

3. Funciones implícitas. Máximos y mínimos.

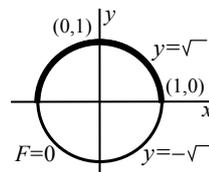
3.1 Funciones implícitas e inversas

En Matemáticas se ha derivado implícitamente, pero ¿cuándo una expresión $F(x, y) = 0$, con $F \in C^1$, define realmente una función derivable $y = g(x)$ cerca de un punto (a, c) de la curva? Entonces sería $F(x, g(x)) = 0$, y la regla de la cadena nos daría: $F_x(x, g(x)) + F_y(x, g(x))g'(x) = 0 \Rightarrow g'(a) = -\frac{F_x}{F_y}\Big|_{(a,c)}$.

¿Cuándo no definirá una función? Parece haber problemas cuando sea $F_y(a, c) = 0$.

Por ejemplo, para la circunferencia $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, $F_x = 2x$, $F_y = 2y$, si $y = 0$ define 2 funciones $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, no derivables además en los puntos $(\pm 1, 0)$.

Cerca de cualquier otro punto, por ejemplo $(0, 1)$, sí define una sola $g(x)$ derivable [aunque en ese mismo punto, con $F_x = 0$, no define una única función $x = h(y)$].



Algo análogo sucede en \mathbf{R}^3 . La superficie esférica $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ define una función $z = g(x, y)$ de C^1 cuando $F_z = 2z \neq 0$. Por ejemplo, cerca de $(0, 0, -1)$, tal función es $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Cuando una $F = 0$ defina $z = z(x, y)$, dar sus derivadas es de nuevo fácil derivando implícitamente:

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \Rightarrow F_x + F_z z_x = 0, F_y + F_z z_y = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{F_x}{F_z}, z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

El siguiente **teorema particular de la función implícita** (demostrado en M-T) generaliza estas ideas:

Sea $F: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ de C^1 , $F(\mathbf{a}, c) = 0$ y $F_z(\mathbf{a}, c) \neq 0$. Entonces existe una única $z = g(\mathbf{x})$ de C^1 que satisface $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ para \mathbf{x} cerca de \mathbf{a} , z cerca de c , y son $\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\partial F / \partial x_j}{\partial F / \partial z}$, $j = 1, \dots, n$.

Cambiando los papeles de las variables, el teorema también garantiza que $F(x, y) = 0$ define una función $x(y)$ cuando $F_x \neq 0$, o precisa cuándo $F(x, y, z) = 0$ define seguro una $y = y(x, z)$ o una $x = x(y, z)$: **cuando la derivada respecto a lo que queremos despejar no se anule en el punto**. Si es 0, esto no implica que no defina una función (pero, si lo hace, probablemente deje de ser C^1):

Ej 1. Para $F(x, y) = 8x + y^3 e^{x+1} = 0$ es $F_x = 8 + y^3 e^{x+1}$, $F_y = 3y^2 e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Entonces $F = 8x = 0$. El teorema afirma que hay una $y(x)$ de C^1 salvo en $(0, 0)$. Pero podemos despejar: $y = -2x^{1/3} e^{-(x+1)/3}$, función única por $(0, 0)$ [no C^1]. En el mínimo de esta función $(1, -2e^{-2/3})$, $F = 0$ sí define dos funciones $x(y)$. [A este punto malo podemos llegar sin despejar: $8 = -y^3 e^{x+1} \rightarrow F = 8x - 8 = 0 \rightarrow 8 + e^2 y^3 = 0$].

El teorema asegura cuándo existe la función definida implícitamente, pero no dice cuál es. De hecho es más interesante si no podemos calcularla (a diferencia de los ejemplos vistos). Lo más complicado entonces para aplicarlo es, usualmente, localizar puntos que pertenezcan a la curva o superficie.

Ej 2. Sea $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Dibujo de la curva con el 'implicitplot' de Maple:

$F_x = 3(x^2 - y)$, $F_y = 3(y^2 - x)$. Para $x \neq y^2$, $F = 0$ define $y = y(x)$ de C^1 y si $y \neq x^2$, una $x = x(y)$. Como $F_x = F_y = 0$ en $(1, 1)$, que no es de la curva, y en $(0, 0)$, salvo en este último punto la curva describe una función C^1 de una de las variables (en casi todos los puntos, de las 2). Hay problemas si:

$x = y^2 \rightarrow F = y^3(y^3 - 2) = 0 \rightarrow y = 2^{1/3} \rightarrow (2^{2/3}, 2^{1/3}) \approx (1.59, 1.26)$, punto en que hay dos funciones $y(x)$ [y en el punto simétrico para $x(y)$].

En el resto de puntos, aunque la $y(x) \in C^1$ no sea calculable, podemos saber muchas cosas de ella. Por ejemplo: $y = x \rightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow (0, 0)$ y $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Hallemos en el segundo la recta tangente:

$3(x^2 - y) + 3(y^2 - x)y' = 0 \rightarrow y'(\frac{3}{2}) = \frac{x^2 - y}{x - y^2}\Big|_{(3/2, 3/2)} = -1 \rightarrow y = \frac{3}{2} - (x - \frac{3}{2}) = 3 - x$.

Y ahora, $y''(\frac{3}{2})$: $(2x - y') + (2yy' - 1)y' + (y^2 - x)y'' = 0 \rightarrow y''(\frac{3}{2}) = \frac{2x - 2y' + 2y(y')^2}{x - y^2}\Big|_{(3/2, 3/2)} = -\frac{32}{3}$.

Tratemos con el teorema una primera superficie definida por una función de 3 variables que no es demasiado complicada y que además permite despejar explícitamente la z y comprobar afirmaciones:

Ej 3. Consideremos la superficie S dada por $F(x, y, z) \equiv 3x^2 - 2y^2 + z^2 - 4yz + 2y = 0$. $F_z = 2(z - 2y)$.

Cuando sea $z \neq 2y$ el teorema de la función implícita garantiza que define una función $z(x, y)$ de C^1 . Por ejemplo, esto sucede cerca sencillo punto $\mathbf{a} = (1, 1, 1) \in S$. Sus derivadas en él se pueden copiar del teorema, o volver a obtenerlas aquí derivando implícitamente:

$$6x + 2zz_x - 4yz_x = 0 \rightarrow z_x = \frac{3x}{2y-z}. \quad -4y + 2zz_y - 4z - 4yz_y + 2 = 0 \rightarrow z_y = \frac{1-2y-2z}{2y-z}.$$

En $(1, 1, 1)$ estas parciales pasan a valer: $z_x(1, 1, 1) = 3$, $z_y(1, 1, 1) = -3$.

De ellas podemos deducir, por ejemplo, su plano tangente: $z = 1 + 3(x-1) - 3(y-1) = 3x - 3y + 1$.

Se sabía hallar: $\nabla F = 2(3x, 1-2y-2z, z-2y) \xrightarrow{(1,1,1)} 2(3, -3, -1)$. $(3, -3, -1) \cdot (x-1, y-1, z-1) \stackrel{!}{=} 0$.

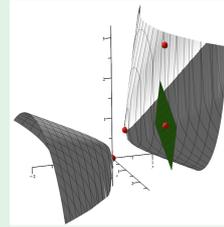
Aquí se puede despejar $z = 2y \pm \sqrt{6y^2 - 3x^2 - 2y}$, y el $-$ nos da la S cerca del punto \mathbf{a} . Derivando la expresión calcularíamos las z_x y z_y y el plano tangente de una tercera forma.

¿Qué sucede en los puntos del plano $z = 2y$? Sobre él tiene el ∇F la tercera componente nula, con lo que su plano tangente será vertical y nunca la posible $z(x, y)$ que definiese sería C^1 . Observemos además que sobre ese plano están las dos funciones distintas $\pm\sqrt{\quad}$ que han aparecido al despejar la z .

En el dibujo de Maple se ve la superficie, dos puntos 'buenos' $(1, 1, 3)$ y \mathbf{a} , el plano calculado y dos puntos sobre $z = 2y$ con plano vertical, el origen y el $(0, 1/3, 2/3)$.

Derivando implícitamente se pueden calcular más derivadas. Por ejemplo:

$$3 + (z_x)^2 + zz_{xx} - 2yz_{xx} = 0 \rightarrow z_{xx} = \frac{3 + (z_x)^2}{2y - z}. \text{ Su valor en el punto } \mathbf{a} \text{ sería } 12.$$



Para esta segunda, donde no se puede despejar z , hallemos su plano tangente en un 'punto bueno' y estudiemos algo qué sucede en otros puntos con dificultades según el teorema de la función implícita:

Ej 4. Sea ahora la superficie S dada por $F(x, y, z) \equiv y^2 + x^3 + xz^2 - 2z^3 = 1$. Sus parciales se anulan si:

$$\nabla F = (3x^2 + z^2, 2y, 2z(x - 3z)) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Como el punto $(0, 0, 0)$ no pertenece a S , cerca de todo punto suyo (con una parcial no nula) se puede 'despejar' alguna de las variables, definiendo una función C^1 (y tendrá plano tangente).

En concreto, seguro que existe $z(x, y)$ si $z \neq 0$ y $x \neq 3z$. Hay problemas con $x(y, z)$ si $x = z = 0$ (e $y = \pm 1$ por tanto). Y los tiene $y(x, z)$ si $y = 0$ (se puede despejar $y = \pm\sqrt{\quad}$ y esto los confirma).

Hallemos el plano tangente en $(1, 1, 1)$, que pertenece claramente a la superficie: $1 + 1 + 1 - 2 = 1$.

Lo más corto es utilizar el $\nabla F = (4, 2, -4)$ que nos da $(2, 1, -2) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0$, $z = x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$.

Ahora nos basamos en las fórmulas que se deducen de la derivación implícita:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{3x^2 + z^2}{2z(3z - x)} \text{ y } z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y}{2z(3z - x)}, \text{ que en el punto } (1, 1, 1) \text{ pasan a valer } 1 \text{ y } \frac{1}{2}.$$

Así que, con la otra fórmula de 2.1 (para campos despejados): $z = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$, como antes.

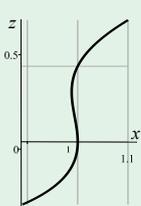
Más formas no sencillas. Despejemos ahora y en vez de z y sigamos con fórmulas de implícitas:

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 + z^2}{2y}, \quad y_z = -\frac{F_z}{F_y} = \frac{2z(3z - x)}{2y} \text{ en } (1, 1, 1) \text{ son } -2, 2. \quad y = 1 - 2(x-2) + 2(z-1).$$

Incluso podríamos ahora dar su más complicada expresión $y = \sqrt{1 - x^3 - xz^2 + 2z^3}$ y derivarla.

Estudiamos ahora la S **cerca de los puntos** $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

[Ilustramos ya los argumentos con otro dibujo de Maple utilizando el 'implicitplot3d'. Se obtiene esa especie de 'sillón', los tres puntos analizados aparecen en rojo y el plano tangente de arriba en verde].



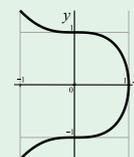
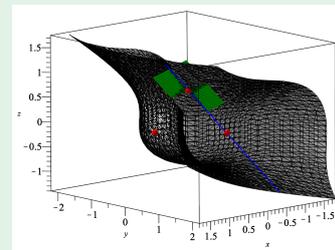
En $(1, 0, 0)$ puede haber problemas tratando de definir $z = z(x, y)$, pero el teorema es sólo \Rightarrow .

El dibujo del corte de S con $y = 0$ los confirma [y era fácil observar que también $(1, 0, 1/2) \in S$].

Vemos ahora qué sucede en $(0, 1, 0)$ con la x en función de y, z . A la derecha está el sencillo dibujo de $y^2 + x^3 = 1$ (corte con $z = 0$).

Y el corte con $y = 1$: $x^3 + xz^2 - 2z^3 = (x-z)(x^2 + xz + 2z^2) = 0$ es la recta $z = x$.

Todo sugiere que $F = 1$ sí define una única función $x = x(y, z)$ cerca del punto, a pesar de ser $F_x(0, 1, 0) = 0$. Esta función no será C^1 (x_y se irá a $-\infty$).



Ej 8. $\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{vmatrix} = e^{2u} \neq 0 \Rightarrow \text{existe } \mathbf{f}^{-1} \text{ en un entorno de cada punto.}$

[A pesar de que hay inversa local en cada punto, no hay inversa global, ya que \mathbf{f} no es inyectiva en \mathbf{R}^2 : cada (x, y) de la imagen (que es $\mathbf{R}^2 - \{0\}$) proviene de infinitos (u, v) distintos: $\mathbf{f}(u, v + 2k\pi) = \mathbf{f}(u, v)$].

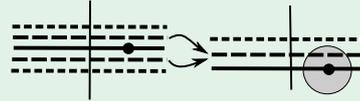
Aunque no se pudiese despejar u y v podríamos hallar sus derivadas derivando implícitamente.

$$\begin{aligned} 1 &= e^u \cos v u_x - e^u \sin v v_x & 1^{a \times c + 2^{a \times s}} \cos v &= e^u u_x, & u_x &= e^{-u} \cos v, & \text{y análogas las otras.} \\ 0 &= e^u \sin v u_x + e^u \cos v v_x \end{aligned}$$

[Podemos despejar $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$, $v = \arctan \frac{y}{x}$, y llegamos a lo mismo: $u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{e^u \cos v}{e^{2u}}$].

Ej 9. $\begin{cases} x = u \\ y = v^2 \end{cases} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 2v \Rightarrow \text{existe } \mathbf{f}^{-1} \text{ en un entorno de la imagen de cada } (u_o, v_o), v_o \neq 0.$

¿Por qué fallan las cosas en $v=0$? \mathbf{f} lleva cada pareja de rectas $v = \pm k$ a la misma recta $y = k^2$. En ningún entorno de $\mathbf{f}(u_o, 0) = (u_o, 0)$ es inyectiva y no existe la \mathbf{f}^{-1} .



En los otros puntos, \mathbf{f}^{-1} viene dada por $x = u$ e $y = \sqrt{v}$ ó $y = -\sqrt{v}$, dependiendo del semiplano.

Ej 10. $\begin{cases} x = \frac{u^2}{u^2+v^2} \\ y = \frac{v^2}{u^2+v^2} \end{cases} \cdot \begin{matrix} x_u = \frac{2uv^2}{(u^2+v^2)^2}, x_v = \frac{-2u^2v}{(u^2+v^2)^2}, \\ y_u = \frac{-2uv^2}{(u^2+v^2)^2}, y_v = \frac{2u^2v}{(u^2+v^2)^2} \end{matrix}$ El jacobiano es $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{4u^2v^2}{(u^2+v^2)^4} \begin{vmatrix} v & -u \\ -v & u \end{vmatrix} \equiv 0.$

Nunca hay inversa local. \mathbf{f} lleva cada recta a un único punto: $\mathbf{f}(u, mu) = (\frac{1}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2})$.

Ej 11. Sea $\begin{cases} x = 2u + v + e^w \\ y = u + e^{2v} + w \\ z = e^{3u} + v + w \end{cases}$ Comprobemos que posee una inversa local cerca de $(u, v, w) = (0, 0, 0)$ y calculemos u_z , v_z y w_z en el punto imagen $(1, 1, 1)$.

El jacobiano es $J = \begin{vmatrix} 2 & 1 & e^w \\ 1 & 2e^{2v} & 1 \\ 3e^{3u} & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(0,0,0)} = -1$. El sistema define u, v, w como funciones de (x, y, z) .

Derivando las tres ecuaciones respecto a z y sustituyendo $u = v = w = 0$: $\begin{cases} 0 = 2u_z + v_z + w_z \\ 0 = u_z + 2v_z + w_z \\ 1 = 3u_z + v_z + w_z \end{cases}$

[con las parciales evaluadas en $(1, 1, 1)$]. Resolviendo el sistema: $u_z(1, 1, 1) = 1, v_z(1, 1, 1) = 1, w_z(1, 1, 1) = -3$.

3.2 Extremos de funciones escalares

En \mathbf{R} , los puntos interiores a con $f'(a) = 0$ eran (junto a puntos sin derivada) candidatos a extremo local (aunque podían no serlo). Y si además $f''(a)$ era mayor o menor que 0 se concluía, respectivamente, que era mínimo o máximo. También muchas veces, sobre intervalos cerrados, los extremos de una f se daban en los extremos del intervalo. Generalicemos estas ideas a campos escalares en \mathbf{R}^n (y en particular, en \mathbf{R}^2 donde trabajaremos casi siempre). Las definiciones de extremos absolutos y relativos son iguales:

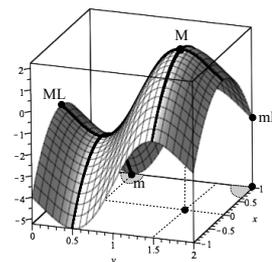
El valor **máximo** (o máximo absoluto) de f sobre un conjunto A se toma en un punto \mathbf{a} si es $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$. Tiene un **máximo local** (o relativo) en \mathbf{a} si existe un entorno $B_r(\mathbf{a})$ tal que $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap A$. Análogamente se define **mínimo** (absoluto o local). Máximos y mínimos se llaman **extremos** de f .

Miremos la gráfica de la derecha de una f en el rectángulo $A = [-1, 1] \times [0, 2]$. [En concreto es $f(x, y) = (y-1)e^{4y-2y^2} - 3x^2$ que trataremos en un ejemplo].

El máximo absoluto parece estar en $(0, \frac{3}{2})$ (y ahí también habrá máximo local).

El mínimo se tomará, según el dibujo, en dos puntos de $\partial A : (\pm 1, \frac{1}{2})$. Se ven además, por ejemplo, un máximo local en $(0, 0)$ y un mínimo local en $(-1, 2)$.

Se observa que en $(0, \frac{3}{2})$ las derivadas parciales se anulan. Y lo mismo sucede en $(0, \frac{1}{2})$, aunque en ese punto no hay ningún extremo (ni siquiera local).



Teor 1. Si f es diferenciable en $\mathbf{a} \in \text{int}D$ y f tiene extremo local en $\mathbf{a} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

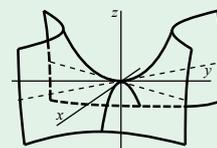
Pues $f(a_1, \dots, x, \dots, a_n)$ tendrá un extremo en $x = a_k$ interior $\Rightarrow f_{x_k}(\mathbf{a}) = 0$.

A los puntos en los que se anula ∇f (todas las parciales) se les llama **puntos críticos** de f .

Pero aquí es más complicado discutir lo que pasa en los puntos críticos (en \mathbf{R}^2 esto sólo nos dice que el plano tangente es horizontal). Comencemos viendo que **puede ser $\nabla f = \mathbf{0}$ y no haber ningún extremo**:

Ej 1. Para $h(x, y) = y^2 - x^2$ (silla de montar) es $\nabla h(0, 0) = (-2x, 2y)|_{(0,0)} = (0, 0)$ pero no tiene extremo local en el origen [$h(0, 0) = 0$ y cerca hay puntos $h(x, 0) = -x^2$ de valor negativo y otros $h(0, y) = y^2$ con valor positivo].

[Lo mismo le pasa a $h(x, y) = xy$, cuya gráfica es la misma, girada en torno al eje z].



En el siguiente ejemplo, el punto crítico sí nos proporciona un máximo:

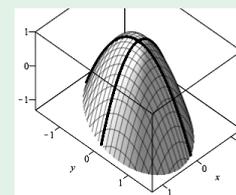
Ej 2. Sea $f(x, y) = 1 - 2x^2 + xy - y^2$. [Las curvas de nivel de f son elipses giradas (hay término xy) y no son fáciles de pintar].

Los cortes con los ejes son: $x=0 \rightarrow z = 1 - y^2$, $y=0 \rightarrow z = 1 - 2x^2$.

Sus puntos críticos se obtienen de: $\begin{cases} f_x = -4x + y = 0 \\ f_y = x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow x=0, y=0$.

Pero aún no hemos probado que haya un máximo. Podemos verlo así:

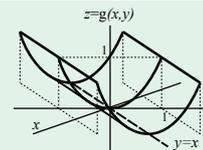
$$f(x, y) = 1 - \frac{7}{4}x^2 - \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 \Rightarrow f(0, 0) = 1 \text{ valor máximo absoluto en todo } \mathbf{R}^2 \text{ (mínimo no hay).}$$



Pueden aparecer infinitos puntos críticos y pueden no ser extremos estrictos (campo dibujado en 1.2):

Ej 3. $g(x, y) = (x-y)^2$. A la vista de la gráfica (o de la propia función) es claro que posee infinitos mínimos (locales y absolutos): todos los puntos de $y=x$ (las definiciones de extremo son con \leq). Que son detectados por el ∇g :

$$g_x = 2(x-y) = 0, g_y = 2(y-x) = 0, \text{ cuando } y=x.$$

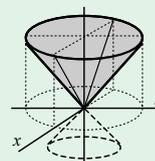


Y, por último, como en \mathbf{R} , pueden existir extremos locales en puntos sin derivadas parciales:

Ej 4. Sea $k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (mitad superior de la superficie cónica $z^2 = x^2 + y^2$).

Ya vimos que en $(0, 0)$ no existen derivadas parciales y, por tanto, que no es diferenciable. [En cualquier otro punto sí lo es k , pero es $\nabla k = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \neq \mathbf{0}$].

Y claramente k tiene un mínimo (local y absoluto) en el origen.



¿Cómo distinguir en \mathbf{R}^2 si en un punto crítico $\mathbf{a} = (a, b)$ de una función $f(x, y) \in C^2$ se alcanza un máximo, un mínimo o ninguno de los dos? (se dice en el último caso que hay un **punto silla**). Como ocurría en \mathbf{R} , de ello nos informarán las derivadas de segundo orden.

Empecemos desarrollando f por **Taylor**. Como en el punto \mathbf{a} se anulan las derivadas primeras, el desarrollo se reduce a:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{2} [f_{xx}(a, b) h^2 + 2f_{xy}(a, b) hk + f_{yy}(a, b) k^2] + o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

Así, la forma de la gráfica cerca de un punto crítico \mathbf{a} dependerá de los términos de orden 2.

Pasamos pues a estudiar cómo será la gráfica de los campos cuadráticos $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ con A, B, C constantes no las tres nulas.

Suponemos $A \neq 0$ y escribimos $AQ(x, y) = A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2 = (Ax + By)^2 + (AC - B^2)y^2$.

Entonces, si $AC < B^2$ tiene Q en $(0, 0)$ un punto silla (en $x = -\frac{By}{A}$ es < 0 , y en $y = 0$, > 0).

Si $AC > B^2$, AQ tiene un mínimo. Q también lo tiene si $A > 0$, y si $A < 0$ tiene un máximo.

[Si $AC = B^2$ (cuadrados perfectos), o si $A = 0$ o $C = 0$ aparecen casos más fáciles de analizar].

Con lo anterior (y probando que los términos de mayor orden no cambian esencialmente la gráfica cerca del punto) se llega a este resultado, en el que aparece el llamado determinante **hessiano** $Hf(\mathbf{a})$:

Teor 2. Sea $Hf = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$.

Si en \mathbf{a} es $f_x = f_y = 0$ y además es $Hf > 0, f_{xx} > 0 \Rightarrow f$ tiene mínimo local en \mathbf{a} .
 $Hf > 0, f_{xx} < 0 \Rightarrow f$ tiene máximo local en \mathbf{a} .
 $Hf < 0 \Rightarrow f$ tiene un punto silla en \mathbf{a} .

[Cuando $Hf = 0$, el teorema no dice nada y puede pasar de todo en un entorno del punto. Recordemos que eso mismo pasaba en \mathbf{R} si era $f''(a) = 0$, y bastantes veces, como allí, la simple inspección de la función puede permitirnos decidir el tipo de punto que es].

Ej 5. Veamos qué dice este teorema sobre los ejemplos 1, 2 y 3. Respectivamente, los hessianos son:

$$Hh(\mathbf{0}) = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 \Rightarrow \text{es un punto silla, como habíamos visto.}$$

$$Hf(\mathbf{0}) = (-4) \cdot (-2) - 1^2 = 7, f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{máximo.}$$

$$Hg(x, x) = (-2) \cdot (-2) - (-2)^2 = 0, \text{ y el teorema no dice nada sobre estos mínimos no estrictos.}$$

[En un \mathbf{a} con $Hf = 0$ puede haber extremos estrictos. Por ejemplo, $f(x, y) = x^4 + y^4$ tiene un claro mínimo].

Ej 6. Clasifiquemos los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 4y + 6$. $\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ f_y = 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases}$

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2, Hf = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x. \text{ En } (1, 2) \text{ es } > 0 \text{ (y también } f_{xx}), \text{ y en } (-1, 2) \text{ es } < 0.$$

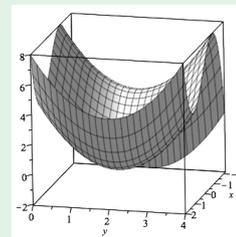
Por tanto, hay un mínimo en $(1, 2)$ [con $f(1, 2) = 0$] y un punto de silla en $(-1, 2)$ [$f(-1, 2) = 4$].

A lo mismo se llegaría desarrollando por Taylor en torno a ambos puntos:

$$f(x, y) = 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + \dots, f(x, y) = 4 - 3(x+1)^2 + (y-2)^2 + \dots$$

[El mínimo local 0 no es absoluto, pues f toma valores negativos: por ejemplo, $f(x, 0) = x^3 - 3x + 6$, y en particular $f(-3, 0) = -12$].

[Una vez más dibujamos la función con Maple para comprobar, aunque no hubiera sido difícil dibujar algunos cortes y curvas de nivel].



Ej 7. Clasifiquemos ahora los de $f(x, y) = y(y-x) e^{x+y}$.

$$\begin{cases} f_x = y(y-x-1) e^{x+y} = 0 \rightarrow y=0, y=x+1 \\ f_y = (2y-x+y(y-x)) e^{x+y} = 0 \rightarrow x=0, 2x+1=0 \end{cases} \rightarrow (0, 0) \text{ o } (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \text{ puntos críticos.}$$

$$f_{xx} = y(y-x-2) e^{x+y}, f_{xy} = [y(y-x) + y-x-1] e^{x+y}, f_{yy} = [y(y-x) + 4y - 2x + 2] e^{x+y} \rightarrow$$

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ silla. } H(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-4} \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/2 \end{vmatrix} > 0 \text{ y } \frac{1}{2}e^{-2} > 0, \text{ mínimo.}$$

Ej 8. Más difícil es clasificar el único punto de $f(x, y) = y^3 - (x-y)^2$.

$$\begin{cases} f_x = 2(y-x) = 0, & y = x \\ f_y = 3y^2 + 2(x-y) = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 0). \text{ Pero el Hessiano } \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ con lo que el Teor 2. no decide.}$$

Pero es inmediato observar que si $y = x$ es $f(x, x) = x^3$, para deducir que se trata de un punto silla [pues en cualquier entorno del origen toma valores mayores y menores que $f(0, 0) = 0$].

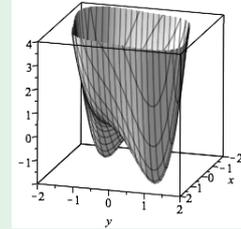
Ej 9. Estudiemos ahora $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 \rightarrow \begin{cases} f_x = 4x^3 - 2(x+y) = 0 \\ f_y = 4y^3 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \rightarrow$

$$4x^3 = 4y^3, \quad y = x, \quad 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow (0, 0), (1, 1), (-1, -1) \text{ puntos críticos.}$$

$$f_{xx} = 12x^2 - 2, \quad f_{yy} = 12y^2 - 2, \quad f_{xy} = -2.$$

En $(\pm 1, \pm 1)$ es $f_{xx} = 10 > 0$, $Hf = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} > 0$ y son mínimos locales.

En $(0, 0)$ es $Hf = 0$ y debemos verlo directamente. Observando que son $f(x, x) = 2x^4 - 4x^2$, $f(x, -x) = 2x^4$ deducimos que se trata de un punto silla.



Ej 10. Encontramos en este ejemplo los b para los que $f(x, y) = x^2 - bxy + y^2 - 4x - 2y$ tiene un mínimo local en un punto de la recta $y = 1$.

$$\text{Debe ser } \begin{cases} f_x = 2x - by - 4 = 0 \\ f_y = 2y - bx - 2 = 0, \quad y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 & b = -4 \\ b = 0 & \text{ó } x = 0 \end{cases} \rightarrow (2, 1), (0, 1) \text{ puntos críticos para esos } b.$$

Como $Hf = \begin{vmatrix} 2 & -b \\ -b & 2 \end{vmatrix} = 4 - b^2$, es $(2, 1)$ un mínimo, si $b = 0$ [y $(0, 1)$ es punto silla si $b = -4$].

Para los extremos de una superficie definida implícitamente, utilizaremos técnicas de la sección anterior 3.1:

Ej 11. Estudiemos si $F(x, y, z) \equiv 4x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz - z = 2$ define funciones implícitas $z = z(x, y)$ y precisemos los extremos de estas funciones.

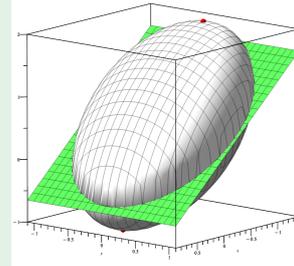
$$F_z = 4z + 4x - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{salvo en el plano } z = \frac{1}{4} - x \text{ define función } C^\infty.$$

$$\text{Derivando: } 8x + 4z + 4xz_x + 4xz_x - z_x = 0 \rightarrow z_x = \frac{8x + 4z}{1 - 4z - 4x}, \quad z_y = \frac{4y}{1 - 4z - 4x}.$$

$$x = -\frac{z}{2}, \quad y = 0 \rightarrow z^2 - z = 2. \quad (-1, 0, 2) \text{ y } (\frac{1}{2}, 0, -1) \text{ puntos críticos.}$$

$$\text{Y usando que } z_x = z_y = 0: \quad z_{xx} = \frac{8}{1 - 4z - 4x} = \frac{8}{1 - 2z}, \quad z_{yy} = \frac{4}{1 - 2z}, \quad z_{xy} = 0.$$

Las matrices Hessianas son: $\begin{pmatrix} -8/3 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{pmatrix}$ máximo, y $\begin{pmatrix} 8/3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}$ mínimo.



Citemos ahora brevemente un resultado para \mathbf{R}^3 para ilustrar lo que sucede en \mathbf{R}^n . Debemos determinar (y eso será estudiado en álgebra) cuándo la 'forma cuadrática' $Q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$ (o lo análogo en \mathbf{R}^n) es estrictamente positiva o negativa. Para una $f(x, y, z)$ se llega a este resultado (que con libros de álgebra se podría refinar más):

$$\text{Sean } H_1 = f_{xx}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad H_3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{vmatrix} \quad \left[\text{'menores principales' de } \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix} \right].$$

Teor 3. Supongamos que en el punto \mathbf{a} es $\nabla f = 0$ y que ningún $H_k = 0$. Entonces:

Si $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$, f tiene un mínimo en \mathbf{a} .

Si $H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0$, f tiene un máximo en \mathbf{a} .

Y f no tiene ni máximo ni mínimo en todos los demás casos.

[Basta pensar en los más claros mínimo o máximo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2$ para hacer verosímiles las condiciones sobre los menores H_k].

Ej 12. Estudiemos el campo escalar $f(x, y, z) = \sin^2 x + y^2 + z^2 - y \sin x + z \sin x - yz$ cerca de $(0, 0, 0)$.

$$f_x = \cos x (2 \sin x - y + z) = 0$$

$$f_y = 2y - \sin x - z = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \text{ es punto crítico. [Hay más, por ejemplo } (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \text{].}$$

$$f_z = 2z + \sin x - y = 0 \quad f_{xx} = 2 \cos 2x + (y-z) \sin x, \quad f_{yy} = f_{zz} = 2, \quad -f_{xy} = f_{xz} = \cos x, \quad f_{yz} = -1.$$

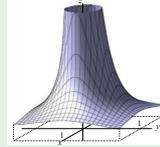
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow H_1 = 2, \quad H_2 = 3, \quad H_3 = 4. \text{ Hay un mínimo en el origen. [En el otro, silla].}$$

[O con Taylor en 3 variables: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz - yz + o(x^2 + y^2 + z^2) \approx \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (x+z)^2 + (y-z)^2]$, claro mínimo].

Pasemos a ocuparnos del cálculo de **extremos absolutos sobre un conjunto** $A \subset \mathbf{R}^n$. Sabemos que su existencia está garantizada cuando f es continua en A **compacto** (en otro caso no).

Ej 13. $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 7$ (discontinua), no tiene máximo en $[0, 1] \times [0, 1]$.

En todo \mathbf{R}^2 no tiene ni máximo ni mínimo. En $[1, 2] \times [0, 1]$ (en ese compacto sí es continua) los alcanza seguro [claramente el máximo 1 se da en $(1, 0)$, punto más próximo al origen, y el mínimo $\frac{1}{5}$ en $(2, 1)$, punto más lejano].



La estrategia para hallar extremos sobre compactos A es similar a la que se utilizaba en \mathbf{R} :

- Encontrar en $\text{int } A$ los puntos críticos y los puntos en que no existan las parciales.
- Localizar los extremos de la función sobre ∂A (quizás con ‘multiplicadores de Lagrange’).
- Comparar los valores en todos estos puntos.

Ej 14. Encontramos los extremos de $f(x, y) = (y-1)e^{4y-2y^2} - 3x^2$ en $[-1, 1] \times [0, 2]$ (primer dibujo de esta sección)

$$f_x = -6x = 0 \rightarrow x = 0.$$

$$f_y = (-4y^2 + 8y - 3)e^{4y-2y^2} = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$$

En esos puntos: $f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{3/2}$, $f(0, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}e^{3/2}$.

Además $f(x, 0) = -1 - 3x^2$ tiene por valor máximo $f(0, 0) = -1$ y el mínimo es $f(\pm 1, 0) = -4$.

$f(x, 2) = 1 - 3x^2$ tiene por valor máximo $f(0, 2) = 1$ y el mínimo es $f(\pm 1, 2) = -2$.

$f(\pm 1, y) = (y-1)e^{4y-2y^2} - 3$ toman valores entre $-\frac{1}{2}e^{3/2} - 3$ y $\frac{1}{2}e^{3/2} - 3$.

Comparando todos estos valores se deduce que el máximo es $\frac{1}{2}e^{3/2}$ y el mínimo $-\frac{1}{2}e^{3/2} - 3$.

[En todo \mathbf{R}^2 no alcanza su mínimo, pues, por ejemplo, $f(x, 0) \rightarrow -\infty$, pero $\frac{1}{2}e^{3/2}$ sí es máximo global].

Ej 1b. Hallemos los extremos de $h(x, y) = y^2 - x^2$ en el conjunto A acotado por la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

Ya vimos que esta silla de montar no tenía extremos en el interior y así el máximo y mínimo han de tomarse en la ∂A de este compacto.

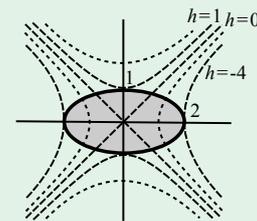
Nuestra elipse se puede describir como: $(2 \cos t, \text{sen } t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Sobre ella, la h vale $h|_{\partial A} = 4 \text{sen}^2 t - \cos^2 t \equiv g(t)$, $g'(t) = 5 \text{sen } 2t$.

Los máximos de g se dan si $t = 0, \pi$ y los mínimos para $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

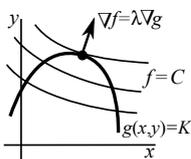
O sea, $h(0, \pm 1) = 1$ y $h(\pm 2, 0) = -4$ son los extremos de h en A .

[A la vista de las curvas de nivel de h y la elipse, la conclusión obtenida resulta evidente].



Una técnica alternativa para buscar extremos de f sobre curvas suaves o, más en general, de hallar ‘**extremos condicionados**’ (de funciones sometidas a condiciones $g = K$) es mediante el cálculo de los llamados ‘**multiplicadores de Lagrange**’:

Teor 4. Sean $f, g : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de C^1 , S el ‘conjunto de nivel’ $g(\mathbf{x}) = K$, $\mathbf{a} \in S$ interior a D y $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Si $f|_S$ (‘ f restringida a S ’) tiene un máximo o un mínimo en \mathbf{a} entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$.



El teorema proporciona $n+1$ condiciones para determinar λ y las n coordenadas de \mathbf{a} : las n de los gradientes y además $g(\mathbf{a}) = K$. No lo demostramos pero damos una justificación geométrica en \mathbf{R}^2 : si buscamos el mayor C para el que es $g = K$, será aquel en que las curvas de nivel $f = C$ y la curva sean tangentes, es decir, para el que ambos gradientes sean múltiplos uno de otro.

Ej 1c. Hallemos con el teorema los extremos de $h|_S$, si $h(x, y) = y^2 - x^2$ y S es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

$$\nabla h = \lambda \nabla g \Leftrightarrow (-2x, 2y) = \lambda(2x, 8y) \text{ y además } g = 4 \rightarrow \begin{cases} 2x(\lambda+1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ó } \lambda = -1 \\ 2y(4\lambda-1) = 0 \quad \downarrow \quad y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \quad y = \pm 1 \quad x = \pm 2 \end{cases}$$

[En los puntos dados por el sistema (los mismos de 1b) son tangentes S y las curvas de nivel].

Cambiamos ahora la restricción por esta recta $R: y = 3x - 4$. Busquemos los extremos de $h|_R$.

[Como ahora el conjunto R no es compacto podrían no existir ni máximos ni mínimos].

$y - 3x = -4$, $(-2x, 2y) = \lambda(-3, 1) \rightarrow \lambda = \frac{2x}{3} = 2y$, $x = 3y$, $-8y = -4$. Punto $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ con $h = -2$.

Mirando la recta y las curvas de nivel, queda claro que en ese punto hay un mínimo.

Directamente: $h(x, 3x-4) = 8(x^2 - 3x + 2)$ tiene mínimo si $x = \frac{3}{2}$ (de valor -2) y no tiene máximo.

Dos cálculos de extremos sobre círculos:

Ej 15. Encontramos los valores extremos de $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x$ sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$.

$$\begin{aligned} g_x = 2(x-2) = 0 &\rightarrow (2, 0). \text{ Como } Hg = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0, \text{ el punto es un mínimo.} \\ g_y = 4y = 0 & \end{aligned}$$

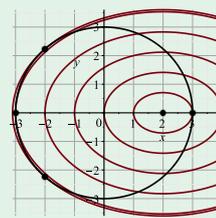
[Poniendo $g = (x-2)^2 + 2y^2 - 4$ queda claro (y que es absoluto)].

Ambos extremos han de existir, por ser g continua en un conjunto compacto.

Sobre el borde del círculo: $\begin{aligned} x-2 = \lambda x & \quad x = -2, y = \pm\sqrt{5} \\ 2y = \lambda y & \rightarrow \lambda = 2 \uparrow, y = 0 \downarrow \\ x^2 + y^2 = 9 & \quad x = \pm 3 \end{aligned}$. 5 candidatos:

$$g(-2, \pm\sqrt{5}) = \boxed{22} \text{ máximos, } g(-3, 0) = 21, g(3, 0) = -3, g(2, 0) = \boxed{-4} \text{ mínimo.}$$

[Las curvas de nivel de g son elipses, que, como deben, son tangentes en los puntos hallados a la circunferencia].



Ej 16. Hallemos los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = 3y^2 - x^3$ sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

Los extremos han de existir por ser f continua en el conjunto compacto (el círculo).

Localizamos los puntos críticos en el interior (claramente no hay 'picos', pues $f \in C^\infty$):

$$\begin{cases} f_x = -3x^2 = 0 \\ f_y = 6y = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 0). \quad H = \begin{vmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36x. \quad H(0, 0) = 0 \text{ y el Hessiano no decide.}$$

[Aunque no se necesita (basta comparar $f(0, 0) = 0$ con el resto), como $f(x, 0) = -x^3$ es una silla].

Para calcular los extremos el borde $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$ podemos usar multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} -3x^2 = 2\lambda x & x = -2, 0 \rightarrow y = \pm 2 \\ 6y = 2\lambda y & \rightarrow y = 0, \lambda = \pm 3 \\ x^2 + y^2 = 4 & x = \pm 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} f(0, \pm 2) &= \boxed{12} \text{ valor máximo.} \\ f(2, 0) &= \boxed{-8} \text{ valor mínimo.} \end{aligned} \quad f(-2, 0) = 8.$$

O se podría parametrizar la circunferencia $(2 \cos t, 2 \sin t), t \in [-\pi, \pi] \rightarrow f|_C = 12 \sin^2 t - 8 \cos^3 t \equiv s(t)$
 $\rightarrow s'(t) = 24 \sin t \cos t (1 + \cos t) = 0 \rightarrow t = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$, que nos vuelve a dar los puntos de arriba.

O, incluso, es sencillo aquí $y^2 = 4 - x^2 \rightarrow f|_C = 12 - 3x^2 - x^3$, hallar sus extremos en $[-2, 2]$ y deducir los y .

Los multiplicadores de Lagrange permiten resolver problemas abordables por otros caminos. Algunas veces acortan los cálculos y otros los alargan (por ejemplo, si la restricción es de expresión sencilla):

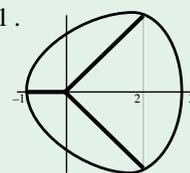
Ej 17. Hallar los puntos de la curva $3y^2 = 21 + 20x - x^4$ situados a mayor y menor distancia del origen.

[Existen por estar x e y acotadas]. $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $g(x, y) = x^4 - 20x + 3y^2 = 21$.

$$(2x, 2y) = \lambda(4x^3 - 20, 6y) \text{ y } g = 21 \rightarrow \begin{cases} 4\lambda x^3 - 2x - 20\lambda = 0 & x = 2 \\ 2y(3\lambda - 1) = 0 & \rightarrow y = 0 \downarrow \text{ ó } \lambda = \frac{1}{3} \uparrow \downarrow \\ 3y^2 = 21 + 20x - x^4 & x = -1, 3 \quad y = \pm\sqrt{15} \end{cases}$$

$$f(-1, 0) = 1 \text{ (mínimo), } f(3, 0) = 9, f(2, \pm\sqrt{15}) = 19 \text{ (máximos).}$$

[En ninguno de los ejemplos vistos se anulaba ∇g sobre la curva S . Si fuera $\nabla g(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ para algún $\mathbf{a} \in S$, a la vista del teorema, habría que incluir este \mathbf{a} entre los candidatos].



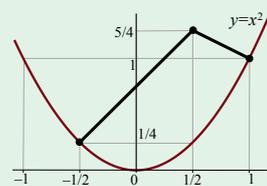
Ej 18. Hallemos el punto de la parábola $y = x^2$ más cercano al punto $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.

Para ello minimizamos $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{4})^2$ con la restricción $y - x^2 = 0$.

$$(2x - 1, 2y - \frac{5}{2}) = \lambda(-2x, 1) \text{ e } y = x^2 \rightarrow \begin{cases} 2x\lambda + 2x = 1 & \rightarrow 4x^3 - 3x - 1 = 0 \\ \lambda = 2x^2 - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow x = 1, -\frac{1}{2} \text{ (doble). El punto } (1, 1) \text{ está más cerca (a distancia } \frac{\sqrt{5}}{4} \text{).}$$

[Con técnicas de una variable: basta hallar el mínimo de $(x - \frac{1}{2})^2 + (x^2 - \frac{5}{4})^2$, que lleva a la misma ecuación en x , dándonos además la derivada información sobre crecimiento y decrecimiento que no da Lagrange].



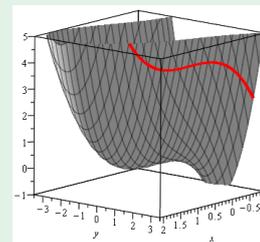
Ej 19. Sea $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$. a) Clasifiquemos los puntos críticos de f . ¿Posee extremos absolutos?

b) Hallemos sus extremos locales sobre $x + y = 2$ sin utilizar y utilizando multiplicadores de Lagrange.

a) $\begin{aligned} f_x = 3x^2 + 2y = 0 \\ f_y = 2x + 2y = 0, y = -x \end{aligned} \rightarrow (0, 0) \text{ silla, } (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \text{ mínimo, pues } H = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$
 Como $f(x, 0) = x^3 \rightarrow \pm\infty$ como $x \rightarrow \pm\infty$, no hay extremos absolutos.

b) $f(x, 2-x) = x^3 - x^2 + 4 \xrightarrow{d/dx} x(3x-2) \rightarrow (0, 2) \text{ máximo (con valor 4).}$
 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \text{ mínimo (valor } \frac{104}{27} \text{).}$

Lagrange: $\begin{aligned} 3x^2 + 2y = \lambda \\ 2x + 2y = \lambda \\ x + y = 2 \end{aligned} \rightarrow 3x^2 = 2x, x = 0, 2/3 \searrow (0, 2) \text{ y } (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}).$



En los siguientes ejemplos se trabaja con funciones de tres variables.

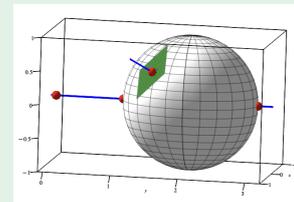
Ej 20. Sea el elipsoide dado por $2x^2+(y-2)^2+z^2=1$. a) Escribir su plano tangente en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.
b) Calcular utilizando multiplicadores de Lagrange sus puntos más y menos cercanos al origen.

a) Si $F \equiv 2x^2+(y-2)^2+z^2$ es $\nabla F = (4x, 2(y-2), 2z) \xrightarrow{(1/2, 3/2, 1/2)} (2, -1, 1)$.

El plano tangente: $(2, -1, 1) \cdot (x - \frac{1}{2}, y - \frac{3}{2}, z - \frac{1}{2}) = 0 \rightarrow \boxed{z = y - 2x}$.

b) Minimizamos $D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con la condición $F = 1$.

$$\begin{cases} 2x = 4\lambda x, & x(1-2\lambda) = 0 \rightarrow x=0 \text{ o } \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow y = -2, z = 0 \text{ (imposible la 4)} \\ 2y = 2\lambda(y-2), & y(1-\lambda) + 2\lambda = 0 \leftarrow \\ 2x = 2\lambda z, & z(1-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 1 \text{ (imposible) o } z = 0 \quad (0, 1, 0) \text{ próximo } (d=1), \\ 2x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1 & \xrightarrow{x=z=0} y = 1, 3 \quad (0, 3, 0) \text{ lejano } (d=3). \end{cases}$$



[Esfera comprimida en el sentido del eje x y centrada en $(0, 2, 0)$].

Hay otra forma de obtener el conjunto de ecuaciones $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$ y $g(\mathbf{x}) = K$: pensando en la función $L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda[g(\mathbf{x}) - K]$, con λ como una variable más, y haciendo $\nabla L = \mathbf{0}$, pues de esto salen las mismas ecuaciones. Operamos así en los siguientes ejemplos en \mathbf{R}^3 :

Ej 21. Hallemos los máximos y mínimos de $f(x, y, z) = x + y^2 + z$ sobre la superficie $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$.

Los extremos existirán por ser f continua y ser la superficie (un elipsoide) un conjunto compacto.

Consideremos $L = f - \lambda g = x + y^2 + z - \lambda(2x^2 + y^2 + 2z^2 - 1)$ y hagamos $\nabla L = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} L_x = 1 - 4\lambda x = 0, & x = \frac{1}{4\lambda} \\ L_y = 2y - 2\lambda y = 0, & y = 0 \text{ ó } \lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow \frac{1}{8\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 1, \lambda = \pm \frac{1}{2} \rightarrow (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}). \\ \lambda = 1 \rightarrow x = z = \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + y^2 = 1 \rightarrow (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}). \end{cases} \\ L_z = 1 - 4\lambda z = 0, & z = \frac{1}{4\lambda} \\ L_\lambda = 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0 & f(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = 1, f(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = -1, f(\frac{1}{4}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Por tanto, el valor mínimo absoluto es -1 , y el valor máximo es $\frac{5}{4}$ (que se alcanza en dos puntos).

[En \mathbf{R}^3 los multiplicadores abrevian más. Deberíamos parametrizar el elipsoide para trabajar directamente].

Ej 22. Una caja rectangular sin tapa tiene una superficie igual a 12. Encontramos las dimensiones que hacen máximo su volumen.

Si las aristas son $x, y, z > 0$ el volumen es $V = xyz$. Y se debe cumplir además: $xy + 2xz + 2yz = 12$.

$$\text{Sea } L(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 12) \rightarrow \begin{cases} L_x = yz + \lambda(y + 2z) = 0 \\ L_y = xz + \lambda(x + 2z) = 0 \\ L_z = xy + 2\lambda(x + y) = 0 \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sistema invariante} \\ \text{cambiando } x \text{ por } y \\ \Rightarrow y = x. \end{array}$$

$$\begin{cases} xz + \lambda(x + 2z) = 0 & xz - \frac{x}{4}(x + 2z), 2xz = x^2 \\ x^2 + 4\lambda x = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{x}{4} \quad (x > 0) \uparrow \\ x^2 + 4xz = 12 & \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{El mínimo será } V = 4. \\ 3x^2 = 12, x = 2 = y, z = \frac{x}{2} = 1. \end{array}$$

Se pueden resolver problemas con varias restricciones, incluyendo más de un multiplicador de Lagrange. Si, por ejemplo, queremos hallar los extremos de una $f(x, y, z)$ sujeta a dos condiciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$ basta considerar $L = f - \lambda g - \mu h$, imponer $\nabla L = \mathbf{0}$ y resolver las 5 ecuaciones resultantes.

[Cada una de las condiciones define una superficie y, en general, tendrán una curva de intersección S . En el punto en que haya un extremo la superficie de nivel $f = C$ y la curva S serán tangentes. Como ∇g y ∇h determinan el plano normal a la curva en el punto y ∇f está en ese plano, deben existir escalares λ y μ (los multiplicadores de Lagrange) tales que $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$].

Ej 23. Hallar el punto más cercano al origen de la recta intersección de los planos $x + y + z = 3$ y $x + 2y + 3z = 18$.

Minimizamos $x^2 + y^2 + z^2$ con 2 condiciones: $L = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 3) - \mu(x + 2y + 3z - 18)$.

$L_x = 2x - \lambda - \mu = 0$, $L_y = 2y - \lambda - 2\mu = 0$, $L_z = 2z - \lambda - 3\mu = 0$, $L_\lambda = 0$, $L_\mu = 0$ dan los planos.

$$2x - \lambda - \mu = 0 \text{ y } 3x - 2\lambda - 2\mu = 0 \rightarrow 2x - 2y = \mu = 2y - 2z, z = 2y - x \rightarrow \begin{cases} 3y = 3 \\ 8y - 2x = 18 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = -5, y = 1, z = 7}.$$

Más largo sin usar multiplicadores. Por ejemplo, parametrizando la recta. El vector dirección lo da $(1, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -2, 1)$ y un punto, por ejemplo, es $(-9, 9, 3)$ [$z = 3 \rightarrow x + y = 0, x + 2y = 9$].

Sobre la recta: $d(t) \equiv (t-9)^2 + (9-2t)^2 + (t+3)^2$, $d' = 12t - 48$, mínimo si $t = 4 \rightarrow (-5, 1, 7)$.