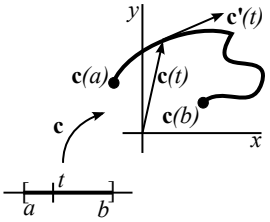
5. Integrales de línea

5.1 Integrales de campos escalares sobre curvas

Una **función vectorial** (que también llamaremos **trayectoria** o **camino**) era una $\mathbf{c} : [a,b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, cuya gráfica $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ es una **curva orientada** C en $\mathbf{R}^n$ y su derivada $\mathbf{c}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$ proporciona el vector tangente a la curva (el vector velocidad, si $\mathbf{c}(t)$ está describiendo un movimiento en $\mathbf{R}^n$).

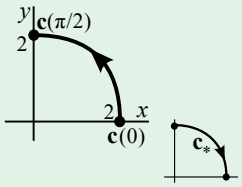


$\big[$La recta tangente a C en $\mathbf{c}(t_o)$ era: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t_o) + t\,\mathbf{c}'(t_o)\,\big]$.

$\mathbf{c}$ se dice C^1 si es continua y $\mathbf{c}'$ existe y es continua $\forall t \in (a,b)$. Es C^1 **a trozos** si C es continua y $[a,b]$ se puede dividir en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales $\mathbf{c}$ es C^1 [su gráfica sería entonces una curva continua sin recta tangente en un número finito de puntos].

Ej 1. $\mathbf{c} : \big[0, \frac{\pi}{2}\big] \to \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t)$ es una trayectoria C^1 pues $\mathbf{c}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t)$ existe $\forall t \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$.

$\mathbf{c}_* : [0,2] \to \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}_*(t) = \big(t, \sqrt{4-t^2}\,\big)$, $\mathbf{c}_*'(t) = \big(1, -t(4-t^2)^{-1/2}\big)$ es otro camino C^1 describiendo la misma curva C, pero en sentido opuesto. Se dice que $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}_*$ son dos **parametrizaciones** del tramo de circunferencia.



Sea $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ un camino C^1 y sea f un campo escalar en $\mathbf{R}^n$ tal que $f\big(\mathbf{c}(t)\big)$ es continua en $[a,b]$. La integral de f a lo largo de $\mathbf{c}$ se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f\,ds \equiv \int_a^b f\big(\mathbf{c}(t)\big)\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt\,.$$

Si $\mathbf{c}(t)$ es solamente C^1 a trozos o si $f(\mathbf{c}(t))$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ descomponiendo $[a,b]$ en intervalos sobre los que $f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua y sumando las integrales sobre cada uno de ellos.

Ej 1*. Si $f(x,y) = xy^2$ y $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_*$ son los de arriba, las integrales a lo largo de las dos trayectorias son:

$$\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t} = 2\,, \quad \int_{\mathbf{c}} f\,ds = \int_0^{\pi/2} 16\cos t\,\mathrm{sen}^2 t\,dt = \tfrac{16}{3}\,\mathrm{sen}^3 t\Big]_0^{\pi/2} = \tfrac{16}{3}\,.$$

$$\|\mathbf{c}_*'\| = \sqrt{1 + \tfrac{t^2}{4-t^2}} = \tfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,, \quad \int_{\mathbf{c}_*} f\,ds = \int_0^2 t\,(4-t^2)\,\tfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = -\tfrac{2}{3}(4-t^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \tfrac{16}{3}\,.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Probaremos en 5.2 que:

Teor 1. Si $\mathbf{c}$ y $\mathbf{c}_*$ describen la misma curva C, entonces $\int_{\mathbf{c}} f\,ds = \int_{\mathbf{c}_*} f\,ds \equiv \int_C f\,ds$.

Como **la integral de línea de una f escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva**, es lícita la notación $\int_C f\,ds$ (integral de f sobre C) donde $\mathbf{c}$ no aparece por ningún lado.

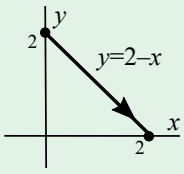
La raíz de la norma hace que el cálculo de estas integrales sea (salvo para curvas sencillas) complicado y no es extraño que aparecezcan integrales no calculables exactamente. [En las de campos vectoriales no ocurrirá esto]. Además de las circunferencias, también suelen ser fáciles los cálculos sobre segmentos:

Ej 2. Calculemos la integral de la $f(x,y) = xy^2$ ahora sobre el segmento que une $(0,2)$ y $(2,0)$.

Podemos parametrizarlo utilizando que pertenece a la recta $y = 2-x$:

$\mathbf{c}(x) = (x, 2-x)$, $x \in [0,2]$. $\|\mathbf{c}'(x)\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{2} \to$

$$\int_{\mathbf{c}} f\,ds = \int_0^2 \sqrt{2}\,x(2-x)^2\,dx = \sqrt{2}\,\big[2x^2 - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4\big]_0^2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{2}\,.$$



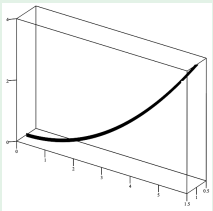
O también con la expresión para los segmentos que ya vimos en 1.1:

$\mathbf{c}_*(t) = (0,2) + t(2,-2) = (2t, 2-2t)$, $t \in [0,1]$. [Mismo sentido, doble velocidad].

$\|\mathbf{c}_*'(t)\| = 2\sqrt{2} \to \int_{\mathbf{c}_*} f\,ds = 16\sqrt{2}\int_0^1 t(1-t)^2 dt = 16\sqrt{2}\,\big[\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{2}{3}t^3 + \tfrac{1}{4}t^4\big]_0^1 = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}$. [Debía salir lo mismo].

Un ejemplo en $\mathbf{R}^3$ con curva y funciones preparadas para que las primitivas sean más o menos sencillas:

Ej 3. Hallemos $\int_C f$, con C dada por $\mathbf{c}(t)=(1,3t,t^2)$, $t\in[0,2]$ y $f(x,y,z)=xy$.



$$\|\mathbf{c}'(t)\|=\|(0,3,2t)\|=\sqrt{9+4t^2},\ f(\mathbf{c}(t))=3t\ \rightarrow$$
$$\int_C f\,ds=\int_0^2 3t\sqrt{9+4t^2}\,dt=\tfrac{1}{4}\left[(9+4t^2)^{3/2}\right]_0^2=\tfrac{1}{4}\left[125-27\right]=\tfrac{49}{2}.$$

Algo más complicada es la integral que aparece para $f(x,y,z)=xyz$:

$$\int_0^2 3t^3\sqrt{9+4t^2}\,dt\overset{s=t^2}{=}\tfrac{3}{2}\int_0^4 s\sqrt{9+4s}\,ds\overset{\bullet}{=}\tfrac{1059}{20}\quad[\bullet\text{ partes o cambio }\sqrt{9+4s}=u\,].$$

Interpretemos estas integrales. Sea primero $f\equiv 1$. Si pensamos que $\mathbf{c}(t)$ describe una partícula en movimiento, al ser $\|\mathbf{c}'(t)\|$ la velocidad escalar en el instante t, parece claro que $ds=\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$ ('diferencial de arco') será la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo dt' y por tanto:

$$\boxed{L=\int_C ds=\int_a^b\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt\ \text{ representa la }\textbf{longitud}\text{ de la curva }C\text{ definida por }\mathbf{c}.}$$

Antes de los ejemplos, veamos la forma que adopta la fórmula para curvas planas en cartesianas o polares:

Teor 2.

> Si C es la gráfica de $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, su longitud es $L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.
>
> Cuando C viene dada por $r=f(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$, será $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}\,d\theta$.

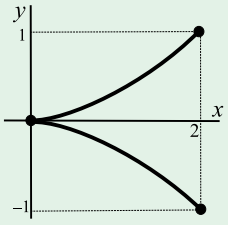
La primera es obvia a partir la parametrización habitual $\mathbf{c}(x)=(x,f(x))$, $x\in[a,b]$.
[La fórmula, desde luego, es totalmente análoga para curva dada por $x=g(y)$].

La segunda: $\mathbf{c}(\theta)=(f(\theta)\cos\theta,f(\theta)\operatorname{sen}\theta)$, $\mathbf{c}'(\theta)=(f'\cos\theta-f\operatorname{sen}\theta,\,f'\operatorname{sen}\theta+f\cos\theta)$

$$\rightarrow\ \|\mathbf{c}'(\theta)\|=\sqrt{f^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)+(f')^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}=\sqrt{f^2+(f')^2}.$$

El primer ejemplo es otro de los pocos en los que se puede calcular una longitud mediante integrales sencillas.

Ej 4. Hallemos la longitud de la curva descrita por $\mathbf{c}(t)=(2t^2,\,t^3)$, $t\in[-1,1]$.



$$\|\mathbf{c}'(t)\|=\sqrt{16t^2+9t^4},\ L=\int_{-1}^1|t|\sqrt{16+9t^2}\,dt=\tfrac{2}{27}(16+9t^2)^{3/2}\Big]_0^1=\tfrac{122}{27}\approx 4.52.$$

O con parametrización cartesiana de la misma curva (y utilizando su simetría):

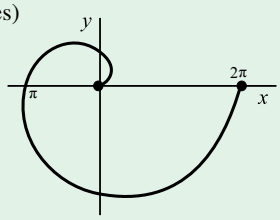
$$y=\left(\tfrac{x}{2}\right)^{3/2},\ x\in[0,2]\ \Rightarrow\ L=2\int_0^2\sqrt{1+\tfrac{9x}{32}}\,dx=\tfrac{128}{27}\left(1+\tfrac{9x}{32}\right)^{3/2}\Big]_0^2=\tfrac{2}{27}\left[125-64\right].$$

[Lleva a cálculos más largos la otra cartesiana basada en $x=2y^{2/3}$].

[Cuando $\mathbf{c}'=\mathbf{0}$ podían aparecer **picos** en las curvas, por no tener el vector tangente dirección definida].

En estos aparecen integrales largas, pero calculables:

Ej 5. La longitud de la curva en polares $r=\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$ (espiral de Arquímedes) será, según la fórmula segunda del teorema 2:



$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$. Primitiva calculable haciendo $u=\theta+\sqrt{\theta^2+1}$, pues:

$$u^2-2u\theta=1\rightarrow\theta=\tfrac{u^2-1}{2u},\ d\theta=\tfrac{(u^2+1)du}{2u^2},\ \sqrt{\cdot\cdot}=u-\theta=\tfrac{(u^2+1)}{2u}\ \rightarrow$$
$$\int\left[\tfrac{u}{4}+\tfrac{1}{4u^3}+\tfrac{1}{2u}\right]du\ \rightarrow\ L=\tfrac{1}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1}+\ln\left|\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right|\right]_0^{2\pi}\approx 21.3.$$

Ej 3*. La longitud de la curva del ejemplo 3 conduce en esencia a la misma primitiva que el anterior:

$$L=\int_0^2\sqrt{9+4t^2}\,dt=\left[\tfrac{t}{2}\sqrt{9+4t^2}+\tfrac{9}{4}\ln\left(2t+\sqrt{9+4t^2}\right)\right]_0^2=5+\tfrac{9}{4}\ln 3\approx 7.47.$$

[También se pueden hacer estas primitivas con cambios de variable que utilizan funciones hiperbólicas].

Pero en la mayoría de los casos aparecen primitivas no calculables y se necesita integración aproximada de algún tipo, como ocurre con la parábola cúbica $y=x^3$ o con el cálculo de la longitud de cualquier elipse:

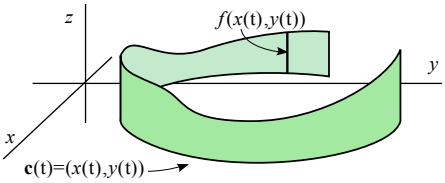
Ej 6. $\mathbf{c}(t)=(t,t^3)$, $t\in[0,1]\ \rightarrow\ L=\int_0^1\sqrt{1+9t^4}\,dt\approx 1.55$.

$\mathbf{c}(t)=(2\cos t,\operatorname{sen}t)$, $t\in[-\pi,\pi]\ \rightarrow\ L=2\int_0^\pi\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2 t}\,dt\approx 9.69$.

[No tiene ninguna de las dos primitiva elemental].

Si ahora f es cualquier campo con $f(\mathbf{c}(t)) \geq 0 \ \forall t \in [a,b]$, $\int_{\mathbf{c}} f\, ds$ representa para $n=2$ el **área de la valla** de altura $f(x,y)$ en cada (x,y) de la curva C, pues un 'diferencial de valla' tiene área $f(\mathbf{c}(t))\, ds = f(\mathbf{c}(t))\, \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt$.

[Si f no tiene signo definido, será la diferencia entre las áreas de las vallas que queden por encima y por debajo de $z=0$].



Tiene otra posible interpretación válida para $n=2$ o para $n=3$. Si $\mathbf{c}(t)$ describe un alambre de densidad variable dada por $\sigma(\mathbf{x})$, la **masa del alambre** será: $\boxed{M = \int_C \sigma\, ds}$ (tanto en el plano como en el espacio).

El **centro de gravedad** (centroide si σ constante) del alambre, tendrá por coordenadas:

$$\boxed{\bar{x} = \tfrac{1}{M}\int_C x\,\sigma\, ds\,,\ \ \bar{y} = \tfrac{1}{M}\int_C y\,\sigma\, ds} \ ;\ \text{si } n=3\text{, además } \boxed{\bar{z} = \tfrac{1}{M}\int_C z\,\sigma\, ds}\,.$$

Y en general, también sirven para hallar el **valor medio** de cualquier f sobre C: $\boxed{\bar{f} = \tfrac{1}{L}\int_C f\, ds}$.

Hacemos un sencillo primer ejemplo de integral sobre curva C^1 sólo a trozos e interpretamos el resultado:

Ej 7. Integremos $f(x,y) = x - y$ sobre la curva C^1 a trozos $\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (0,1-t), & t \in [0,1] \\ (t-1,0), & t \in [1,2] \end{cases}$.

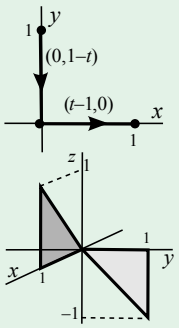
Integramos sobre cada segmento y sumamos el resultado.

Sobre el vertical, $f(\mathbf{c}_1(t)) = t-1$, $\|\mathbf{c}_1'(t)\| = 1 \ \rightarrow \int_{\mathbf{c}_1} f\, ds = \int_0^1 (t-1)\, dt = -\frac{1}{2}$.

Sobre el otro, $f(\mathbf{c}_2(t)) = t-1$, $\|\mathbf{c}_2'(t)\| = 1$, $\int_{\mathbf{c}_2} f\, ds = \int_1^2 (t-1)\, dt = \frac{1}{2}$.

La integral total es, por tanto: $\int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_{\mathbf{c}_1} + \int_{\mathbf{c}_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

[El área de la valla positiva sobre el eje de las x se cancela con el área negativa de la valla bajo el eje de las y].



Otras de las curvas para las que $\|\mathbf{c}'\|$ lleva a cálculos sencillos son las hélices:

Ej 8. Sea el alambre en forma de hélice: $\mathbf{c}\colon [0,2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $t \rightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y de densidad $\sigma(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Como $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{2}$, se tiene que:

Su longitud es $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.9$.

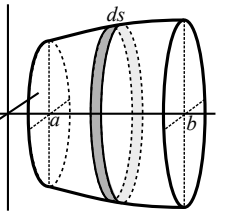
Su masa será $M = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2\right) dt = \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8}{3}\pi^3\right) \approx 125.8$.

[Su densidad media es, por tanto: $1 + \frac{4}{3}\pi^2 \approx 14.2$].

Su centro de gravedad: $\bar{x} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} \cos t\,(1+t^2)\sqrt{2}\, dt = \frac{6}{3+4\pi^2} \approx 0.014$,

$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,(1+t^2)\sqrt{2}\, dt = -\frac{6\pi}{3+4\pi^2} \approx -0.44$, $\bar{z} = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} t\,(1+t^2)\sqrt{2}\, dt = 3\pi\frac{1+2\pi^2}{3+4\pi^2} \approx 4.60$.

Y su centroide: $\bar{x} = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} \cos t\,\sqrt{2}\, dt = 0$, $\bar{y} = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,\sqrt{2}\, dt = 0$, $\bar{z} = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} t\,\sqrt{2}\, dt = \pi$.



Otra aplicación de este tipo de integrales de f escalares. Si una curva C viene dada por $x = x(t)$, $y = y(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$, el **área de la superficie de revolución** obtenida al hacer girar C en torno al eje $y=0$ es:

$$\boxed{A = 2\pi\int_a^b y\, ds = 2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt}$$

[pues el área de la banda de anchura ds es $\approx 2\pi y\, ds$].

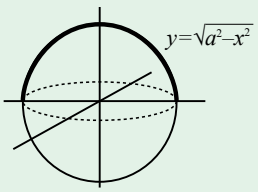
En el caso particular de que C sea la gráfica de $y = y(x)$ queda: $\boxed{A = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\, dx}$.

Ej 9. Hallemos el área de la superficie esférica de radio a.

Se puede ver como el giro de $y = \sqrt{a^2-x^2}$ en torno a $y=0$, y por tanto:

$$A = 2\pi\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\, dx = 2\pi\int_{-a}^{a} a\, dx = 4\pi a^2.$$

O con $\mathbf{c}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t)$, $t \in [0,\pi]$: $A = 2\pi\int_0^{\pi} a\operatorname{sen} t\; a\, dt = 4\pi a^2$.

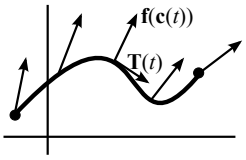


5.2. Integrales de campos vectoriales y de gradientes.

Sean $\mathbf{c}(t):[a,b]\to\mathbf{R}^n$ de C^1 y $\mathbf{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ campo vectorial continuo sobre la gráfica de $\mathbf{c}$.
La integral de línea del campo $\mathbf{f}$ a lo largo de $\mathbf{c}$ se define $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b \mathbf{f}\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt$.
Si $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)$ es sólo continua a trozos, dividimos el intervalo y sumamos la integrales.

Si $\mathbf{c}'(t)\neq\mathbf{0}\ \forall t$ será $\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ es el vector tangente unitario, y así:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b\big[\mathbf{f}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{T}(t)\big]\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt=\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}\,ds\,.$$



Puede verse la integral de línea de $\mathbf{f}$ como la integral del campo escalar $\mathbf{f}\cdot\mathbf{T}$, componente tangencial de $\mathbf{f}$ en la dirección de $\mathbf{c}$. Por tanto:

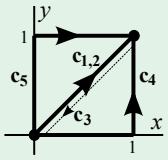
$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas $\mathbf{f}$ sobre la partícula que recorre $\mathbf{c}$.

Se usa otra **notación** (la damos para el plano). Si $\mathbf{c}(t)=\big(x(t),y(t)\big)$, $\mathbf{f}(x,y)=\big(f(x,y),g(x,y)\big)$:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b\big[f\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t)+g\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t)\big]\,dt\equiv\boxed{\int_{\mathbf{c}}f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy}\,.$$

[La notación es similar para $n>2$. ¡Cuidado!, pese a su aspecto sigue siendo integral de línea].

Ej 1. Calculemos varias integrales del línea del campo $\mathbf{f}(x,y)=\big(x^2,2y+x\big)$ sobre distintos caminos.
Los tres primeros describen el mismo segmento (el tercero en sentido contrario).



$$\mathbf{c_1}(t)=(t,t)\,,\ t\in[0,1]\ \to\ \int_{\mathbf{c_1}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big(t^2,3t\big)\cdot(1,1)\,dt=\tfrac{11}{6}\,,$$

$$\mathbf{c_2}(t)=\big(4t^2,4t^2\big)\,,\ t\in\big[0,\tfrac12\big]\ \to\ \int_{\mathbf{c_2}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{1/2}\big(16t^4,12t^2\big)\cdot(8t,8t)\,dt=\tfrac{11}{6}\,,$$

$$\mathbf{c_3}(t)=(1-t,1-t)\,,\ t\in[0,1]\ \to\ \int_{\mathbf{c_3}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big((1-t)^2,3(1-t)\big)\cdot(-1,-1)\,dt=-\tfrac{11}{6}\,.$$

$$\mathbf{c_4}(t)=\begin{cases}(t,0)\,,\ t\in[0,1]\\(1,t-1)\,,\ t\in[1,2]\end{cases}\,,\quad\int_{\mathbf{c_4}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big(t^2,t\big)\cdot(1,0)\,dt+\int_1^2\big(t^2,2t-1\big)\cdot(0,1)\,dt=\tfrac73\,.$$

$$\mathbf{c_5}(t)=\begin{cases}(0,t)\,,\ t\in[0,1]\\(t-1,1)\,,\ t\in[1,2]\end{cases}\,,\quad\int_{\mathbf{c_5}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(0,2t)\cdot(0,1)\,dt+\int_1^2\big((t-1)^2,2+t\big)\cdot(1,0)\,dt=\tfrac56\,.$$

[La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre; para algunos campos no va a depender siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final].

Ej 2. Hallemos la integrales para los mismos $\mathbf{c_k}$ de arriba, pero ahora para el campo $\mathbf{g}(x,y)=(y,x-4y)$:

$$\int_{\mathbf{c_1}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t,-3t)\cdot(1,1)\,dt=-\int_0^1 2t\,dt=-1\,,$$

$$\int_{\mathbf{c_2}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{1/2}\big(4t^2,-12t^2\big)\cdot(8t,8t)\,dt=-\int_0^{1/2}16t^3\,dt=-1\,,$$

$$\int_{\mathbf{c_3}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big((1-t),-3(1-t)\big)\cdot(-1,-1)\,dt=\int_0^1 2(1-t)\,dt=1\quad\text{[única distinta].}$$

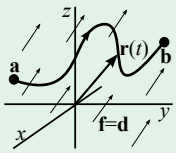
$$\int_{\mathbf{c_4}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(0,t)\cdot(1,0)\,dt+\int_1^2(t-1,5-4t)\cdot(0,1)\,dt=\int_1^2(5-4t)\,dt=-1\,.$$

$$\int_{\mathbf{c_5}}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(t,-4t)\cdot(0,1)\,dt+\int_1^2(1,t-5)\cdot(1,0)\,dt=-\int_0^1 4t\,dt+1=-1\,.$$

Ej 3. Para $\mathbf{c}(t)=\big(t,t^2,1\big)$, es la integral $\int_{\mathbf{c}}zx^2dx+xy\,dy+y^3dz=\int_0^1\big(t^2\cdot1+t^3\cdot2t+t^6\cdot0\big)\,dt=\frac{11}{15}$.

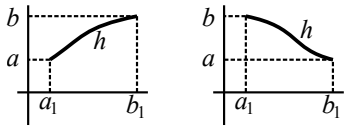
Ej 4. Hallemos el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{f}=\mathbf{d}=(d_1,d_2,d_3)$ al recorrer una partícula una trayectoria $\mathbf{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ que une dos puntos del espacio $\mathbf{a}=\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{b}=\mathbf{r}(b)$:

$$\int_{\mathbf{r}}\mathbf{d}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b(d_1,d_2,d_3)\cdot\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)\,dt=d_1\big(x(b)-x(a)\big)+d_2\big(y(b)-y(a)\big)+d_3\big(z(b)-z(a)\big)$$
$$=\mathbf{d}\cdot\big(\mathbf{r}(b)-\mathbf{r}(a)\big)=\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\,,\ \text{independiente del camino }\mathbf{r}.$$



Para $\mathbf{c}(t)=\mathbf{r}(a+b-t)$, $t\in[a,b]$, que describe esa curva en sentido opuesto, el trabajo es $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{d}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b(d_1,d_2,d_3)\cdot\big(-x'(t),-y'(t),-z'(t)\big)\,dt=-\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$.

Veamos lo que sucede con la integral al hacer un cambio en el parámetro que describe la curva C. Sea $\mathbf{c}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ y $h:[a_1,b_1]\to[a,b]$ una biyección C^1. Si llamamos $\mathbf{r}=\mathbf{c}\circ h:[a_1,b_1]\to\mathbf{R}^n$, las trayectorias $\mathbf{r}(s)$, $s\in[a_1,b_1]$ y $\mathbf{c}(t)$, $t\in[a,b]$, describen la misma curva, en el mismo sentido o en el opuesto según sea, respectivamente, $h(a_1)=a$, $h(b_1)=b$ o $h(a_1)=b$, $h(b_1)=a$ [la reparametrización conserva o invierte la orientación de C].



Teor 1. Si $\mathbf{c}$ y $\mathbf{r}$ describen la misma curva C, entonces según $\mathbf{c}$ y $\mathbf{r}$ lo hagan en el mismo sentido o en el opuesto se tiene, respectivamente:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{\mathbf{r}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}\,,\quad\text{o bien}\quad\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=-\int_{\mathbf{r}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$$

Si C es C^1 (si no, dividimos y sumamos las integrales), como $\mathbf{r}'(s)=\mathbf{c}'(h(s))\,h'(s)$ es:

$$\int_{\mathbf{r}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_{a_1}^{b_1}\mathbf{f}\big(\mathbf{c}(h(s))\big)\cdot\mathbf{c}'(h(s))\,h'(s)\,du\quad\text{e}\quad\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_a^b\mathbf{f}\big(\mathbf{c}(t)\big)\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt\,.$$

Haciendo en la integral de la izquierda $h(s)=t$, se tiene + o − la de la derecha, según se conserve o no la orientación, pues no cambian o sí los límites de integración.

Si estuviésemos integrando un **campo escalar** f, se tendría siempre que:

$$\int_{\mathbf{r}}f\,ds=\int_{a_1}^{b_1}f\big(\mathbf{c}(h(s))\big)\|\mathbf{c}'(h(s))\|\,|h'(s)|\,du=\int_a^b f\big(\mathbf{c}(t)\big)\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt=\int_{\mathbf{c}}f\,ds\,,$$

y con esto tenemos probado el teorema de la sección anterior.

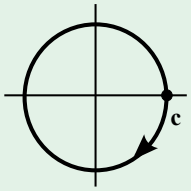
La integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva C y el sentido en que se recorre (la un campo escalar sólo de C). Podemos elegir las $\mathbf{c}$ más sencillas para calcularlas.

Ej 5. Tiene un sentido preciso hablar de la integral de $\mathbf{f}(x,y)=(y,0)$ a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

[Las integrales sobre curvas cerradas suelen representarse con el símbolo $\oint$].

Eligiendo $\mathbf{c}(t)=(\cos t,-\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$ (o $[-\pi,\pi]$, o ...),

$$\oint_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen} t,0)\cdot(-\operatorname{sen} t,-\cos t)\,dt=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\pi\,.$$

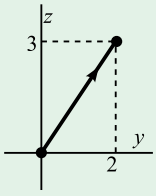


Con cualquier otra parametrización que proporcionase el mismo sentido se llegaría a lo mismo.

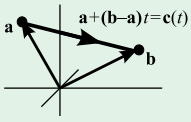
Ej 6. Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=\big(z,\mathrm{e}^y,xy\big)$ desde el punto $(1,0,0)$ hasta el $(1,2,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

Hay muchas formas de parametrizar un segmento en el espacio. Para este, con $x=1$ constante, una $\mathbf{c}$ casi salta a la vista: $\mathbf{c}(t)=(1,2t,3t)$, $t\in[0,1]$.

[O también, con el dibujo de la derecha: $\mathbf{c}_*(y)=\big(1,y,\tfrac{3}{2}y\big)$, $y\in[0,2]$].



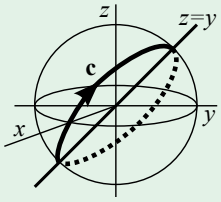
En general, vimos en 1.1 que $\mathbf{c}(t)=\mathbf{a}+(\mathbf{b}-\mathbf{a})\,t$, $t\in[0,1]$ da el segmento que une $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, pues es una recta, si $t=0$ estamos en $\mathbf{a}$ y si $t=1$ en $\mathbf{b}$.



Calculemos ya la integral pedida (con la primera parametrización dada):

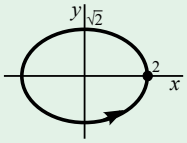
$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\big(3t,\mathrm{e}^{2t},2t\big)\cdot(0,2,3)\,dt=\int_0^1\big(2\mathrm{e}^{2t}+6t\big)\,dt=\mathrm{e}^2+2\,.$$

Ej 7. Hallemos el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{f}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$ a lo largo de la curva C intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el plano $z=y$, si C es recorrida de modo que, vista desde las z positivas, el sentido es contrario a las agujas del reloj.



Sobre C, como $z=y$, es $x^2+2y^2=4$ (elipse).

$\mathbf{c}(t)=\big(2\cos t,\sqrt{2}\operatorname{sen} t,\sqrt{2}\operatorname{sen} t\big)$, $t\in[0,2\pi]$.



$$\mathrm{T}=\int_0^{2\pi}\big(0,\sqrt{2}\operatorname{sen} t-2\cos t,2\cos t-\sqrt{2}\operatorname{sen} t\big)\cdot\big(-2\operatorname{sen} t,\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\cos t\big)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}0\,dt=0\quad\text{(el campo es perpendicular a la trayectoria).}$$

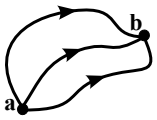
[Se verá más adelante que serán 0 las integrales sobre un camino cerrado de los campos que sean gradientes de un campo escalar; pero, a pesar de ser $\oint_C=0$, este campo no lo será, pues $\operatorname{rot}\mathbf{f}=(-2,-2,-2)\neq\mathbf{0}$].

Integrales de gradientes

Generalicemos ahora el 2° teorema fundamental del cálculo infinitesimal $\int_a^b g'(x)\,dx = g(b)-g(a)$.

Teor 2. Sea $U: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un campo escalar C^1 y $\mathbf{c}: [a,b] \to \mathbf{R}^n$ un camino C^1 a trozos.
Entonces: $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U\big(\mathbf{c}(b)\big) - U\big(\mathbf{c}(a)\big)$.

Si $\mathbf{c} \in C^1$ (si no, dividimos), $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\,dt \underset{\text{regla de la cadena}\uparrow}{=} \int_a^b (U \circ \mathbf{c})'(t)\,dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$.



Por tanto, **la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final**. Si sabemos que un campo es un gradiente, su integral pasa a ser sencilla. Además, si $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, la curva descrita por $\mathbf{c}$ es cerrada e $\oint_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = 0$: **la integral de línea de un gradiente a lo largo de cualquier curva cerrada es** 0.

Si un campo vectorial $\mathbf{f}$ es gradiente de alguna función U, a U se le llama **función potencial** para $\mathbf{f}$, y se dice que el campo $\mathbf{f}$ es **conservativo**.

¿Cómo saber si un $\mathbf{f}$ es conservativo? Condiciones necesarias sencillas para $n=2$ y $n=3$ son:

Teor 3. Si $\mathbf{f}(x,y) = \big(f(x,y), g(x,y)\big)$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow f_y \equiv g_x$.
Si $\mathbf{f}(x,y,z) = \big(f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)\big)$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow \operatorname{rot}\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

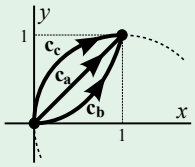
Si $\mathbf{f} = (f,g) = (U_x, U_y) = \nabla U$, con $U \in C^2$, por la igualdad de Schwartz de las derivadas cruzadas [$U_{xy} = U_{yx}$] debe ser $f_y \equiv g_x$. Y el mismo argumento se aplica para $n=3$.

Si las derivadas cruzadas no coinciden, no puede $\mathbf{f}$ derivar de un potencial. Cuando son iguales, es muchas veces sencillo hallar una U tal que $\nabla U = \mathbf{f}$. Aunque pronto veremos con un contraejemplo que **la implicación $\Leftarrow$ no es cierta en general**.

Ej 8. Sea $\mathbf{f}(x,y) = (y^2, 2xy)$. Hallemos la integral entre $(0,0)$ y $(1,1)$ a lo largo de diferentes curvas: a) la recta que une los puntos, b) la parábola $y = x^2$, c) la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$.

Posibles parametrizaciones: a) $\mathbf{c_a} = (t,t)$, b) $\mathbf{c_b} = (t, t^2)$, c) $\mathbf{c_c} = \big(t, \sqrt{2t-t^2}\big)$, con $t \in [0,1]$ todas.

Las integrales en cada caso son:



a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2, 2t^2)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 3t^2\,dt = 1$, b) $\displaystyle\int_0^1 (t^4, 2t^3)\cdot(1,2t)\,dt = \int_0^1 5t^4\,dt = 1$,

c) $\displaystyle\int_0^1 \big(2t-t^2, 2t\sqrt{2t-t^2}\big)\cdot\left(1, \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}\right) dt = \int_0^1 (4t-3t^2)\,dt = 1$.

Como se cumple $\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$, esto nos hace sospechar que $\mathbf{f}$ es un campo conservativo.

Es fácil en este caso identificar una función potencial (y habremos probado que lo es):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } U_x = y^2\text{, debe ser } U = xy^2 + p(y) \text{ para alguna función } p \\ \text{Si } U_y = 2xy\text{, debe ser } U = xy^2 + q(x) \text{ para alguna función } q\end{array}\right\} \Rightarrow U(x,y) = xy^2.$$

$\big[\, U = xy^2 + C$ para cualquier constante C es también potencial, desde luego$\big]$.

Por tanto, todas las parametrizaciones y cálculos de integrales anteriores han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer $U(1,1) - U(0,0) = 1 - 0 = 1$.

Por no depender del camino, hay otras formas de calcular una U: eligiendo caminos sencillos que unan el origen con el punto (x,y) y evaluando la integral de línea. Por ejemplo, con el C^1 a trozos:

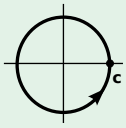
$$\mathbf{c}(t) = \begin{cases}(t,0)\,, & t \in [0,x] \\ (x,t)\,, & t \in [0,y]\end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^x (0,0)\cdot(1,0)\,dt + \int_0^y (t^2, 2xt)\cdot(0,1)\,dt = xy^2.$$

Haciendo lo mismo para un $\mathbf{f} = (f,g)$ general, obtendríamos: $\displaystyle\int_0^x f(t,0)\,dt + \int_0^y g(x,t)\,dt = U(x,y)$.

Veamos qué campos de los vistos hasta ahora son conservativos. El $(x^2, 2y+x)$ del 1 no lo es por ser $f_y = 0 \not\equiv 1 = g_x$. El $(y, x-4y)$ del 2 sí: $1 \equiv 1$ y $U = xy - 2y^2$ es su potencial. No lo es el del 3, (zx^2, xy, y^3) por no ser $\operatorname{rot}\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$. El $\mathbf{f} = \mathbf{d}$ del 4 sí lo es $\big[$con $U = (d_1x, d_2y, d_3z)\big]$. El $(y,0)$ del 5 no: vimos que su integral sobre un camino cerrado era no nula y también lo asegura $1 \not\equiv 0$. Para 6 y 7 el $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ es, respectivamente, $(x, 1-y, 0)$ y $(-2,-2,-2)$ y no pueden derivar de una función potencial U.

En el siguiente ejemplo la integral a lo largo de un camino cerrado resulta ser no nula, a pesar de ser iguales las derivadas f_y y g_x :

Ej 9. Calculemos la integral de $\mathbf{f}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,,\,\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ a lo largo de $x^2+y^2=1$ en sentido antihorario.



Si $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[0,2\pi]$, $\oint_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\,d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen} t,\cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t,\cos t)\,dt\;=\;2\pi$.

Como esta integral no es 0 , no puede haber un potencial $U\in C^1$ que contenga la curva.

Y, sin embargo, coinciden las derivadas cruzadas: $f_y=\frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=g_x=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Por tanto, **no es suficiente la igualdad de las derivadas cruzadas para ser conservativo**.

Pero hay que pedir muy poco más al campo $\mathbf{f}$ para que sí baste. [Aceptamos los dos teoremas que faltan de esta sección, pues son más difíciles de demostrar y necesitan el teorema de Stokes de 6.2].

Teor 4. $\boxed{\text{Si } \mathbf{f} \text{ es } C^1 \text{ en todo } \mathbf{R}^2\ \left[\,\mathbf{R}^3\,\right] \text{ y } f_y\equiv g_x\ \left[\operatorname{rot}\mathbf{f}=\mathbf{0}\right]\Rightarrow \mathbf{f} \text{ es conservativo.}}$

[El campo $\mathbf{f}\in C^1$ del ejemplo 8 sabemos ahora que es conservativo desde que vimos que $f_y\equiv g_x$.
Para el 9, $\mathbf{f}$ no era C^1 en $(0,0)$, el teorema no dice que haya potencial, y no lo hay en todo $\mathbf{R}^2$].

Hacemos ahora nuestro primer ejemplo en $\mathbf{R}^3$:

Ej 6*. Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(4x\,,3z-2y\,,3y)$ desde $(1\,,0\,,0)$ hasta $(1\,,2\,,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

En el ejemplo 6 ya parametrizamos el segmento, y podemos hallar la integral directamente:

$$\mathbf{c}(t)=(1,2t,3t)\,,\ t\in[0,1]\ \to\ \int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1(1,5t,6t)\cdot(0,2,3)\,dt\;=\;14\,.$$

Pero para este campo se cumple que $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 4x&3z-2y&3y\end{vmatrix}=(3-3)\mathbf{i}+(0-0)\mathbf{j}+(0-0)\mathbf{k}=\mathbf{0}$.

Además, obviamente $\mathbf{f}\in C^1(\mathbf{R}^3)$. Existe, pues, una función potencial $U(x,y,z)$ para el campo $\mathbf{f}$.

Los cálculos de los potenciales en $\mathbf{R}^3$ son similares a los de $\mathbf{R}^2$:

$$\text{Debe ser}\quad \begin{array}{l} U_x=4x\ \to\ U=2x^2+p(y,z)\\ U_y=3z-2y\ \to\ U=3yz-y^2+q(x,z)\ ,\ \ U=2x^2+3yz-y^2\ \Rightarrow\\ U_z=3y\ \to\ U=3yz+r(x,y)\end{array}\qquad \int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,2,3)-U(1,0,0)\;=\;16-2\;=\;14\,.$$

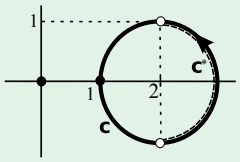
Este es el valor de la integral sobre cualquier camino que una los puntos, por complicado que sea.

Por ejemplo, hallemos la integral a lo largo de $\mathbf{c}_*(t)=\left(\mathrm{e}^{t-t^2},\,2t^3,\,3t^2\right)$, $t\in[0,1]$:

$$\int_{\mathbf{c}^*}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\left(4\mathrm{e}^{t-t^2},9t^2-4t^3,6t^3\right)\cdot\left((1-2t)\mathrm{e}^{t-t^2},6t^2,6t\right)dt=\int_0^1\left(2(2-4t)\mathrm{e}^{2t-2t^2}+90t^4-24t^5\right)dt$$
$$=2\mathrm{e}^{2t-2t^2}+18t^5-4t^6\Big]_0^1=14\,.$$

El teorema 3 se puede refinar exigiendo hipótesis menos fuertes. No es preciso que $\mathbf{f}$ sea C^1 en todo $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$. Basta que lo sea en un conjunto D '**simplemente conexo**': toda curva cerrada contenida en el D conexo ('de una sola pieza') debe poder contraerse a un punto de forma continua sin salir del D (en el ejemplo 2 no se puede). En $\mathbf{R}^2$ esto significa que D no tiene 'agujeros'. En $\mathbf{R}^3$, puntos sueltos de discontinuidad no molestan, pero sí, por ejemplo, no serlo en toda una recta.

Ej 9*. En $D=\{x>0\}$ sí debe existir potencial U para $\mathbf{f}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,,\,\frac{x}{x^2+y^2}\right)$.



Escribiendo $\left(\frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}\,,\,\frac{1/x}{1+(y/x)^2}\right)$, es claro que lo es $U(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$.

Sobre cualquier curva cerrada contenida en D la integral sí debe ser nula.

Por ejemplo, sobre la circunferencia $\mathbf{c}(t)=(2+\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in[-\pi,\pi]$ $\to$

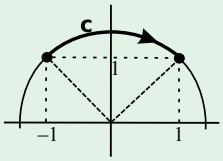
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\tfrac{-s}{5+4c},\tfrac{2+c}{5+4c}\right)\cdot(-s,c)\,dt=\int_0^{\pi}\left(1-\tfrac{3}{5+4\cos t}\right)dt=\left[s=\tan\tfrac{t}{2}\right]=\pi-\int_0^{\infty}\tfrac{3\,ds}{9+s^2}=\pi-\left[2\arctan\tfrac{s}{3}\right]_0^{\infty}=0\,.$$

La U da el valor de otras integrales, por ejemplo, de $(2,-1)$ hasta $(2,1)$ será $\int_{\mathbf{c}^*}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=2\arctan\frac{1}{2}$.

Retocando el cálculo de arriba se llega al valor $\frac{\pi}{2}-2\arctan\frac{1}{3}\approx 0.93$, que coincide con el anterior, ya que $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$, puesto que $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}\ \Rightarrow\ \frac{1/2+1/3}{1-1/2\cdot 1/3}=1=\tan\frac{\pi}{4}$.

En este ejemplo hay una $\mathbf{f}$ discontinua que, sin embargo, deriva de un potencial C^1 en $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$.

Ej 10. Hallemos directamente la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=\left(5-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\mathbf{i}-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$, entre $(-1,1)$ y $(1,1)$, siguiendo el tramo más corto de la circunferencia $x^2+y^2=2$. ¿Existe función potencial U para $\mathbf{f}$?



La parametrización más sencilla $\mathbf{c}(t)=\left(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$, $t\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\to$

$$\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\left(5-\frac{\sqrt{2}\cos t}{2},-\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\,(-\,\mathrm{sen}\,t,\cos t)\,dt=5\sqrt{2}\cos t\Big]_{3\pi/4}^{\pi/4}=10.$$

Es claramente $f_y=g_x=-\frac{2xy}{x^2+y^2}$, pero como sólo $\mathbf{f}$ es C^1 en $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$, conjunto plano con agujero, podría no existir una función potencial global.

Pero salta a la vista nuestra $U(x,y)=5x-\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)$. Comprobamos la integral con ella:

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(1,1)-U(-1,1)=5-\tfrac{1}{2}\log 2+5+\tfrac{1}{2}\log 2=10.$$

A lo largo de la circunferencia completa la existencia de la U nos asegura que la integral es nula. También es claro, mirando la integral de arriba, que directamente se tendría $5\sqrt{2}\cos t\Big]_{-\pi}^{\pi}=0$.

Y también es conservativo este campo (gravitatorio) del espacio, discontinuo sólo en el origen:

Ej 11. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\mathbf{i}-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\mathbf{j}-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\mathbf{k}$.

$\mathbf{f}$ es C^1 en $\mathbf{R}^3-\{(0,0,0)\}$, que es simplemente conexo en el espacio. Debe, pues, existir U.

Se ve casi a ojo: $U(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$. $\left[\text{En esféricas es } U=\frac{1}{\rho}\text{ y }\mathbf{f}=-\frac{1}{\rho^2}\,\mathbf{e}_\rho=f_\rho\,\mathbf{e}_\rho\right]$.

La integral a lo largo de cualquier camino $\mathbf{c}$ entre (0,0,1) y (1,2,2) será $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$.

Por ejemplo debemos obtener este valor siguiendo el segmento $\mathbf{c}(t)=(t,2t,1+t)$, $t\in[0,1]$:

$$\mathbf{c}'(t)=(1,2,1),\ \mathbf{f}\big(\mathbf{c}(t)\big)=-\left(4t^2+t^2+(t+1)^2\right)^{-3/2}(t,2t,t+1)\ \to$$

$$\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1-(6t+1)\left(6t^2+2t+1\right)^{-3/2}dt=\left[\left(6t^2+2t+1\right)^{-1/2}\right]_0^1=\tfrac{1}{3}-1=-\tfrac{2}{3}.$$

Concluyamos nuestra teoría sobre los sistemas conservativos admitiendo este resultado general:

Teor 5. Sea $\mathbf{f}$ continua en $D\subset\mathbf{R}^n$ abierto. Entonces son equivalentes las afirmaciones:

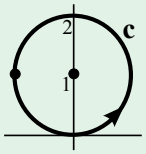
a) $\mathbf{f}$ es gradiente de una función potencial U en D.

b) La integral de línea de $\mathbf{f}$ es independiente del camino en D.

c) La integral de $\mathbf{f}$ a lo largo de todo camino cerrado contenido en D es nula.

Que la integral de un campo sobre un camino cerrado se anule no significa, desde luego, que ese campo sea conservativo. El teorema anterior pide que lo sea sobre **todo** camino cerrado.

Ej 12. Calculemos la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=\left(1,x^2\right)$ a lo largo de la circunferencia $x^2+(y-1)^2=1$, recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj. ¿Deriva $\mathbf{f}$ de un potencial?



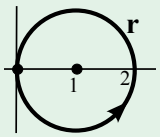
La parametrización más sencilla es $\mathbf{c}(t)=(\cos t,1+\mathrm{sen}\,t)$, $t\in[-\pi,\pi]$. Con ella

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(1,\cos^2 t\right)\cdot(-\,\mathrm{sen}\,t,\cos t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\left[c\left(1-s^2\right)-s\right]dt=\left[s+c-\tfrac{1}{3}s^3\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Pero claramente no es conservativo, pues $g_x-f_y=2x\not\equiv 0$. Así pues, se debe poder encontrar algún camino cerrado para el que la integral del campo no se anule.

Tanteando un poco (o mirando en el teorema de Green de 5.3) podemos encontrar, por ejemplo:

$$\mathbf{r}(t)=(1+\cos t,\mathrm{sen}\,t),\ t\in[-\pi,\pi]\ \to\ \int_{-\pi}^{\pi}\left[c+2c^2+c^3-s\right]dt=2\pi\neq 0.$$



Perdamos bastante tiempo volviendo a calcular la última integral en cartesianas.

La circunferencia $x^2-2x+y^2=0$ lleva a dos funciones distintas $y=\pm\sqrt{2x-x^2}$.

Y a dos parametrizaciones: $\mathbf{r_1}(x)=\left(x,-\sqrt{2x-x^2}\right)$, $x\in[0,2]$ (parte inferior)

$\mathbf{r_2}(x)=\left(x,\sqrt{2x-x^2}\right)$, $x\in[0,2]$ (en sentido opuesto)

A partir de ellas: $\int_0^2\left(1,x^2\right)\cdot\left(1,\frac{x-1}{\sqrt{\cdot}}\right)dx-\int_0^2\left(1,x^2\right)\cdot\left(1,\frac{1-x}{\sqrt{\cdot}}\right)dx=\int_0^2\frac{2x^2(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx=\cdots=2\pi$.

Para acabar la sección hacemos dos ejemplos más, provinientes de exámenes, para repasar las integrales de línea de escalares, de vectoriales, de gradientes y, también, temas anteriores.

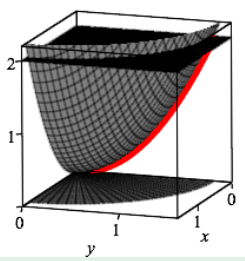
Ej 13. Sea $f(x,y,z)=y$. a) Calcular $\iiint_V f$, para V sólido acotado en $x,y\ge 0$ por $z=x^2+y^2$ y $z=2$.

b) Si C es el corte de $z=x^2+y^2$ con $x=0$, para $y\ge 0$, $0\le z\le 2$, parametrizar la curva C y hallar:

i) $\int_C f\,ds$, ii) $\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{s}$, en el sentido las z crecientes.

a) Paraboloide y plano se cortan cuando $x^2+y^2=2$. Cilíndricas o cartesianas:

$$\iiint_V f=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt2}\int_{r^2}^{2} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dz\,dr\,d\theta=\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt2}(2r^2-r^4)\,dr$$
$$=\left[\tfrac23 r^3-\tfrac15 r^5\right]_0^{\sqrt2}=\tfrac{8}{15}\sqrt2\,.$$



$$\iiint_V f=\int_0^{\sqrt2}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2} y\,dz\,dy\,dx=\int_0^{\sqrt2}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}(2y-x^2y-y^3)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^{\sqrt2}\left(1-x^2+\tfrac{x^4}{4}\right)dx=\tfrac{8}{15}\sqrt2\,.$$

b) Parametrizaciones de C: $\mathbf{c}(t)=(0,t,t^2)$, $t\in\left[0,\sqrt2\right]$ o $\mathbf{c}_*(t)=\left(0,\sqrt t,t\right)$, $t\in[0,2]$.

i) $\mathbf{c}'(t)=(0,1,2t)$, $\|\mathbf{c}'\|=\sqrt{1+4t^2}$, $\int_C f\,ds=\int_0^{\sqrt2} t\,(1+4t^2)^{1/2}dt=\frac{1}{12}(1+4t^2)^{3/2}\Big]_0^{\sqrt2}=\frac{13}{6}$.

$\mathbf{c}_*'(t)=\left(0,\frac{1}{2\sqrt t},1\right)$, $\|\mathbf{c}'\|=\sqrt{\frac{1}{4t}+1}$, $\int_C f\,ds=\int_0^2 \frac12(1+4t)^{1/2}dt=\frac{1}{12}(1+4t)^{3/2}\Big]_0^2=\frac{13}{6}$.

ii) $\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{s}=f\left(0,\sqrt2,2\right)-f(0,0,0)=\sqrt2$. Así de corto, aunque comprobamos con la definición:

$$\int_0^{\sqrt2}(0,1,0)\cdot(0,1,2t)\,dt=\int_0^2(0,1,0)\cdot\left(0,\tfrac{1}{2\sqrt t},1\right)dt=\sqrt2\,.$$

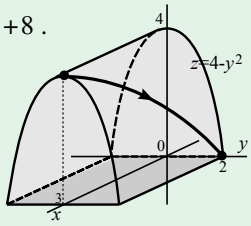
Ej 14. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=\left(y^2,2xy,-2z\right)$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})$ y $\Delta(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})$. ¿Es $\mathbf{f}$ conservativo?

b) Calcular $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz$, con V sólido acotado por $z=4-y^2$ y los planos $x=0$, $x=3$ y $z=0$.

c) Hallar la integral de línea de $\mathbf{f}$ de $(3,0,4)$ a $(0,2,0)$ sobre la curva $\mathbf{c}(t)=\left(3-\frac{3t}{2},t,4-t^2\right)$, $t\in[0,2]$.

a) $\operatorname{div}\mathbf{f}=2x-2$. $\operatorname{rot}\mathbf{f}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ y^2&xy&-2z\end{vmatrix}=0\,\mathbf{i}+0\,\mathbf{j}+(2y-2y)\,\mathbf{k}=(0,0,0)\overset{\mathbf{f}\in C^1}{\Longrightarrow}\mathbf{f}$ deriva de un potencial.

$\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})=(2,0,0)$. $\Delta(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})=\Delta\left(y^4+4x^2y^2+4z^2\right)=20y^2+8x^2+8$.



b) $z=4-y^2$ corta $z=0$ en las rectas $y=\pm2$. V es el del dibujo. Por tanto:

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}=\int_0^3\int_{-2}^{2}\int_0^{4-y^2}(2x-2)\,dz\,dy\,dx=\int_0^3(2x-2)\,dx\int_{-2}^{2}\left(4-y^2\right)dy=32\,.$$

c) Por ser conservativo, podemos hallar la integral hallando el potencial U:

$U_x=y^2\ \to\ U=xy^2+p(y,z)$

$U_y=2xy\ \to\ U=xy^2+q(x,z)$, $U=xy^2-z^2\ \Rightarrow\ \int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=U(0,2,0)-U(3,0,4)=16$.

$U_z=-2z\ \to\ U=-z^2+r(x,y)$

O directamente: $\int_{\mathbf{c}}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^2\left(t^2,6t-3t^2,2t^2-8\right)\cdot\left(-\frac32,1,-2t\right)dt=\int_0^2\left(22t-\frac92t^2-4t^3\right)dt=16$.

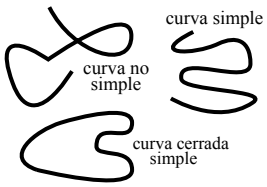
O hallar la integral siguiendo un camino más sencillo, por ejemplo el segmento que une los puntos:

$\mathbf{c}^*(t)=(3,0,4)+t\left[(0,2,0)-(3,0,4)\right]=(3-3t,2t,4-4t)$, $t\in[0,1]\ \to$

$$\int_0^1\left(4t^2,12t-12t^2,8t-8\right)\cdot(-3,2,-4)\,dt=\int_0^1\left(32-8t-36t^2\right)dt=16\,.$$

5.3. Teoremas de Green y de la divergencia en el plano

Ambos van a relacionar **integrales dobles** e **integrales de línea** sobre **curvas cerradas en el plano**. (Veremos otros similares en el capítulo 6 siguiente con integrales de campos en $\mathbf{R}^3$. De hecho, se podrán mirar estos como casos particulares de aquellos).



Una **curva simple** será la imagen de una $\mathbf{c}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$, C^1 a trozos e **inyectiva**. Si además es $\mathbf{c}(a)=\mathbf{c}(b)$, se le llama **curva cerrada simple**. Una curva de estas puede recorrerse en dos sentidos diferentes. Para indicar que se recorre en sentido antihorario escribiremos la integral $\oint$.

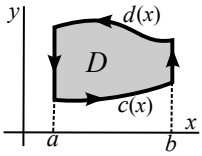
Teorema de Green:

Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple y el campo $\mathbf{f}=(f,g)\in C^1(D)$. Entonces:

$$\iint_D \left[\, g_x - f_y \,\right] dx\, dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} \equiv \oint_{\partial D} f\, dx + g\, dy\,.$$

[Obsérvese que si $\mathbf{f}$ es conservativo, el teorema de Green dice $0=\oint \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}$ como debía ser].

El el caso de que D fuese del primer tipo de recintos que consideramos para las integrales dobles: $D=\{(x,y)\,:\, a\le x\le b,\ c(x)\le y\le d(x)\}$ se tendría:



$$-\iint_D f_y\, dx\, dy = -\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x,y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[f(x,c(x)) - f(x,d(x)) \right] dx\,.$$

Parametrizando los cuatro tramos de la frontera:

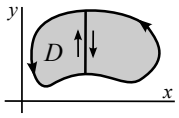
$$(x,c(x))\,,\ x\in[a,b]\,;\ (b,y)\,,\ y\in[c(b),d(b)]\,;\ (x,d(x))\,,\ x\in[a,b]\,;\ (a,y)\,,\ y\in[c(a),d(a)] \to$$

$$\oint_{\partial D} f\, dx = \int_a^b f(x,c(x))\cdot 1\, dx + \int_{c(b)}^{d(b)} f(y,b)\cdot 0\, dy - \int_a^b f(x,d(x))\cdot 1\, dx - \int_{c(a)}^{c(b)} f(y,a)\cdot 0\, dy = -\iint_D f_y\,.$$

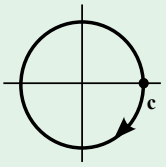
Análogamente, para recintos $D=\{(x,y)\,:\, c\le y\le b,\ a(y)\le x\le b(y)\}$ se ve que $\oint_{\partial D} g\, dy = \iint_D g_x$.

Se cumplirá, pues $\oint_{\partial D} f\, dx + g\, dy = \iint_D [g_x - f_y]$ en un recinto D que sea de los dos tipos anteriores.

Dividiendo cualquier recinto más general D en otros de estos últimos y teniendo en cuenta que se cancelan las integrales de línea sobre segmentos comunes, por ser recorridos en sentido opuesto, se llega al resultado.



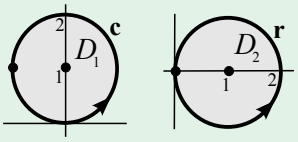
Ej 1. Encontremos, utilizando Green, el valor π de la integral de $\mathbf{f}(x,y)=(y,0)$ sobre la circunferencia unidad calculado ya en el ejemplo 5 de 5.2.



Como el sentido de recorrido es opuesto al que pide Green y $g_x - f_y = -1$ es:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = -\iint_D (-1)\, dx\, dy = \iint_D dx\, dy = \text{área de } D = \pi\cdot 1^2 = \pi\,.$$

Ej 2. Volvemos a recalcular ejemplos de esa sección. Ahora el Ej.12, donde integramos $\mathbf{f}(x,y)=(1,x^2)$ sobre otro par de circunferencias. Es aquí $g_x - f_y = 2x$.



En el primer caso el teorema de Green vuelve a darnos el valor 0 sin necesidad de hacer ninguna primitiva, por ser la integral de la impar $2x$ sobre el círculo D_1 simétrico respecto del eje x.

En el segundo sí necesitamos trabajar. Por ejemplo utizando las polares centradas en $(1,0)$:

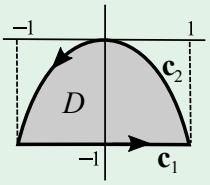
$$x = 1 + r\cos\theta\,,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ J = r\,,\quad \iint_{D_2} 2x = \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \left(2r + 2r^2\cos\theta\right) d\theta\, dr = 2\pi \quad \text{(como allá).}$$

[Las polares usuales $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ llevan a integrar $\cos^4\theta$ y todavía es más largo en cartesianas].

Ej 3. Comprobemos aquí el teorema para $\mathbf{f}(x,y)=(y,2x)$ y la región D limitada por $y=-x^2$ e $y=-1$.

Casi siempre es más corto el cálculo de la integral doble:

$$\iint_D [g_x - f_y]\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-x^2} dy\, dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \tfrac{4}{3}\,.$$



La ∂D está formada por dos curvas distintas fácilmente parametrizables:

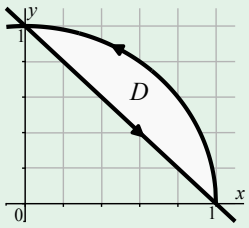
$$\mathbf{c}_1(x) = (x,-1)\,,\ x\in[-1,1]\,,\quad \mathbf{c}_2(x) = (x,-x^2)\,,\ x\in[1,-1]\,.$$

escribir esto equivale a cambiar el signo a la integral↑

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \int_1^{-1} (-x^2, 2x)\cdot(1,-2x)\, dx + \int_{-1}^{1} (-1,2x)\cdot(1,0)\, dx = \int_{-1}^{1} 5x^2 dx - \int_{-1}^{1} 1\, dx = \tfrac{10}{3} - 2 = \tfrac{4}{3}\,.$$

Más comprobaciones de Green. La doble es mejor en cartesianas y más corto integrando $dy\,dx$:

Ej 4. Comprobemos Green para $\mathbf{f}(x,y)=(x^3,xy)$ sobre el D del primer cuadrante acotado por la curva $x^2+y^2=1$ y el segmento que une $(1,0)$ y $(0,1)$.



$$g_x-f_y=y\,.\quad \iint_D y\,dx\,dy=\int_0^1\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx=\tfrac12\int_0^1(2x-2x^2)\,dx=\tfrac16\,.$$

[Peor $dx\,dy$ o utilizar la expresión polar $r=1/(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)$].

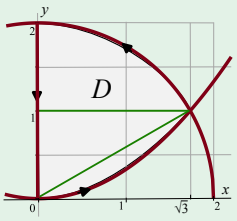
Parametrizando ∂D: $\mathbf{c}_1=(x,1-x)$, $x\in[0,1]$. $\mathbf{c}_2=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\int_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\int_0^1\underbrace{(t^3,t-t^2)\cdot(1,-1)}_{t^3+t^2-t}\,dt+\int_0^{\pi/2}\underbrace{(c^3,cs)\cdot(-s,c)}_{c^2s-c^3s}\,dt=\tfrac16\,.$$

[Circunferencia en cartesianas: $\mathbf{c}_1^*=(t,\sqrt{1-t^2})$, $t\in[1,0]\to\int_1^0(t^3,t\sqrt{\cdot})\cdot(1,\frac{-t}{\sqrt{\cdot}})\,dt=\int_0^1(t^2-t^3)=\frac{1}{12}$].

En este se obliga, para repasar integrales trigonométricas, a hacer una doble en polares no adecuadas:

Ej 5. Comprobar Green para $\mathbf{f}(x,y)=(x^2,5xy)$ y D la región definida por $x^2+y^2\le4$, $y\ge\frac13x^2$ y $x\ge0$, calculando la integral doble i) en cartesianas y ii) en polares.



Con $y^2+3y=4$ (o a ojo) se halla el corte de circunferencia y parábola $(\sqrt3,1)$.

i) Para calcular $\iint_D[g_x-f_y]=\int_D 5y$ en cartesianas es más corto:

$$\int_0^{\sqrt3}\int_{x^2/3}^{\sqrt{4-x^2}}5y\,dy\,dx=\int_0^{\sqrt3}\left(10-\tfrac52x^2-\tfrac{5}{18}x^4\right)dx=\boxed{7\sqrt3}\,.$$

Peor: $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{3y}}5y\,dx\,dy+\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}5y\,dx\,dy=5\sqrt3\int_0^1y^{3/2}+5\int_1^2y\sqrt{4-y^2}=2\sqrt3+5\sqrt3\,.$

ii) Bastante más largo en polares. Hay 2 casos dependiendo de θ. Uno fácil para la circunferencia y más complicado con la parábola: $r\operatorname{sen}\theta=\frac13r^2\cos^2\theta\to r=3\operatorname{sen}\theta/\cos^2\theta$.

$$\iint_D 5y=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^2 5r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta+\int_0^{\pi/6}\int_0^{3\operatorname{sen}\theta/\cos^2\theta}5r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta=\tfrac{20}{3}\sqrt3+45\int_0^{\pi/6}\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{\cos^6\theta}\,d\theta\overset{\bullet}{=}\boxed{7\sqrt3}\,.$$

$$\bullet\ \tan\theta=u\,,\ du=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\to 45\int_0^{1/\sqrt3}u^4du=\frac{9}{9\sqrt3}=\tfrac13\sqrt3\,.$$

Parametrizando. Circunferencia: $\mathbf{c}_1=(2\cos t,2\operatorname{sen} t)$, $t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$. Parábola: $\mathbf{c}_2=\left(x,\frac{x^2}{3}\right)$, $x\in[0,\sqrt3]$.
El segmento ni lo parametrizamos, pues es claramente $\mathbf{f}=\mathbf{0}$ cuando $x=0$ y su integral es nula.

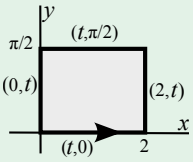
$$\int_{\mathbf{c}_1}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=8\int_{\pi/6}^{\pi/2}\overbrace{(c^2,5cs)\cdot(-s,c)}^{4sc^2}\,dt=\tfrac{32}{3}\left[-\cos^3t\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=4\sqrt3\,.$$

$\Big[$En cartesianas: $\mathbf{c}_*=(x,\sqrt{4-x^2})$, $x\in[\sqrt3,0]$. $\displaystyle\int_{\mathbf{c}_*}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=\cdots=\int_{\sqrt3}^0-4x^2dx=\tfrac43x^3\Big]_0^{\sqrt3}=4\sqrt3\Big]$.

Parábola: $\displaystyle\int_{\mathbf{c}_2}=\int_0^{\sqrt3}\left(x^2,\tfrac53x^3\right)\cdot\left(1,\tfrac{2x}{3}\right)dx=\left[\tfrac13x^3+\tfrac29x^5\right]_0^{\sqrt3}=3\sqrt3$. $\displaystyle\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=4\sqrt3+3\sqrt3+0=\boxed{7\sqrt3}$.

En este es claramente más corta la integral doble:

Ej 6. Hallemos $\oint_{\partial D}e^x\operatorname{sen} y\,dx+e^{2x}\cos y\,dy$, con D rectángulo $[0,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.



$$\int_0^2(0\cdot1+0)\,dt+\int_0^{\pi/2}(0+e^4\cos t\cdot1)\,dt-\int_0^2(e^t\cdot1+0)\,dt-\int_0^{\pi/2}(0+\cos t\cdot1)\,dt$$

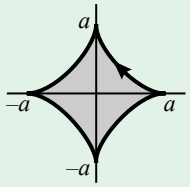
$$\text{Con Green: }\int_0^{\pi/2}\int_0^2\left(2e^{2x}\cos y-e^x\cos y\right)dx\,dy=\left[\operatorname{sen} y\right]_0^{\pi/2}\left[e^{2x}-e^x\right]_0^2=e^4-e^2\,.$$

Se suele usar Green para reducir integrales de línea a integrales dobles, normalmente más sencillas. Pero a veces conviene lo contrario para calcular un área. Utilizaremos esta fórmula cásica de los libros de Cálculo:

$$\boxed{A=\iint_D dxdy=\tfrac12\oint_{\partial D}x\,dy-y\,dx}$$

(pues $g_x-f_y=2$, aunque para más campos sencillos esa diferencia sea constante).

Ej 7. Calculemos el área encerrada por la 'hipocicloide' $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.



Utilizando la fórmula de arriba $A=\frac12\oint_{\partial D}x\,dy-y\,dx$ se tiene aquí:

$\mathbf{c}(\theta)=(a\cos^3\theta,a\operatorname{sen}^3\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$ es la mejor parametrización.

$$A=\tfrac12\int_0^{2\pi}\left[(a\cos^3\theta)(3a\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta)-(a\operatorname{sen}^3\theta)(-3a\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta)\right]d\theta$$

$$=\tfrac32a^2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\tfrac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}[1-\cos4\theta]\,d\theta=\tfrac38\pi a^2\,.$$

[los picos de la curva aparecen para $\mathbf{c}'=0$].

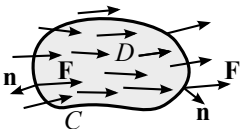
A partir del teorema de Green se obtiene fácilmente el **teorema de la divergencia en el plano**:

> Sean $D \subset \mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f} : D \to \mathbf{R}^2$ campo C^1 y $\mathbf{n}$ el vector normal unitario exterior a ∂D. Entonces es $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{f}\, dx\, dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds$.

Si ∂D viene dada por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, la normal es $\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$.

Si $\mathbf{f} = (f, g)$, $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_a^b \left[f(x(t), y(t))\, y'(t) - g(x(t), y(t))\, x'(t) \right] dt$

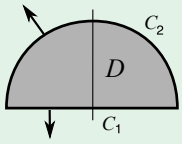
$$= \oint_{\partial D} f dy - g dx \underset{\text{Green}}{=} \iint_D (f_x + g_y)\, dx\, dy .$$



[Imaginemos una curva cerrada C sobre la superficie de un fluido y sea $\mathbf{F} = f\,\mathbf{v}$, donde f es la densidad del fluido y $\mathbf{v}$ su velocidad. Entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ mide el ritmo con el que el fluido entra o sale de D.

Si la cantidad de fluido en D disminuye (aumenta) será $\oint_C < 0$ ($\oint_C > 0$). La integral coincide con $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}$. Por tanto, la $\operatorname{div} \mathbf{F}$ describe la tendencia del fluido a acumularse o dispersarse].

Ej 8. Comprobemos este teorema para $\mathbf{f}(x, y) = (7, y^2 - 1)$ y D el semicírculo $r \le 3$, $0 \le \theta \le \pi$.



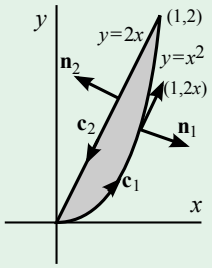
$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 2y, \quad \iint_D 2y\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \int_0^3 2r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\theta = 36 .$$

Para C_1, si $\mathbf{c}(x) = (x, 0)$, $x \in [-3, 3]$, $\mathbf{n} = (0, -1)$, $\int_{C_1} (1 - y^2)\, ds = \int_{-3}^3 dx = 6$.

Para C_2, si $\mathbf{c}(t) = (3 \cos t, 3 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi]$, $\|\mathbf{c}'(t)\| = 3$.

Como $\mathbf{n} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds = 3 \int_0^{\pi} (7 \cos t + 9 \operatorname{sen}^3 t - \operatorname{sen} t)\, dt = 30$. $36 = 6 + 30$.

Ej 9. Comprobemos los teoremas de Green y de la divergencia para el campo $\mathbf{f}(x, y) = (x^3, x^2 y)$ y el recinto D del primer cuadrante acotada por $y = 2x$ e $y = x^2$.



Green: $\iint_D [g_x - f_y] = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 2xy\, dy\, dx = \int_0^2 (4x^3 - x^5)\, dx = \left[x^4 - \frac{x^6}{6} \right]_0^2 = \frac{16}{3}$.

Posibles parametrizaciones de los dos tramos de ∂D:

$\mathbf{c}_1(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, 2]$, $\mathbf{c}_1' = (1, 2x)$, $\mathbf{f}(\mathbf{c}_1) = (x^3, x^4)$

$\mathbf{c}_2(x) = (x, 2x)$, $x \in [2, 0]$, $\mathbf{c}_2' = (1, 2)$, $\mathbf{f}(\mathbf{c}_2) = (x^3, 2x^3)$ $\to$

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 (x^3 + 2x^5)\, dx - \int_0^2 (x^3 + 4x^3)\, dx = \frac{2^6}{3} - 2^4 = \frac{16}{3} .$$

Divergencia: $\operatorname{div} \mathbf{f} = 4x^2$. $\mathbf{n}_1 = \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2}}$, $\mathbf{n}_2 = \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}}$. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 4x^2\, dy\, dx = \int_0^2 (8x^3 - 4x^2)\, dx = \frac{32}{5}$.

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_0^2 (x^3, x^4) \cdot \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2}} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx - \int_0^2 (x^3, 2x^3) \cdot \frac{(2, -1)}{\sqrt{5}} \sqrt{5}\, dx = \int_0^2 x^4\, dx = \frac{32}{5} .$$

Se podría pensar que los cálculos del teorema de la divergencia serán complicados, porque lo eran las integrales de línea de campos escalares. Pero el $\|\mathbf{c}'\|$ aparece también en los denominadores de las $\mathbf{n}$ exteriores.