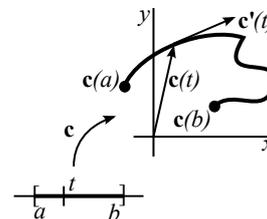


5. Integrales de línea

5.1 Integrales de campos escalares sobre curvas

Una **función vectorial** (que también llamaremos **trayectoria** o **camino**) era una $\mathbf{c} : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, cuya gráfica $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es una **curva orientada** C en \mathbf{R}^n y su derivada $\mathbf{c}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ proporciona el vector tangente a la curva (el vector velocidad, si $\mathbf{c}(t)$ está describiendo un movimiento en \mathbf{R}^n).

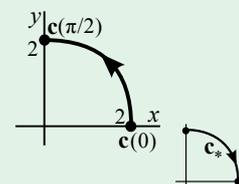


[La recta tangente a C en $\mathbf{c}(t_0)$ era: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t_0) + t \mathbf{c}'(t_0)$].

\mathbf{c} se dice C^1 si es continua y \mathbf{c}' existe y es continua $\forall t \in (a, b)$. Es C^1 a trozos si C es continua y $[a, b]$ se puede dividir en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales \mathbf{c} es C^1 [su gráfica sería entonces una curva continua sin recta tangente en un número finito de puntos].

Ej 1. $\mathbf{c} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ es una trayectoria C^1 pues $\mathbf{c}'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ existe $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$\mathbf{c}_* : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}_*(t) = (t, \sqrt{4-t^2})$, $\mathbf{c}'_*(t) = (1, -t(4-t^2)^{-1/2})$ es otro camino C^1 describiendo la misma curva C , pero en sentido opuesto. Se dice que \mathbf{c} y \mathbf{c}_* son dos **parametrizaciones** del tramo de circunferencia.



Sea $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ un camino C^1 y sea f un campo escalar en \mathbf{R}^n tal que $f(\mathbf{c}(t))$ es continua en $[a, b]$. La integral de f a lo largo de \mathbf{c} se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Si $\mathbf{c}(t)$ es solamente C^1 a trozos o si $f(\mathbf{c}(t))$ es continua a trozos, definiremos $\int_{\mathbf{c}} f ds$ descomponiendo $[a, b]$ en intervalos sobre los que $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua y sumando las integrales sobre cada uno de ellos.

Ej 1*. Si $f(x, y) = xy^2$ y \mathbf{c} , \mathbf{c}_* son los de arriba, las integrales a lo largo de las dos trayectorias son:

$$\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = 2, \quad \int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^{\pi/2} 16 \cos t \sin^2 t dt = \frac{16}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}.$$

$$\|\mathbf{c}'_*\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{4-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}, \quad \int_{\mathbf{c}_*} f ds = \int_0^2 t(4-t^2) \frac{2}{\sqrt{4-t^2}} dt = -\frac{2}{3} (4-t^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Probaremos en 5.2 que:

Teor 1. Si \mathbf{c} y \mathbf{c}_* describen la misma curva C , entonces $\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_{\mathbf{c}_*} f ds \equiv \int_C f ds$.

Como **la integral de línea de una f escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva**, es lícita la notación $\int_C f ds$ (integral de f sobre C) donde \mathbf{c} no aparece por ningún lado.

La raíz de la norma hace que el cálculo de estas integrales sea (salvo para curvas sencillas) complicado y no es extraño que aparezcan integrales no calculables. [En las de campos vectoriales no ocurrirá esto]. Además de las circunferencias, también suelen ser fáciles estas integrales sobre segmentos:

Ej 2. Calculemos la integral de la $f(x, y) = xy^2$ ahora sobre el segmento que une $(0, 2)$ y $(2, 0)$.

Podemos parametrizarlo utilizando que pertenece a la recta $y = 2 - x$:

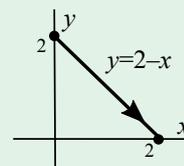
$$\mathbf{c}(x) = (x, 2-x), \quad x \in [0, 2]. \quad \|\mathbf{c}'(x)\| = \|(1, -1)\| = \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^2 \sqrt{2} x(2-x)^2 dx = \sqrt{2} \left[2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \sqrt{2}.$$

O también con la expresión para los segmentos que ya vimos en 1.1:

$$\mathbf{c}_*(t) = (0, 2) + t(2, -2) = (2t, 2-2t), \quad t \in [0, 1]. \quad [\text{Mismo sentido, doble velocidad}].$$

$$\|\mathbf{c}'_*(t)\| = 2\sqrt{2} \rightarrow \int_{\mathbf{c}_*} f ds = 16\sqrt{2} \int_0^1 t(1-t)^2 dt = 16\sqrt{2} \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \sqrt{2}. \quad [\text{Debía salir lo mismo}].$$



Interpretemos estas integrales. Sea primero $f \equiv 1$. Si pensamos que $\mathbf{c}(t)$ describe una partícula en movimiento, al ser $\|\mathbf{c}'(t)\|$ la velocidad escalar en el instante t , parece claro que $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt$ ('diferencial de arco') será la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo dt ' y por tanto:

$$L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt \text{ representa la longitud de la curva } C \text{ definida por } \mathbf{c}.$$

Antes de los ejemplos, veamos la forma que adopta la fórmula para curvas dadas en cartesianas o polares:

Teor 2. Si C es la gráfica de $y=f(x)$, $x \in [a, b]$, su longitud es $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$.
 Cuando C viene dada por $r=f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, será $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2} d\theta$.

La primera es obvia a partir la parametrización habitual $\mathbf{c}(x) = (x, f(x))$, $x \in [a, b]$.

[La fórmula, desde luego, es totalmente análoga para curva dada por $x=g(y)$].

La segunda: $\mathbf{c}(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta)$, $\mathbf{c}'(\theta) = (f' \cos \theta - f \sin \theta, f' \sin \theta + f \cos \theta)$

$$\rightarrow \|\mathbf{c}'(\theta)\| = \sqrt{f^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (f')^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{f^2 + (f')^2}.$$

El primer ejemplo es otro de los pocos en los que se puede calcular una longitud mediante integrales sencillas. [En la mayoría de los casos se acaba necesitando una integración aproximada de algún tipo, como ocurre con la simple parábola cúbica $y=x^3$ o con el cálculo de la longitud de una elipse].

Ej 3. Hallemos la longitud de la curva descrita por $\mathbf{c}(t) = (2t^2, t^3)$, $t \in [-1, 1]$.

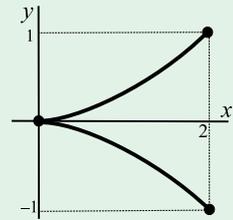
$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{16t^2 + 9t^4}, L = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{16+9t^2} dt = \frac{2}{27} (16+9t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{122}{27} \approx 4.52.$$

O con parametrización cartesiana de la misma curva (y utilizando su simetría):

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}, x \in [0, 2] \Rightarrow L = 2 \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9x}{32}} dx = \frac{128}{27} \left(1 + \frac{9x}{32}\right)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{2}{27} [125 - 64].$$

[Lleva a cálculos más largos la otra cartesiana basada en $x=2y^{2/3}$].

[Cuando $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$ podían aparecer **picos** en las curvas, por no tener el vector tangente dirección definida].



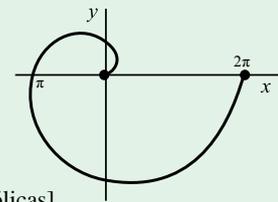
En este aparece una integral que es larga, pero calculable:

Ej 4. Para la curva en polares $r=\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (espiral de Arquímedes) será su longitud, según la fórmula segunda del teorema 2:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta. \text{ Integral resoluble con } u = \theta + \sqrt{\theta^2 + 1}, \text{ pues:}$$

$$\theta = \frac{u^2 - 1}{2u}, d\theta = \frac{(u^2 + 1)du}{2u^2} \rightarrow L = \frac{1}{2} [\theta\sqrt{\theta^2 + 1} + \log|\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}|] \Big|_0^{2\pi} \approx 21.3.$$

[También se pueden hacer estas primitivas con cambios que usas funciones hiperbólicas].



Si ahora f es cualquier campo con $f(\mathbf{c}(t)) \geq 0 \forall t \in [a, b]$, $\int_C f ds$ representa para $n=2$ el **área de la valla** de altura $f(x, y)$ en cada (x, y) de la curva C , pues un 'diferencial de valla' tiene área $f(\mathbf{c}(t)) ds = f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$.

[Si f no tiene signo definido, será la diferencia entre las áreas de las vallas que queden por encima y por debajo de $z=0$].

Tiene otra posible interpretación válida para $n=2$ o para $n=3$:

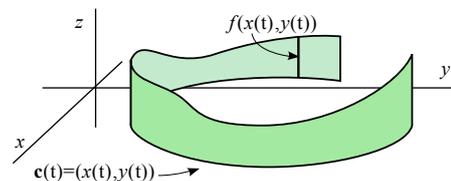
Si $\mathbf{c}(t)$ describe un alambre de densidad variable dada por $\sigma(\mathbf{x})$, la **masa del alambre** será:

$$M = \int_C \sigma ds \quad (\text{tanto en el plano como en el espacio}).$$

El **centro de gravedad** (centroide si σ constante) del alambre, tendrá por coordenadas:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x \sigma ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y \sigma ds; \quad \text{si } n=3, \text{ además } \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z \sigma ds.$$

En general, también sirven para hallar el **valor medio** de cualquier f sobre C : $\bar{f} = \frac{1}{L} \int_C f ds$.



Hacemos un sencillo primer ejemplo de integral sobre curva C^1 sólo a trozos e interpretamos el resultado:

Ej 5. Integremos $f(x, y) = x - y$ sobre la curva C^1 a trozos $\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (0, 1-t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 0), & t \in [1, 2] \end{cases}$.

Integramos sobre cada segmento y sumamos el resultado.

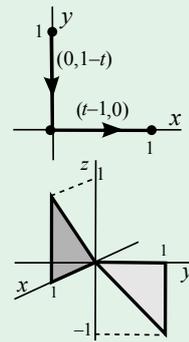
Sobre el vertical, $f(\mathbf{c}_1(t)) = t-1$, $\|\mathbf{c}'_1(t)\| = \|(0, -1)\| = 1 \rightarrow$

$$\int_{\mathbf{c}_1} f \, ds = \int_0^1 (t-1) \, dt = -\frac{1}{2}.$$

Sobre el otro, $f(\mathbf{c}_2(t)) = t-1$, $\|\mathbf{c}'_2(t)\| = 1$, $\int_{\mathbf{c}_2} f \, ds = \int_1^2 (t-1) \, dt = \frac{1}{2}$.

La integral total es, por tanto: $\int_C f \, ds = \int_{\mathbf{c}_1} + \int_{\mathbf{c}_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

[El área de la valla positiva sobre el eje de las x se cancela con el área negativa de la valla bajo el eje de las y].



Otras de las curvas para las que $\|\mathbf{c}'\|$ lleva a cálculos sencillos son las hélices:

Ej 6. Sea el alambre en forma de hélice: $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $t \rightarrow (\cos t, \sin t, t)$ y de densidad $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Como $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{2}$, se tiene que:

Su longitud es $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.9$.

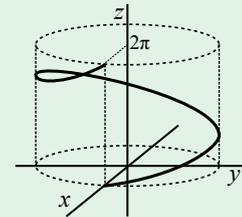
Su masa es $M = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \, dt = \sqrt{2} (2\pi + \frac{8}{3}\pi^3) \approx 125.8$.

[Su densidad media es, por tanto: $1 + \frac{4}{3}\pi^2 \approx 14.2$].

Su centro de gravedad: $\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \cos t (1+t^2) \sqrt{2} \, dt = \frac{6}{3+4\pi^2} \approx 0.014$,

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \sin t (1+t^2) \sqrt{2} \, dt = -\frac{6\pi}{3+4\pi^2} \approx -0.44, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} t (1+t^2) \sqrt{2} \, dt = 3\pi \frac{1+2\pi^2}{3+4\pi^2} \approx 4.60.$$

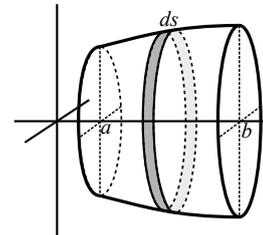
Y su centroide: $\bar{x} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \cos t \sqrt{2} \, dt = 0$, $\bar{y} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \sin t \sqrt{2} \, dt = 0$, $\bar{z} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} t \sqrt{2} \, dt = \pi$.



Otra aplicación de este tipo de integrales de f escalares. Si una curva C viene dada por $x = x(t)$, $y = y(t) \geq 0$, $t \in [a, b]$, el **área de la superficie de revolución** obtenida al hacer girar C en torno al eje $y=0$ es:

$$A = 2\pi \int_a^b y \, ds = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$$

[pues el área de la banda de anchura ds es $\approx 2\pi y \, ds$].



En el caso particular de que C sea la gráfica de $y = y(x)$ queda: $A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$.

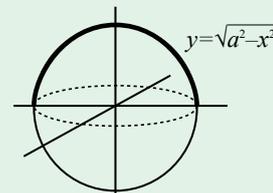
Ej 7. Hallemos el área de la superficie esférica de radio a .

Se puede ver como el giro de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en torno a $y=0$, y por tanto:

$$A = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \, dx = 2\pi \int_{-a}^a a \, dx = 4\pi a^2.$$

O poniendo $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, y con la primera fórmula:

$$ds = a \, dt, \quad A = 2\pi \int_0^\pi a \sin t \, a \, dt = 4\pi a^2.$$



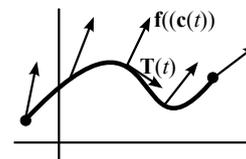
5.2. Integrales de línea de campos vectoriales

Sean $\mathbf{c}(t): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ de C^1 y $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ campo vectorial continuo sobre la gráfica de \mathbf{c} . La integral de línea del campo \mathbf{f} a lo largo de \mathbf{c} se define $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt$. Si $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es sólo continua a trozos, dividimos el intervalo y sumamos las integrales.

Si $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t$ será $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ es el vector tangente unitario, y así:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds.$$

Puede verse la integral de línea de \mathbf{f} como la integral del campo escalar $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$, componente tangencial de \mathbf{f} en la dirección de \mathbf{c} . Por tanto:



$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas \mathbf{f} sobre la partícula que recorre \mathbf{c} .

Se usa otra **notación** (la damos para el plano). Si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [f(x(t), y(t)) x'(t) + g(x(t), y(t)) y'(t)] dt \equiv \int_{\mathbf{c}} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

[La notación es similar para $n > 2$. ¡Cuidado!, pese a su aspecto sigue siendo integral de línea].

Ej 1. Calculemos varias integrales de línea del campo $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 2y+x)$ sobre distintos caminos. Los tres primeros describen el mismo segmento (el tercero en sentido contrario).

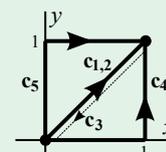
$$\mathbf{c}_1(t) = (t, t), t \in [0, 1] \rightarrow \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, 3t) \cdot (1, 1) dt = \frac{11}{6},$$

$$\mathbf{c}_2(t) = (4t^2, 4t^2), t \in [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (16t^4, 12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = \frac{11}{6},$$

$$\mathbf{c}_3(t) = (1-t, 1-t), t \in [0, 1] \rightarrow \int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t)^2, 3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = -\frac{11}{6}.$$

$$\mathbf{c}_4(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, 1] \\ (1, t-1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t^2, 2t-1) \cdot (0, 1) dt = \frac{7}{3}.$$

$$\mathbf{c}_5(t) = \begin{cases} (0, t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, 2t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 ((t-1)^2, 2+t) \cdot (1, 0) dt = \frac{5}{6}.$$



[La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre; para algunos campos no va a depender siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final].

Ej 2. Hallemos las integrales para los mismos \mathbf{c}_k de arriba, pero ahora para el campo $\mathbf{g}(x, y) = (y, x-4y)$:

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -3t) \cdot (1, 1) dt = -\int_0^1 2t dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (4t^2, -12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = -\int_0^{1/2} 16t^3 dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t), -3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 2(1-t) dt = 1 \text{ [única distinta].}$$

$$\int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t-1, 5-4t) \cdot (0, 1) dt = \int_1^2 (5-4t) dt = -1.$$

$$\int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -4t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 (1, t-5) \cdot (1, 0) dt = -\int_0^1 4t dt + 1 = -1.$$

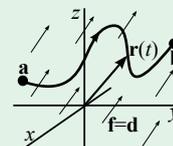
Ej 3. Para $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1)$, es la integral $\int_{\mathbf{c}} z x^2 dx + x y dy + y^3 dz = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^3 \cdot 2t + t^6 \cdot 0) dt = \frac{11}{15}$.

Ej 4. Hallemos el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{f} = \mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ al recorrer una partícula una trayectoria $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ que une dos puntos del espacio $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$:

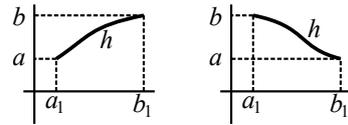
$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt = d_1(x(b)-x(a)) + d_2(y(b)-y(a)) + d_3(z(b)-z(a)) \\ &= \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \text{ independiente del camino } \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Para $\mathbf{c}(t) = \mathbf{r}(a+b-t)$, $t \in [a, b]$, que describe esa curva en sentido opuesto, el

trabajo es $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (-x'(t), -y'(t), -z'(t)) dt = -\mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.



Veamos lo que sucede con la integral al hacer un cambio en el parámetro que describe la curva C . Sea $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $h: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ una biyección C^1 . Si llamamos $\mathbf{r} = \mathbf{c} \circ h: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$, las trayectorias $\mathbf{r}(s)$, $s \in [a_1, b_1]$ y $\mathbf{c}(t)$, $t \in [a, b]$, describen la misma curva, en el mismo sentido o en el opuesto según sea, respectivamente, $h(a_1) = a$, $h(b_1) = b$ o $h(a_1) = b$, $h(b_1) = a$ [la reparametrización conserva o invierte la orientación de C].



Teor 1. Si \mathbf{c} y \mathbf{r} describen la misma curva C , entonces según \mathbf{c} y \mathbf{r} lo hagan en el mismo sentido o en el opuesto se tiene, respectivamente:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \text{ o bien } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$$

Si C es C^1 (si no, dividimos y sumamos las integrales), como $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{c}'(h(s)) h'(s)$ es:

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{f}(\mathbf{c}(h(s))) \cdot \mathbf{c}'(h(s)) h'(s) ds \text{ e } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt$$

Haciendo en la integral de la izquierda $h(s) = t$, se tiene + o - la de la derecha, según se conserve o no la orientación, pues no cambian o sí los límites de integración.

Si estuviésemos integrando un **campo escalar** f , se tendría siempre que:

$$\int_{\mathbf{r}} f ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{c}(h(s))) \|\mathbf{c}'(h(s))\| |h'(s)| du = \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} f ds,$$

y con esto tenemos probado el teorema de la sección anterior.

La integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva C y el sentido en que se recorre (la un campo escalar sólo de C). Podemos elegir las \mathbf{c} más sencillas para calcularlas.

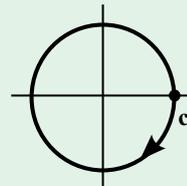
Ej 5. Tiene un sentido preciso hablar de la integral de $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$ a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

[Las integrales sobre curvas cerradas suelen representarse con el símbolo \oint].

Eligiendo $\mathbf{c}(t) = (\cos t, -\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (o $[-\pi, \pi]$, o ...),

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi.$$

Con cualquier otra parametrización que proporcionase el mismo sentido se llegaría a lo mismo.



Ej 6. Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, e^y, xy)$ desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el $(1, 2, 3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

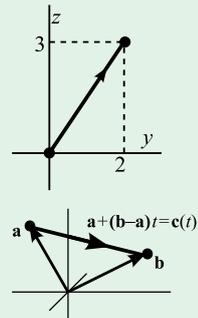
Hay muchas formas de parametrizar un segmento en el espacio. Para este, con $x = 1$ constante, una \mathbf{c} casi salta a la vista: $\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t)$, $t \in [0, 1]$.

[O también, con el dibujo de la derecha: $\mathbf{c}_*(y) = (1, y, \frac{3}{2}y)$, $y \in [0, 2]$].

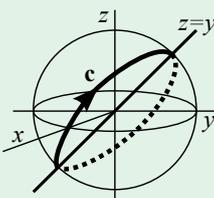
En general, vimos en 1.1 que $\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t$, $t \in [0, 1]$ da el segmento que une \mathbf{a} y \mathbf{b} , pues es una recta, si $t = 0$ estamos en \mathbf{a} y si $t = 1$ en \mathbf{b} .

Calculemos ya la integral pedida (con la primera parametrización dada):

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (3t, e^{2t}, 2t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 (2e^{2t} + 6t) dt = e^2 + 2.$$



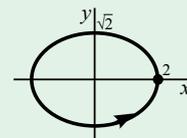
Ej 7. Halleemos el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{f}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ a lo largo de la curva C intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $z = y$, si C es recorrida de modo que, vista desde las z positivas, el sentido es contrario a las agujas del reloj.



Sobre C , como $z = y$, es $x^2 + 2y^2 = 4$ (elipse).

$$\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} (0, \sqrt{2} \sin t - 2 \cos t, 2 \cos t - \sqrt{2} \sin t) \cdot (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \quad (\text{el campo es perpendicular a la trayectoria}). \end{aligned}$$



[Se verá más adelante que serán 0 las integrales sobre un camino cerrado de los campos que sean gradientes de un campo escalar; pero, a pesar de ser $\oint_C = 0$, este campo no lo será, pues $\text{rot } \mathbf{f} = (-2, -2, -2) \neq \mathbf{0}$].

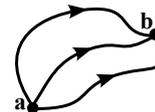
5.3. Integrales de gradientes y teorema de Green

Generalizamos el 2º teorema fundamental del cálculo infinitesimal $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$.

Teor 1. Sea $U: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ un campo escalar C^1 y $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ un camino C^1 a trozos.
Entonces: $\int_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$.

Si $\mathbf{c} \in C^1$ (si no, dividimos), $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b (U \circ \mathbf{c})'(t) dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$.
regla de la cadena

Por tanto, **la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final**. Si sabemos que un campo es un gradiente, su integral pasa a ser sencilla. Además, si $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, la curva descrita por \mathbf{c} es cerrada e $\oint_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = 0$: **la integral de línea de un gradiente a lo largo de cualquier curva cerrada es 0**.



Si un campo vectorial \mathbf{f} es gradiente de alguna función U , a U se le llama **función potencial para \mathbf{f}** , y el campo \mathbf{f} se dice **conservativo**.

¿Cómo saber si \mathbf{f} es conservativo? Condiciones necesarias sencillas para $n=2$ y $n=3$ son:

Teor 2. Si $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow f_y \equiv g_x$.
Si $\mathbf{f}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Si $\mathbf{f} = (f, g) = (U_x, U_y) = \nabla U$, con $U \in C^2$, por la igualdad de Schwartz de las derivadas cruzadas $[U_{xy} = U_{yx}]$ debe ser $f_y \equiv g_x$. Y el mismo argumento se aplica para $n=3$.

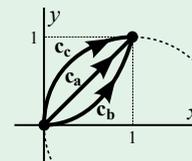
Si las derivadas cruzadas no coinciden, no puede \mathbf{f} ser gradiente. Si son iguales, muchas veces es sencillo hallar la U tal que $\nabla U = \mathbf{f}$ [aunque se verá que la implicación \Leftarrow no es cierta en general].

Ej 1. Sea $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2xy)$. Hallemos la integral entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$ a lo largo de diferentes curvas:
a) la recta que une los puntos, b) la parábola $y=x^2$, c) la circunferencia $x^2+y^2=2x$.

Posibles parametrizaciones: a) $\mathbf{c}_a = (t, t)$, b) $\mathbf{c}_b = (t, t^2)$, c) $\mathbf{c}_c = (t, \sqrt{2t-t^2})$, con $t \in [0, 1]$ todas.

Las integrales en cada caso son:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1, 1) dt &= \int_0^1 3t^2 dt = 1, & \text{b) } \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1, 2t) dt &= \int_0^1 5t^4 dt = 1, \\ \text{c) } \int_0^1 (2t-t^2, 2t\sqrt{2t-t^2}) \cdot \left(1, \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}\right) dt &= \int_0^1 (4t-3t^2) dt = 1. \end{aligned}$$



Como se cumple $\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$, esto nos hace sospechar que \mathbf{f} es un campo conservativo.

Es fácil en este caso identificar una función potencial:

Si $U_x = y^2$, debe ser $U = xy^2 + p(y)$ para alguna función $p \Rightarrow U(x, y) = xy^2$.

Si $U_y = 2xy$, debe ser $U = xy^2 + q(x)$ para alguna función q

[$U = xy^2 + C$ para cualquier constante C es también potencial, desde luego].

Por tanto, todas las parametrizaciones y cálculos de integrales anteriores han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer $U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1$.

Por no depender del camino, hay otras formas de calcular una U : eligiendo caminos sencillos que unan el origen con el punto (x, y) y evaluando la integral de línea. Por ejemplo, con el C^1 a trozos:

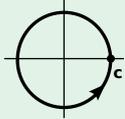
$$\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, x] \\ (x, t), & t \in [0, y] \end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^x (0, 0) \cdot (1, 0) dt + \int_0^y (t^2, 2xt) \cdot (0, 1) dt = xy^2.$$

Haciendo lo mismo para un $\mathbf{f} = (f, g)$ general, obtendríamos: $\int_0^x f(t, 0) dt + \int_0^y g(x, t) dt = U(x, y)$.

Veamos qué campos de los ejemplos de la sección anterior son conservativos. El $(x^2, 2y+x)$ del 1 no lo es por ser $f_y = 0 \neq 1 = g_x$. El $(y, x-4y)$ del 2 sí: $1 \equiv 1$ y $U = xy - 2y^2$ es su potencial. No lo es el del 3, (zx^2, xy, y^3) por no ser $\text{rot } \mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$. El $\mathbf{f} = \mathbf{d}$ del 4 sí lo es [con $U = (d_1x, d_2y, d_3z)$]. El $(y, 0)$ del 5 no: vimos que su integral sobre un camino cerrado era no nula y también lo asegura $1 \neq 0$. Para 6 y 7 el $\text{rot } \mathbf{f}$ es, respectivamente, $(x, 1-y, 0)$ y $(-2, -2, -2)$ y no pueden derivar de una función potencial U .

La integral a lo largo de un camino cerrado resulta ser no nula, a pesar de ser iguales f_y y g_x :

Ej 2. Calculemos la integral de $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ a lo largo de $x^2+y^2=1$ en sentido antihorario.



Si $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\oint_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi$.

Como esta integral no es 0, no puede haber un potencial $U \in C^1$ que contenga la curva.

Y, sin embargo, coinciden las derivadas cruzadas: $f_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = g_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Según este ejemplo, **no es suficiente la igualdad de las derivadas cruzadas para ser conservativo**. Pero hay que pedir muy poco más al campo \mathbf{f} para que sí baste. [Aceptamos los dos teoremas que faltan de esta sección, pues son más difíciles de demostrar y necesitan el teorema de Stokes de 6.2].

Teor 3. Si \mathbf{f} es C^1 en todo \mathbf{R}^2 [\mathbf{R}^3] y $f_y \equiv g_x$ [$\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$] $\Rightarrow \mathbf{f}$ es conservativo.

[El campo $\mathbf{f} \in C^1$ del ejemplo 1 sabemos ahora que es conservativo desde que vimos que $f_y \equiv g_x$. Para el 2, \mathbf{f} no era C^1 en $(0,0)$, el teorema no dice que haya potencial, y no lo hay en todo \mathbf{R}^2].

Hacemos ahora nuestro primer ejemplo en \mathbf{R}^3 :

Ej 3. Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (4x, 3z-2y, 3y)$ desde $(1, 0, 0)$ hasta $(1, 2, 3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

En el ejemplo 6 de 4.2 ya parametrizamos el segmento, y podemos hallar la integral directamente:

$$\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t), \quad t \in [0, 1] \rightarrow \int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (1, 5t, 6t) \cdot (0, 2, 3) dt = 14.$$

Pero para este campo se tiene que $\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4x & 3z-2y & 3y \end{vmatrix} = (3-3)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (0-0)\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Además, obviamente $\mathbf{f} \in C^1(\mathbf{R}^3)$. Existe, pues, una función potencial $U(x, y, z)$ para el campo \mathbf{f} . Los cálculos de los potenciales en \mathbf{R}^3 son similares a los de \mathbf{R}^2 :

$$\begin{aligned} U_x = 4x &\rightarrow U = 2x^2 + p(y, z) \\ \text{Debe ser } U_y = 3z-2y &\rightarrow U = 3yz - y^2 + q(x, z), \quad U = 2x^2 + 3yz - y^2 \Rightarrow \\ U_z = 3y &\rightarrow U = 3yz + r(x, y) \end{aligned} \quad \int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U(1, 2, 3) - U(1, 0, 0) = 16 - 2 = 14.$$

Este es el valor de la integral sobre cualquier camino que una los puntos, por complicado que sea.

Por ejemplo, hallemos la integral a lo largo de $\mathbf{c}_*(t) = (e^{t-t^2}, 2t^3, 3t^2)$, $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_{c_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 (4e^{t-t^2}, 9t^2-4t^3, 6t^3) \cdot ((1-2t)e^{t-t^2}, 6t^2, 6t) dt = \int_0^1 (2(2-4t)e^{2t-2t^2} + 90t^4 - 24t^5) dt \\ &= 2e^{2t-2t^2} + 18t^5 - 4t^6 \Big|_0^1 = 14. \end{aligned}$$

El teorema 3 se puede refinar exigiendo hipótesis menos fuertes. No es preciso que \mathbf{f} sea C^1 en todo \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3 . Basta que lo sea en un conjunto D 'simplemente conexo': toda curva cerrada contenida en el D conexo ('de una sola pieza') debe poder contraerse a un punto de forma continua sin salir del D (en el ejemplo 2 no se puede). En \mathbf{R}^2 esto significa que D no tiene 'agujeros'. En \mathbf{R}^3 , puntos sueltos de discontinuidad no molestan, pero sí, por ejemplo, no serlo en toda una recta.

Ej 2*. En $D = \{x > 0\}$ sí debe existir potencial U para $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Escribiendo $\left(\frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}, \frac{1/x}{1+(y/x)^2}\right)$, es claro que lo es $U(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.

Sobre cualquier curva cerrada contenida en D la integral sí debe ser nula.

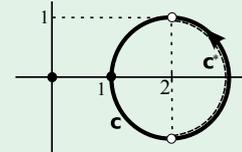
Por ejemplo, sobre la circunferencia $\mathbf{c}(t) = (2+\cos t, \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi] \rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{-s}{5+4c}, \frac{2+c}{5+4c}\right) \cdot (-s, c) dt = \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{3}{5+4\cos t}\right) dt = \left[s = \tan \frac{t}{2}\right] = \pi - \int_0^{\infty} \frac{3 ds}{9+s^2} = \pi - \left[2 \arctan \frac{s}{3}\right]_0^{\infty} = 0.$$

La U da el valor de otras integrales, por ejemplo, de $(2, -1)$ hasta $(2, 1)$ será $\int_{c_*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 2 \arctan \frac{1}{2}$.

Retocando el cálculo de arriba se llega al valor $\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{1}{3} \approx 0.93$, que coincide con el anterior,

ya que $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$, puesto que $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \Rightarrow \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \cdot 1/3} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$.



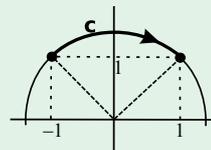
En este ejemplo hay una \mathbf{f} discontinua que, sin embargo, deriva de un potencial C^1 en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Ej 4. Hallemos directamente la integral de línea de $\mathbf{f}(x, y) = (5 - \frac{x}{x^2+y^2}) \mathbf{i} - \frac{y}{x^2+y^2} \mathbf{j}$, entre $(-1, 1)$ y $(1, 1)$, siguiendo el tramo más corto de la circunferencia $x^2+y^2=2$. ¿Existe función potencial U para \mathbf{f} ?

La parametrización más sencilla $\mathbf{c}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$, $t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow$

$$\int_{3\pi/4}^{\pi/4} (5 - \frac{\sqrt{2} \cos t}{2}, -\frac{\sqrt{2} \sin t}{2}) \cdot \sqrt{2} (-\sin t, \cos t) dt = 5\sqrt{2} \cos t \Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} = 10.$$

[En la circunferencia completa la integral se anularía].



Es claramente $f_y = g_x = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$, pero como sólo \mathbf{f} es C^1 en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, con agujero, podría no existir un potencial global. Pero salta a la vista nuestra $U(x, y) = 5x - \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$.

Haciendo uso de ella comprobamos que $\int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U(1, 1) - U(-1, 1) = 5 - \frac{\log 2}{2} + 5 + \frac{\log 2}{2} = 10$.

Y también es conservativo este campo (gravitatorio) del espacio discontinuo en el origen:

Ej 5. Sea $\mathbf{f}(x, y, z) = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \mathbf{i} - y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \mathbf{j} - z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \mathbf{k}$.

\mathbf{f} es C^1 en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, que es simplemente conexo en el espacio. Debe, pues, existir U .

Se ve casi a ojo: $U(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. [En esféricas es $U = \frac{1}{\rho}$ y $\mathbf{f} = -\frac{1}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho = f_\rho \mathbf{e}_\rho$].

La integral a lo largo de cualquier camino \mathbf{c} entre $(0,0,1)$ y $(1,2,2)$ será $\int_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$.

Por ejemplo obtendremos este valor siguiendo el segmento $(t, 2t, 1+t)$, $t \in [0, 1]$:

$$\int_0^1 -(6t+1)(6t^2+2t+1)^{-3/2} dt = [(6t^2+2t+1)^{-1/2}]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

Otro ejemplo más en el espacio, proveniente de algún examen, repasando integrales de línea de escalares, de un gradiente (que fue como empezamos la sección) y, también, integrales en sólidos tridimensionales.

Ej 6. Sea $f(x, y, z) = y$. a) Calcular $\iiint_V f$, para V sólido acotado en $x, y \geq 0$ por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2$.

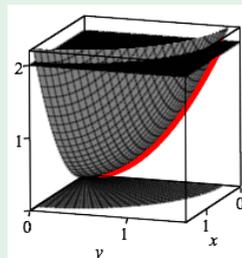
b) Si C es el corte de $z = x^2 + y^2$ con $x = 0$, para $y \geq 0, 0 \leq z \leq 2$, parametrizar la curva C y hallar:

i) $\int_C f ds$, ii) $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s}$, en el sentido las z crecientes.

a) Paraboloides y plano se cortan cuando $x^2 + y^2 = 2$. Cilíndricas o cartesianas:

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{2} r^2 \sin \theta dz dr d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} (2r^2 - r^4) dr d\theta \\ &= [\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{15} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2} y dz dy dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2y - x^2y - y^3) dy dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (1 - x^2 + \frac{x^4}{4}) dx = \frac{8}{15} \sqrt{2}. \end{aligned}$$



b) Parametrizaciones de C : $\mathbf{c}(t) = (0, t, t^2)$, $t \in [0, \sqrt{2}]$ o $\mathbf{c}_*(t) = (0, \sqrt{t}, t)$, $t \in [0, 2]$.

i) $\mathbf{c}'(t) = (0, 1, 2t)$, $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{1+4t^2}$, $\int_C f ds = \int_0^{\sqrt{2}} t (1+4t^2)^{1/2} dt = \frac{1}{12} (1+4t^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}$.

$\mathbf{c}'_*(t) = (0, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 1)$, $\|\mathbf{c}'_*\| = \sqrt{\frac{1}{4t} + 1}$, $\int_C f ds = \int_0^2 \frac{1}{2} (1+4t)^{1/2} dt = \frac{1}{12} (1+4t)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{13}{6}$.

ii) $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(0, \sqrt{2}, 2) - f(0, 0, 0) = \sqrt{2}$. Así de corto, aunque comprobamos con la definición:

$$\int_0^{\sqrt{2}} (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 2t) dt = \int_0^2 (0, 1, 0) \cdot (0, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 1) dt = \sqrt{2}.$$

Acabemos nuestro estudio de los sistemas conservativos admitiendo este resultado general:

Sea \mathbf{f} continua en $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces son equivalentes las afirmaciones:

Teor 4.

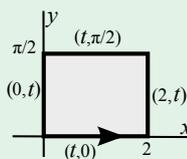
- \mathbf{f} es gradiente de una función potencial U en D .
- La integral de línea de \mathbf{f} es independiente del camino en D .
- La integral de \mathbf{f} a lo largo de todo camino cerrado contenido en D es nula.

En este es claramente más corta la integral doble:

Ej 10. Hallemos $\oint_{\partial D} e^x \sin y \, dx + e^{2x} \cos y \, dy$, con D el rectángulo $[0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^2 (0 \cdot 1 + 0) \, dt + \int_0^{\pi/2} (0 + e^4 \cos t \cdot 1) \, dt - \int_0^2 (e^t \cdot 1 + 0) \, dt - \int_0^{\pi/2} (0 + \cos t \cdot 1) \, dt$$

Con Green: $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2e^{2x} \cos y - e^x \cos y) \, dx \, dy = [\sin y]_0^{\pi/2} [e^{2x} - e^x]_0^2 = e^4 - e^2$.



Se suele utilizar Green para reducir integrales de línea a integrales dobles, normalmente más sencillas. Pero en el siguiente ejemplo procedemos al contrario para calcular un área (fórmula clásica de libros de Cálculo).

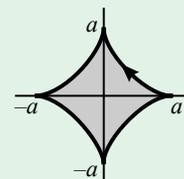
Ej 11. Calculemos el área encerrada por la 'hipocicloide' $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Green dice que: $A = \iint_D dx \, dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x \, dy - y \, dx$, pues $g_x - f_y = 2$.

$\mathbf{c}(\theta) = (a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ es la mejor parametrización.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos^3 \theta)(3a \sin^2 \theta \cos \theta) - (a \sin^3 \theta)(-3a \cos^2 \theta \sin \theta)] \, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} [1 - \cos 4\theta] \, d\theta = \frac{3}{8} \pi a^2.$$



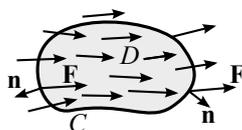
[los picos de la curva aparecen para $\mathbf{c}' = 0$].

Del teorema de Green se obtiene fácilmente el **teorema de la divergencia en el plano**:

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo C^1 y \mathbf{n} el vector normal unitario exterior a ∂D . Entonces es $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds$.

Si ∂D viene dada por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, la normal es $\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$.

Si $\mathbf{f} = (f, g)$, $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_a^b [f(x(t), y(t)) y'(t) - g(x(t), y(t)) x'(t)] \, dt$
 $= \oint_{\partial D} f \, dy - g \, dx \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_D (f_x + g_y) \, dx \, dy$.



[Imaginemos una curva cerrada C sobre la superficie de un fluido y sea $\mathbf{F} = f \mathbf{v}$, donde f es la densidad del fluido y \mathbf{v} su velocidad. Entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$ mide el ritmo con el que el fluido entra o sale de D .

Si la cantidad de fluido en D disminuye (aumenta) será $\oint_C < 0$ ($\oint_C > 0$). La integral coincide con $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}$. Por tanto, la $\operatorname{div} \mathbf{F}$ describe la tendencia del fluido a acumularse o dispersarse].

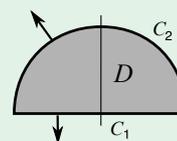
Ej 12. Compruebe este teorema para $\mathbf{f}(x, y) = (7, y^2 - 1)$ y D el semicírculo $r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 2y, \quad \iint_D 2y \, dx \, dy = \int_0^\pi \int_0^3 2r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta = 36.$$

Para C_1 , si $\mathbf{c}(x) = (x, 0)$, $x \in [-3, 3]$, $\mathbf{n} = (0, -1)$, $\int_{C_1} (1 - y^2) \, ds = \int_{-3}^3 dx = 6$.

Para C_2 , si $\mathbf{c}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, $\|\mathbf{c}'(t)\| = 3$.

Como $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t)$, $\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = 3 \int_0^\pi (7 \cos t + 9 \sin^3 t - \sin t) \, dt = 30$. $36 = 6 + 30$.



Ej 13. Compruebe los teoremas de Green y de la divergencia para el campo $\mathbf{f}(x, y) = (x^3, x^2 y)$ y el recinto D del primer cuadrante acotada por $y = 2x$ e $y = x^2$.

Green: $\iint_D [g_x - f_y] = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 2xy \, dy \, dx = \int_0^2 (4x^3 - x^5) \, dx = [x^4 - \frac{x^6}{6}]_0^2 = \frac{16}{3}$.

Posibles parametrizaciones de los dos tramos de ∂D :

$\mathbf{c}_1(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, 2]$, $\mathbf{c}'_1 = (1, 2x)$, $\mathbf{f}(\mathbf{c}_1) = (x^3, x^4)$
 $\mathbf{c}_2(x) = (x, 2x)$, $x \in [2, 0]$, $\mathbf{c}'_2 = (1, 2)$, $\mathbf{f}(\mathbf{c}_2) = (x^3, 2x^3)$ \rightarrow

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{ds} = \int_0^2 (x^3 + 2x^5) \, dx - \int_0^2 (x^3 + 4x^3) \, dx = \frac{2^6}{3} - 2^4 = \frac{16}{3}.$$

Divergencia: $\operatorname{div} \mathbf{f} = 4x^2$. $\mathbf{n}_1 = \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}}$, $\mathbf{n}_2 = \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}}$. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 4x^2 \, dy \, dx = \int_0^2 (8x^3 - 4x^2) \, dx = \frac{32}{5}$.

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_0^2 (x^3, x^4) \cdot \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}} \sqrt{1+4x^2} \, dx - \int_0^2 (x^3, 2x^3) \cdot \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}} \sqrt{5} \, dx = \int_0^2 x^4 \, dx = \frac{32}{5}.$$

