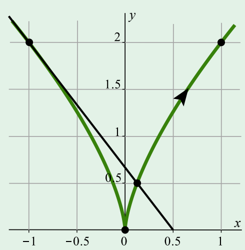
$\mathbf{c}'\big(\sqrt{\pi/2}\,\big) = \big(-\sqrt{2\pi}\,, 0\big) \to \mathbf{x} = \big(-\sqrt{2\pi}\,t\,, 1\big)$ recta tangente en (0,1) [más sencilla $\mathbf{x} = (t\,, 1)$].

El vector aceleración será $\mathbf{c}''(t) = -2\big(-\operatorname{sen} t^2, \cos t^2\big) - 4t^2\big(\cos t^2, \operatorname{sen} t^2\big)$.

[Tiene una componente en la dirección de la velocidad y otra en dirección normal al movimiento, que es algo que se ve que ocurre en general para cualquier $\mathbf{c}$].

[La misma curva se podría describir (de forma más simple) con $\mathbf{c}_*(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$. siendo recorrida en este caso con velocidad $\|\mathbf{c}_*'(t)\| = 1$ constante].

Ej 2. Sea $\mathbf{c}\,(t) = \big(t^3, 2t^2\big)$. Dibujemos la curva descrita por $\mathbf{c}$ para $t \in [-1, 1]$, hallemos su recta tangente en el punto $(-1, 2)$ y el punto en que esta recta tangente vuelve a cortar la curva.



Dando valores a t , o viendo que se puede escribir $y = 2x^{2/3}$ sale el dibujo.

[Cuando $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$ (en el origen) podían aparecer picos y eso fue lo que ocurrió].

El punto se da si $t = -1$: $\mathbf{c}(-1) = (-1, 2)$ y es $\mathbf{c}'(-1) = (3t^2, 4t)\big|_{t=-1} = (3,-4)$.

La recta tangente es: $\mathbf{x}(s) = (3s-1, 2-4s)$ [toca $\big(\frac{1}{2}, 0\big)$ cuando $s = 1/2$].

Corta la curva para t y s que cumplan: $t^3 = 3s-1$, $2t^2 = 2-4s$ $\to$

$(3s-1)^2 = (1-2s)^3$, $8s^3 - 3s^2 = 0$, $s = \frac{3}{8} \to \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\big)$ [y $s = 0 \to (-1, 2)$].

[O bien, la curva $y = 2x^{2/3}$ y la recta $y = \frac{2-4x}{3}$ se cortan si $27x^2 = (1-2x)^3$ que lleva a lo mismo].

Más difícil es, desde luego, dibujar curvas en $\mathbf{R}^3$. Tratamos el ejemplo cásico, la **hélice**:

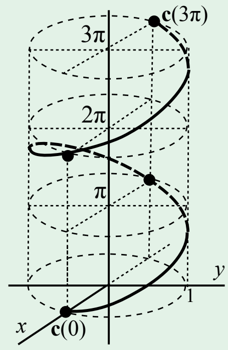
Ej 3. Dibujemos la curva descrita por $\mathbf{c}(t)=\big(\cos t, \operatorname{sen} t, t\big)$, $t\in[0,3\pi]$.

Como es $\big[x(t)\big]^2+\big[y(t)\big]^2=1$, la proyección sobre el plano xy es la circunferencia unidad, mientras que z crece constantemente con t .

El vector velocidad será $\mathbf{c}'(t)=\big(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1\big)$, y es $\|\mathbf{c}'(t)\|=\sqrt{2}$, independiente de t (se recorre la curva a velocidad escalar constante).

Por ejemplo, para $t=2\pi$ $\big[$en el punto $(1,0,2\pi)\big]$ es $\mathbf{c}'(2\pi)=(0,1,1)$ y la recta tangente en ese punto se puede escribir $\mathbf{x}(t)=(1,t,2\pi+t)$.

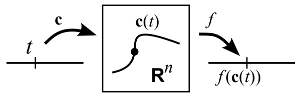
El vector aceleración $\mathbf{c}''(t)=(-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$ no tiene componente vertical y apunta siempre hacia el eje z .



Primer caso de la regla de la cadena.

Las reglas de la cadena en $\mathbf{R}^n$ generalizan la fórmula de una variable $(f\circ g)'(x)=f'\big(g(x)\big)g'(x)$. Empezamos con el caso más sencillo, que une funciones vectoriales y campos escalares:

Teor 1. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Sean } \mathbf{c}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n \text{ y } f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R} \text{ de } C^1 \text{ y sea } h(t)=f\big(\mathbf{c}(t)\big) .\\ \text{Entonces } h \text{ es derivable y es } h'(t)=\nabla f\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot\mathbf{c}'(t) \text{, o sea:}\\ \qquad h'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\mathbf{c}(t)\big)\,x_1'(t)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\mathbf{c}(t)\big)\,x_n'(t) .\end{array}}$



$h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

La última igualdad (por ejemplo cuando $n=2$) se suele escribir en la forma $\boxed{\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}}$,

expresión imprecisa que no deja claro dónde está evaluada cada término [las parciales en $\big(x(t),y(t)\big)$ y las derivadas ordinarias en t] y que mantiene el nombre f para h (pues es la f sobre una curva).

De hecho, h describe la **variación del campo f a lo largo de la curva dada por $\mathbf{c}$**, y de esto se deduce el resultado: en un t_o dado, $h'(t_o)$ mide la variación de f según el vector tangente a la curva en el punto $\mathbf{c}(t_o)$, y esta derivada según el vector viene dada, como sabemos, por $\nabla f\big(\mathbf{c}(t_o)\big)\cdot\mathbf{c}'(t_o)$.

El resultado se podría escribir así: $h'(t)=\underbrace{\nabla f\big(\mathbf{c}(t)\big)\,\mathbf{c}'(t)}_{\text{producto de matrices}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{\mathbf{c}(t)}\begin{pmatrix}x_1'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{pmatrix}$ [esto nos dirá el Teor 3]

Ej 4. Si $\mathbf{c}(t)=\big(t^3,2t^2\big)$, $f(x,y)=\big(y+x^2\big)^2$ y $h=f\circ\mathbf{c}$, hallemos $h'(-1)$ mediante la regla de la cadena.

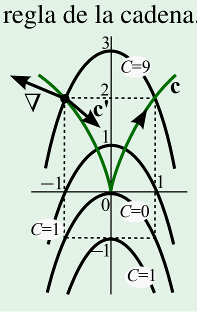
$\mathbf{c}(-1)=(-1,2)$, $\mathbf{c}'(-1)=(3,-4)$, $\nabla f=\big(4x(y+x^2),2(y+x^2)\big)\xrightarrow{(-1,2)}(-12,6)$.

Y por tanto: $h'(-1)=\nabla f\big(\mathbf{c}(-1)\big)\cdot\mathbf{c}'(-1)=(3,-4)\cdot(-12,6)=-60$.

Podemos comprobar el resultado obtenido componiendo y derivando:

$$h(t)=\big(2t^2+t^6\big)^2\ \to\ h'(t)=2\big(2t^2+t^6\big)\big(4t+6t^5\big) ,\ h'(-1)=-60 .$$

$\big[$Que la derivada sea negativa implica que la f decrece al avanzar sobre la curva, como se puede comprobar dibujándola junto a varias curvas de nivel $f=C$, que son parábolas de la forma $y=\pm\sqrt{C}-x^2$ (u observando simplemente el gradiente en el punto)$\big]$.



Si las funciones son más derivables, la regla anterior nos permite hacer derivadas segundas y sucesivas. Por ejemplo, para $n=2$, de la fórmula que da la $h'(t)=f_x\,x'+f_y\,y'$, deducimos la derivada segunda:

$$h''(t)=(f_x)'x'+f_x\,x''+(f_y)'y'+f_y\,y''=f_{xx}\,(x')^2+2f_{xy}\,x'y'+f_{yy}\,(y')^2+f_x\,x''+f_y\,y'' .$$

Ej 5. Sea $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ de C^2 y sea $h(t)=f\big(t,-t,t^2\big)$. Hallemos h'' en función de las derivadas de f , y comprobemos la fórmula obtenida en el caso de que sea $f(x,y,z)=x+y+z^2$.

$$\begin{aligned} h'(t)=f_x-f_y+2tf_z\ ,\ h''(t)&=(f_x)'-(f_y)'+2t(f_z)'+2f_z\\ &=f_{xx}-f_{xy}+2tf_{xz}-f_{yx}+f_{yy}-2tf_{yz}+2tf_{zx}-2tf_{zy}+4t^2f_{zz}+2f_z\\ &=f_{xx}+f_{yy}+4t^2f_{zz}-2f_{xy}+4tf_{xz}-4tf_{yz}+2f_z\end{aligned}$$

En concreto, para la f dada es $h(t)=t^4$, $h''(t)=12t^2$. Con la fórmula: $h''(t)=8t^2+4z\big|_{z=t^2}=12t^2$.

Pasemos ya al caso general, con valores vectoriales dependientes de varias variables:

Campos vectoriales. Son funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$: $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{f}: D\subset\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m \\ \mathbf{x}=(x_1,...,x_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{x})=\big(f_1(\mathbf{x}),...,f_m(\mathbf{x})\big)\end{array}}$.

[O funciones vectoriales de varias variables reales sobre un dominio D . Uno que ya ha aparecido, con $n=m$, es ∇f ; otro, para $n=m=3$, será $\operatorname{rot}\mathbf{f}$; otros serán los cambios de variable que iremos haciendo; y caso particular importante ya tratado son las funciones vectoriales, con $n=1$].

$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}),...,f_m(\mathbf{x})\big) \text{ será continuo si lo son sus } m \text{ componentes } f_k(\mathbf{x})\,.}$

$\big[$Esto equivale a una definición $\varepsilon-\delta$: si $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})\|<\varepsilon$ $\big]$.

En la diferencial de f escalares cumplía un papel importante el vector ∇f . Aquí lo cumple una matriz:

Se llama **matriz diferencial** o **jacobiana** de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ a $\mathbf{Df}(\mathbf{a}) \equiv \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$

[Las m filas de $\mathbf{Df}$ son los gradientes de las m componentes].

$\mathbf{f}$ es **diferenciable** en $\mathbf{a}$ si existe $\mathbf{Df}(\mathbf{a})$ y es $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{Df}(\mathbf{a})\,\mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|)$.
con $\mathbf{v}$ vector columna y escribiendo el resultado como fila$\uparrow$

$\Big[$Es decir, si $\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v})-\mathbf{f}(\mathbf{a})-\mathbf{Df}(\mathbf{a})\,\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \to 0$ cuando $\|\mathbf{v}\|\to 0$ $\Big]$.

Y se tiene un resultado similar al de los campos escalares:

Teor 2. $\boxed{\text{Si todas las } f_k\in C^1 \text{ en un entorno de } \mathbf{a} \text{ entonces } \mathbf{f} \text{ es diferenciable en } \mathbf{a}\,.}$

$\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ si existe una aplicación lineal $d\mathbf{f}_\mathbf{a}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, llamada **diferencial** de $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a}$, dada por $d\mathbf{f}_\mathbf{a}(\mathbf{v}) = \mathbf{Df}(\mathbf{a})\,\mathbf{v}$, tal que: $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + d\mathbf{f}_\mathbf{a}(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{v}\|)$.

Una aplicación lineal viene dada por una matriz, incluso, **abusando** algo **del lenguaje**, se puede decir que $d\mathbf{f}_\mathbf{a}$ **es la matriz** $\mathbf{Df}(\mathbf{a})$ $\big[\, f'(a)$ es la matriz más simple y $\nabla f(\mathbf{a})$ es una matriz $1\times n\,\big]$.

Si $n=1$, la matriz $\mathbf{Df}$ pasa a ser una matriz $m\times 1$, el vector derivada de una **función vectorial**, y la diferencial es una aplicación lineal de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^m$ (cuya gráfica es una recta en $\mathbf{R}^m$: la tangente). Para seguir la notación de aquí deberíamos escribir $\mathbf{Dc}(t) = \mathbf{c}'(t)$ como un vector columna (con m elementos), pero seguiremos con vectores fila y llamando a las $\mathbf{c}$ derivables más que diferenciables.

Ej 6. $\mathbf{f}(x,y) = \big(e^{xy}, y\,, 2x+y^2\big) = \big(f(x,y), g(x,y), h(x,y)\big)$ es campo vectorial diferenciable en el punto $(1,0)$ [lo es en todo $\mathbf{R}^2$] porque las 6 parciales existen y son continuas en un entorno del punto.

Su matriz diferencial es: $\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,e^{xy} & x\,e^{xy} \\ 0 & 1 \\ 2 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Df}(1{,}0)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ 2u \end{pmatrix}$.

La $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ se parecerá, por tanto, cerca de $(1,0)$ a la función lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^3$ que al vector $\mathbf{v} = (u,v)$ le asigna el nuevo vector $(1+v, v, 2+2u) = \mathbf{f}(1,0) + \mathbf{Df}(1,0)\,\mathbf{v} \approx \mathbf{f}\,(1+u, v)$.

O, escrito de otra forma, $\mathbf{f}(x,y) = \big(e^{xy}, y\,, 2x+y^2\big) \approx (1+y\,, y\,, 2x)$ cerca de $(1,0)$.

[Las diferenciales de los campos escalares f , g y h llevarían a las mismas expresiones].

En caso de que sea $m=n$, típico de los **cambios de variable**, cumplirá un papel importante (por ejemplo en la integración) el determinante de la matriz diferencial $n\times n$, llamado jacobiano del cambio:

Si $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,..,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = f_n(x_1,..,x_n) \end{cases}$, el **determinante jacobiano** es $\frac{\partial(y_1,...,y_n)}{\partial(x_1,...,x_n)} \equiv J\mathbf{f} \equiv \big|\mathbf{Df}\big| = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n \end{vmatrix}$.

$\big[\, J\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$ implicará, por ejemplo, que el cambio es inyectivo en un entorno del punto, con lo que habrá función inversa $\mathbf{f}^{-1}$ en un entorno, que era lo que sucedía en $\mathbf{R}$ cuando $f'(a)\neq 0\,\big]$.

Ej 7. Sea $\mathbf{f}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{f}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = (x,y)$, que habitualmente escribiremos $\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{array}$.

El determinante jacobiano (del cambio a polares): $J\mathbf{f} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r$.

Ni siquiera en el caso más simple de las funciones de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ como la anterior es posible dibujar gráficas de campos vectoriales. Habrá que limitarse a dibujar flechas entre dos planos (en este caso).

Caso general de la regla de la cadena.

Consideremos ahora el caso general de composición de campos vectoriales:

Teor 3. Sean $\underset{\mathbf{a}\,\to\,\mathbf{g}(\mathbf{a})=\mathbf{b}\,\to\,\mathbf{f}(\mathbf{b})}{\mathbf{R}^n \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{R}^m \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{R}^p}$, $\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{a}$, $\mathbf{f}$ diferenciable en $\mathbf{b}=\mathbf{g}(\mathbf{a})$ $\Rightarrow$ $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(\mathbf{a})=\mathbf{Df}(\mathbf{b})\,\mathbf{Dg}(\mathbf{a})$ [producto de matrices].

[La demostración para $\mathbf{f},\mathbf{g}\in C^1$ se basa en aplicar el Teor 1. en cada fila].

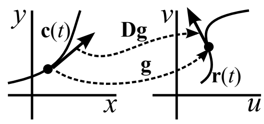
Ej 8. Sean $\mathbf{g}(x,y)=(x-y\,,\,y^2)$, $\mathbf{f}(u,v)=(u+v\,,\,uv\,,\,v)$. Hallemos $\mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})$ en $(2,1)$. Con el Teor 3:

$$\mathbf{Df}(u,v)=\begin{pmatrix}1&1\\v&u\\0&1\end{pmatrix},\ \mathbf{Dg}(x,y)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2y\end{pmatrix},\ \mathbf{g}(2,1)=(1,1)\ \Rightarrow\ \mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(2,1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&2\end{pmatrix}.$$

Comprobemos componiendo y calculando luego la diferencial:

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y)=\mathbf{f}(x-y\,,\,y^2)=(x-y+y^2,xy^2-y^3,y^2)\,,\ \mathbf{D}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(2,1)=\begin{pmatrix}1&2y-1\\y^2&2xy-3y^2\\0&2y\end{pmatrix}_{(2,1)}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&2\end{pmatrix}.$$

Veamos la forma que adopta el teorema general en otros diferentes casos particulares. El primero muestra el efecto de un cambio de variable sobre una curva:



$\mathbf{g}$ transforma puntos y $\mathbf{Dg}$ transforma vectores.

Sean $\mathbf{c}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$, $\underset{(x,y)\,\to\,(u,v)}{\mathbf{g}:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}^2}$, $\mathbf{r}(t)=\mathbf{g}(\mathbf{c}(t))$.

[$\mathbf{r}$ es la curva imagen de $\mathbf{c}$ a través del cambio $\mathbf{g}$].

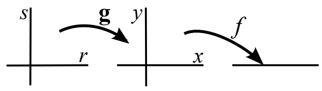
$$\boxed{\mathbf{r}'(t)=\mathbf{Dg}(\mathbf{c}(t))\,\mathbf{c}'(t)}=\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$ Es decir:

$$\begin{matrix}u'=u_x\,x'+u_y\,y'\\v'=v_x\,x'+v_y\,y'\end{matrix}\ ,\quad \text{o si se prefiere:}\quad \boxed{\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}}\ ,\quad \boxed{\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}}\ .$$

La matriz diferencial $\mathbf{Dg}$ tansforma el vector tangente a una curva en el vector tangente a la curva imagen.

Otro caso más (que usaremos más a menudo): los **cambios de variable** para funciones de 2 variables.

$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $\underset{(r,s)\,\to\,(x,y)}{\mathbf{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2}$, $\underset{(r,s)\to f(\mathbf{g}(r,s))=f(x(r,s),y(r,s))}{h=f\circ\mathbf{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}}$



$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\ \frac{\partial h}{\partial s}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial s}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial s}\end{pmatrix}\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}}\ ,\ \boxed{\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}}$$ [o escribiendo f en vez de h]

[Conviene memorizar estas fórmulas. No se olvide que f_x y f_y están evaluadas en $\big(x(r,s),y(r,s)\big)$].

Ej 9. Si $\begin{cases}x=r+s^2\\y=rs\end{cases}$, las derivadas de $f(r+s^2,rs)$ respecto a las variables (r,s) son $\begin{cases}f_r=f_x+sf_y\\f_s=2sf_x+rf_y\end{cases}$.

Si $f\in C^2$ podemos hallar también las derivadas segundas. f_x y f_y son también funciones de r y s que se derivarán respecto a r y s de la misma forma que se derivaba la f :

$$f_{rr}=(f_r)_r=(f_x)_r+s(f_y)_r=[f_{xx}+sf_{xy}]+s[f_{yx}+sf_{yy}]=f_{xx}+2sf_{xy}+s^2f_{yy}$$

$$f_{rs}=(f_r)_s=(f_x)_s+s(f_y)_s+f_y=[2sf_{xx}+rf_{xy}]+s[2sf_{yx}+rf_{yy}]+f_y=2sf_{xx}+(r+2s^2)f_{xy}+rsf_{yy}+f_y$$

$$f_{ss}=(f_s)_s=2s(f_x)_s+r(f_y)_s+2f_x=2s[2sf_{xx}+rf_{xy}]+r[2sf_{yx}+rf_{yy}]+2f_x=4s^2f_{xx}+4rsf_{xy}+r^2f_{yy}+2f_x$$

[Para escribir, por ejemplo, $(f_x)_r$ simplemente se ha utilizado que, según las expresiones para las derivadas primeras, había que derivarla respecto a x y sumarle s por su derivada respecto a y].

[f_{rs} se podía haber calculado también así, pues sabemos que las derivadas cruzadas coinciden:

$f_{rs}=(f_s)_r=2s[f_{xx}+sf_{yx}]+r[f_{xy}+sf_{yy}]+f_y=2sf_{xx}+(r+2s^2)f_{xy}+rsf_{yy}+f_y$].

Similares son las fórmulas en $\mathbf{R}^3$. Para una $(r,s,t)\to f\big(\mathbf{g}(r,s,t)\big)=f\big(x(r,s,t),y(r,s,t),z(r,s,t)\big)$

las derivadas son: $\boxed{f_r=f_xx_r+f_yy_r+f_zz_r}$, $\boxed{f_s=f_xx_s+f_yy_s+f_zz_s}$, $\boxed{f_t=f_xx_t+f_yy_t+f_zz_t}$.

[Una vez que 'se le pilla el truco' a los cambios de variable, es fácil dar la expresión desarrollada de cualquier derivada de una función de varias variables m que, a su vez, dependen de otras n. En la derivada de la función compuesta final respecto a, por ejemplo, una r estarán sumadas las m derivadas respecto a la variables intermedias multiplicadas por las derivadas de éstas respecto a r].

Divergencia, laplaciano, rotacional

Si $\mathbf{f}=(f_1,\dots,f_n):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ es campo vectorial C^1, la **divergencia** de $\mathbf{f}$ es el campo escalar: $\operatorname{div}\mathbf{f}\equiv\nabla\cdot\mathbf{f}\equiv\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$.

$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ [sólo notación, eso no es ningún vector].

En particular, cuando $\mathbf{f}=(f,g)$ es $\boxed{\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y}$, y para $\mathbf{f}=(f,g,h)$ es $\boxed{\operatorname{div}\mathbf{f}=f_x+g_y+h_z}$.

Si $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ es de C^2, el **laplaciano** de $\mathbf{f}$ es $\Delta f\equiv\nabla\cdot(\nabla f)\equiv\nabla^2 f\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Es otro campo escalar. En particular, $\boxed{\Delta f=f_{xx}+f_{yy}}$ o $\boxed{\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}}$.

Para $n=3$ hay otro importante campo vectorial que se obtiene a partir de uno dado:

Si $\mathbf{f}=(f,g,h):\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ es de C^1, el **rotacional** de $\mathbf{f}$ es el campo vectorial:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{f}=(h_y-g_z)\,\mathbf{i}+(f_z-h_x)\,\mathbf{j}+(g_x-f_y)\,\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ f&g&h\end{vmatrix}.$$

interpretando adecuadamente los 'productos' →

Algunas propiedades y relaciones (para $n=3$ y campos C^2) fácilmente comprobables son:

$\operatorname{rot}(\nabla f)=\mathbf{0}$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=0$, $\operatorname{div}(g\mathbf{f})=g\operatorname{div}\mathbf{f}+\nabla g\cdot\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}(g\mathbf{f})=g\operatorname{rot}\mathbf{f}+\nabla g\times\mathbf{f}$.

Por ejemplo, la primera: $\operatorname{rot}(f_x,f_y,f_z)=(f_{zy}-f_{yz})\,\mathbf{i}+(f_{xz}-f_{zx})\,\mathbf{j}+(f_{yx}-f_{xy})\,\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

[No sólo el rotacional de un gradiente es $\mathbf{0}$. En 5.3 se verá que si el rotacional de un campo $\mathbf{f}\in C^1$ se anula, este campo será el gradiente de un campo escalar que sabremos calcular].

Igual de fácil se ve la segunda igualdad: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=h_{yx}-g_{zx}+f_{zy}-h_{xy}+g_{xz}-f_{yz}=0$, pues las derivadas cruzadas coinciden por ser todas las funciones C^2.

Las más largas (y mecánicas) comprobaciones de las otras igualdades (vienen ser generalizaciones de la derivada de un producto) se dejan para problemas.

Ej 10. Sea $\mathbf{f}=\left(xyz,\,e^{yz},\,y^2\right)$. $\operatorname{div}\mathbf{f}=yz+z\,e^{yz}$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ xyz&e^{yz}&y^2\end{vmatrix}=\left(2y-y\,e^{yz},\,xy,\,-xz\right)$.

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=x-x=0$ (debía serlo) . $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})=\left(0,\,z+z^2e^{yz},\,y+e^{yz}+yz\,e^{yz}\right)$. $\Delta(\operatorname{div}\mathbf{f})=(z^3+y^2z+2y)\,e^{yz}$.

[No tiene sentido hablar del gradiente o laplaciano de $\mathbf{f}$, ni de divergencia o rotacional de escalares. Estos cuatro 'operadores' (reglas que convierten funciones en otras, como también hace la derivada) son 'lineales' (porque lo es la derivada): $\nabla(af+bg)=a\nabla f+b\nabla g$, $a,b\in\mathbf{R}$, e igual los otros].

Otro ejemplo de operadores diferenciales y también de repaso de la regla de la cadena:

Ej 11. Sean $\mathbf{f}(x,y,z)=(y,xy,2z)$ y $\mathbf{c}(t)=(1,2\cos t,\operatorname{sen}t)$, $t\in[-\pi,\pi]$.

a) Calcular $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})$, $\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})$, $\Delta(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})$, la matriz $\mathbf{Df}$ y el jacobiano $J=\left|\mathbf{Df}\right|$.

b) Si $\mathbf{r}(t)=(\mathbf{f}\circ\mathbf{c})(t)$, hallar $\mathbf{r}'(\pi/6)$ componiendo y derivando y con la regla de la cadena.

a) $\operatorname{div}\mathbf{f}=x+2$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ y&xy&2z\end{vmatrix}=0\,\mathbf{i}+0\,\mathbf{j}+(y-1)\,\mathbf{k}=(0,0,y-1)$. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})=0$ (siempre).

$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})=\nabla\left(y^2+x^2y^2+4z^2\right)=\left(2xy^2,\,2x^2y+2y,\,8z\right)$. $\Delta(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})=2x^2+2y^2+10$. $\mathbf{Df}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ y&x&0\\ 0&0&2\end{pmatrix}$. $J=-2y$.

b) $\mathbf{r}(t)=(\mathbf{f}\circ\mathbf{c})(t)=(2\cos t,\,2\cos t,\,2\operatorname{sen}t)\;\Rightarrow\;\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right)=(-2s,-2s,2c)_{t=\pi/6}=\left(-1,-1,\sqrt{3}\right)$.

Con la forma matricial de la regla de la cadena:

$\mathbf{c}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(1,\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{c}'(t)=(0,-2\operatorname{sen}t,\cos t)$, $\mathbf{c}'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(0,-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

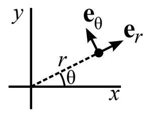
$$\mathbf{r}'\left(\tfrac{\pi}{6}\right)=\mathbf{Df}\left(\mathbf{c}\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right)\mathbf{c}'\left(\tfrac{\pi}{6}\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \sqrt{3}&1&0\\ 0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Cálculos en polares

Para analizar la continuidad ya utilizamos las **coordenadas polares**: $\boxed{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}}$, $\begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{array}$.

Escribamos ahora ∇f y Δf en polares. Por la regla de la cadena:

$$\begin{cases} f_r=f_x\,x_r+f_y\,y_r=\cos\theta\,f_x+\mathrm{sen}\,\theta\,f_y \\ f_\theta=f_x\,x_\theta+f_y\,y_\theta=-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,f_x+r\cos\theta\,f_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_r\cos\theta-\frac{1}{r}f_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta=f_x \\ f_r\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{1}{r}f_\theta\cos\theta=f_y \end{cases} \Rightarrow$$



$$\boxed{\nabla f=f_r\,\mathbf{e}_r+\tfrac{1}{r}f_\theta\,\mathbf{e}_\theta\,,\ \text{definiendo }\ \mathbf{e}_r=(\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta)\,,\ \mathbf{e}_\theta=(-\,\mathrm{sen}\,\theta,\cos\theta)\,.}$$

[Esta pareja de vectores son unitarios y perpendiculares entre sí y se tiene que $\frac{d}{d\theta}\mathbf{e}_r=\mathbf{e}_\theta$].

$$\begin{cases} f_{rr}=\cos^2\theta\,f_{xx}+2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,f_{xy}+\mathrm{sen}^2\theta\,f_{yy} \\ f_{\theta\theta}=r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,f_{xx}-2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,f_{xy}+r^2\cos^2\theta\,f_{yy}-r\cos\theta\,f_x-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,f_y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta f=f_{rr}+\frac{f_r}{r}+\frac{f_{\theta\theta}}{r^2}}\,.$$

[Basta escribir la suma del segundo miembro y usar que $\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta=1$ para obtener $f_{xx}+f_{yy}$].

Ej 12. Sea $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. [Ejemplo de f continua de 1.3]. En polares: $f(r,\theta)=r\cos^3\theta$.

Hallemos aquí ∇f y Δf en el punto $(x,y)=(1,1)$, o lo que es lo mismo, en $(r,\theta)=\left(\sqrt{2}\,,\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\nabla f=\cos^3\theta\,\mathbf{e}_r-3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{e}_\theta\Big|_{(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})}=\tfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\tfrac{3\sqrt{2}}{4}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(1,-\tfrac{1}{2}\right).$$

$$\Delta f=0+\frac{\cos^3\theta}{r}+\frac{6\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta-3\cos^3\theta}{r}=\frac{2}{r}\cos\theta(3-4\cos^2\theta)\ \text{ que en }\left(\sqrt{2}\,,\tfrac{\pi}{4}\right)\text{ vale } 1\,.$$

Más largos serían los cáculos trabajando en cartesianas:

$$\nabla f=\left(\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right),\quad \Delta f=\frac{4x^3+6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^3y^2-4x(x^4+3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

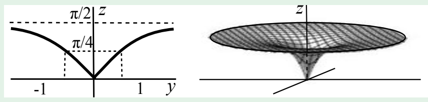
Otro ejemplo de la utilidad de las polares en el que repasamos además otros conceptos de la sección:

Ej 13. Sea $g(x,y)=\arctan\sqrt{x^2+y^2}$. a) Dibujar la gráfica de g . ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

b) Calcular $\nabla g(0,-2)$ y $\Delta g(0,-2)$ en cartesianas y polares.

c) Si $h(u,v,w)=g\left(ue^w,4v+6w\right)$, hallar, utilizando la regla de la cadena, $\frac{\partial h}{\partial w}(0,1,-1)$.

a) De revolución. $g(0,y)=\arctan|y|$, par, $\arctan y$, $y\geq 0$.
No existe $g_y(0,0)$ y no es diferenciable en el origen.



b) En cartesianas: $g_x=\dfrac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$, $g_y=\dfrac{y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ $\rightarrow\boxed{\nabla g(0,-1)=\left(0\,,-\tfrac{1}{5}\right)}$.

En polares: $g(r,\theta)=\arctan r$. $\nabla g=g_r\,\mathbf{e_r}=\frac{1}{1+r^2}(\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta)\ \underset{\theta=-\pi/2}{\overset{r=2}{\longrightarrow}}\ \frac{1}{5}(0,-1)\nearrow$

Laplaciano mucho mejor en polares: $\Delta g=g_{rr}+\frac{1}{r}g_r=-\frac{2r}{(1+r^2)^2}+\frac{1}{r(1+r^2)}=\frac{1-r^2}{r(1+r^2)^2}\Big|_{r=2}=\boxed{-\frac{3}{50}}$.

Más largo: $g_{xx}=\dfrac{y^2+y^4-x^2y^2-2x^4}{(1+x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^{3/2}}$, $g_{yy}=\dfrac{x^2+x^4-x^2y^2-2y^4}{(1+x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^{3/2}}$. $\Delta g=\dfrac{1-x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}$ $\uparrow(0,-2)$

c) $h_w=g_xx_w+g_yy_w=u\,\mathrm{e}^w g_x+6\,g_y\ \rightarrow\ h_w(0,1,-1)=0\cdot g_x(0,-2)+6\,g_y(0,-2)=\boxed{-\frac{6}{5}}$.

También es útil, en ocasiones, usar polares con **funciones vectoriales**. El vector tangente a una

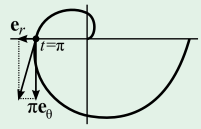
$$\mathbf{c}(t)=\big(x(t),y(t)\big)=\big(r(t)\cos\theta(t),r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\big)=r(t)\,\mathbf{e}_r(t)$$

será: $\mathbf{c}'(t)=\frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r+r\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\boxed{\frac{dr}{dt}\,\mathbf{e}_r+r\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_\theta}$ [componentes radial y transversal de $\mathbf{c}'$].

Ej 14. Sea la curva $\mathbf{c}$ (una espiral) definida en polares mediante $r(t)=t$, $\theta(t)=t$.

Con la fórmula de arriba: $\mathbf{c}'(t)=\mathbf{e}_r+t\,\mathbf{e}_\theta=(\cos t,\mathrm{sen}\,t)+t\,(-\,\mathrm{sen}\,t,\cos t)$.

En este caso es fácil comprobar con cartesianas: $\mathbf{c}(t)=(t\cos t,t\,\mathrm{sen}\,t)$ ↑



[También puede ayudar en los cálculos en $\mathbf{R}^3$ la utilización de coordenadas cilíndricas y esféricas, pero no presentaremos estas coordenadas hasta el capítulo 4].