

# 6. Integrales de superficie

## 6.1. Definiciones y cálculo

Generalizamos las integrales de línea (de campos escalares y de campos vectoriales).

Una **superficie** a veces viene dada por  $F(x, y, z) = 0$ . Si se puede despejar la  $z$ , por  $z = f(x, y)$ . Pero lo más general es que se puede describir **paramétricamente** mediante:

$$\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \text{ con } \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$$

[2 grados de libertad frente al único  $t$  de las curvas].

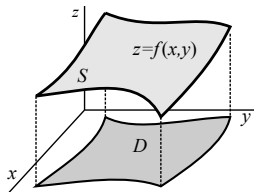
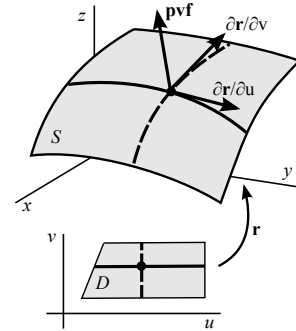
Suponemos que la superficie  $S = \mathbf{r}(D)$  es  $C^1$  [que lo es  $\mathbf{r}$ ]. Entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

serán vectores tangentes a las curvas contenidas en  $S$  que se obtienen tomando, respectivamente,  $v=k$  y  $u=k$ . Su producto vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ será un vector normal a } S. \quad [\text{Y al plano tangente, si es } \neq \mathbf{0}].$$

producto vectorial fundamental



Cuando la superficie está escrita en la forma  $z = f(x, y)$  una parametrización posible de  $S$  es  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , con  $(x, y) \in D$  proyección de  $S$  sobre  $z=0$ . El producto vectorial fundamental queda en este caso:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

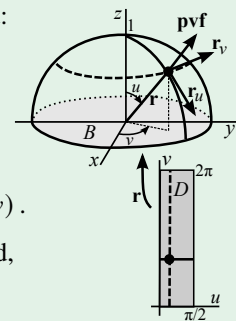
**Ej 1a.** Parametricemos la semisuperficie esférica unidad superior. Una posibilidad:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \cos u \cos v & u \in [0, \frac{\pi}{2}] & \quad \mathbf{r}_u = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} - \sin u \mathbf{k} \\ y(u, v) &= \cos u \sin v & v \in [0, 2\pi] & \quad \mathbf{r}_v = -\sin u \sin v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} \\ z(u, v) &= \sin u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k} = \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) = \sin u \mathbf{r}(u, v)$$

O podemos parametrizarla:  $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ , con  $(x, y) \in B$  círculo unidad,

que nos proporciona este otro **pvf**:  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .



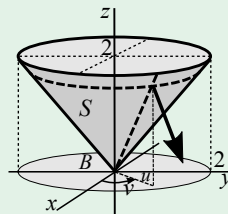
**Ej 2.**  $x = u \cos v$   $u \in [0, 2]$  Por ser  $x^2 + y^2 = z^2$ , nos da la superficie cónica de la derecha, comprendida entre  $z=0$  y  $z=2$ .  
 $y = u \sin v$   $v \in [0, 2\pi]$   
 $z = u$

[ $v=k$  sigue una recta y  $u=k$  una circunferencia]. El **pvf** es  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u \cos v, -u \sin v, u)$ . sentido opuesto al del dibujo →

[Para  $u=0$  el **pvf**= $\mathbf{0}$  y en ese punto no hay plano tangente].

De otra forma:  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ , con  $(x, y) \in B$  círculo de radio 2.

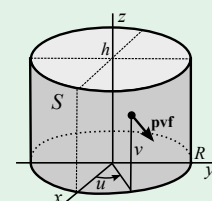
Siendo ahora el producto vectorial fundamental:  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-x(x^2+y^2)^{-1/2}, -y(x^2+y^2)^{-1/2}, 1)$ .



**Ej 3.**  $x = R \cos u$   $u \in [0, 2\pi]$  Describe una superficie cilíndrica de radio  $R$   
 $y = R \sin u$   $v \in [0, h]$  (pues  $x^2 + y^2 = R^2$ ) y de altura  $h$ .  
 $z = v$

Como  $\mathbf{r}_u = (-R \sin u, R \cos u, 0)$  es  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = R(\cos u, \sin u, 0)$ .  
 $\mathbf{r}_v = (0, 0, 1)$

No se puede escribir como  $z = f(x, y)$  [sí, por ejemplo, como  $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ ].



## Integrales de superficie de campos escalares

Sea  $S$  la superficie  $C^1$  dada por  $\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  inyectiva y sea  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $f(\mathbf{r}(u, v))$  es continua. Entonces:  $\iint_S f dS \equiv \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$ .

[Si  $S$  está formada por varias superficies  $C^1$  se suman las integrales].

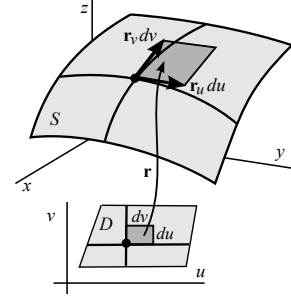
Como en las de línea, se prueba que la integral de una  $f$  escalar **sólo depende de la superficie** y no de cómo se parametrize. La notación  $\iint_S f dS$  es, pues, inequívoca.

Si  $f \equiv 1$  el valor de la integral representará el **área de la superficie**  $S$ :

$$\text{Área de } S: \quad A = \iint_S dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

[Pues un rectángulo  $du dv$  de  $D$  da lugar a un diferencial de superficie  $dS$  aproximadamente igual al rectángulo dado por los vectores  $\mathbf{r}_u du$  y  $\mathbf{r}_v dv$ , cuyo área es el módulo de su producto vectorial].

Para una superficie  $z=f(x, y)$  queda  $A = \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dx dy$ .



**Ej 1b.** Hallemos la integral de  $f(x, y, z) = z^2$  sobre la semisuperficie esférica  $S$  del ejemplo 1a.

Primero con  $\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ .  $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = |\sin u| \|\mathbf{r}\| = \sin u$  [ $\mathbf{r}$  es unitario y  $\sin u \geq 0$ ].

$$\text{Por tanto, } \iint_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du dv = -\frac{2\pi}{3} [\cos^3 u]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Con la parametrización  $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$  el módulo del producto vectorial fundamental resulta ser:

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \left[ \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \Rightarrow$$

$$\iint_S z^2 dS = \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr d\theta = \frac{2\pi}{3} [-(1-r^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Veamos ahora que la integral de superficie nos calcula bien el **área** de  $S$ :

$$A = \iint_S 1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin u du dv = -2\pi [\cos u]_0^{\pi/2} = 2\pi \quad [\text{el de toda la superficie esférica era } 4\pi \cdot 1^2].$$

Como siempre, los cálculos se complican si se usan las cartesianas en vez de las esféricas:

$$A = \iint_S dS = \iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2} dr d\theta = 2\pi [-(1-r^2)^{1/2}]_0^1 = 2\pi.$$

[impropias convergentes]

Al margen de integrales, como el **pvf** es un vector  $\mathbf{n}$  normal a una superficie, nos proporciona una tercera forma (además de las vistas en 2.1) de calcular el **plano tangente** a dicha superficie.

Por ejemplo, el plano tangente a  $S$  en el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  [para  $u=v=\frac{\pi}{4}$ ] se puede hallar así:

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1, 1, \sqrt{2}) \rightarrow (1, 1, \sqrt{2}) \cdot (x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 - x - y).$$

**Ej 4.** Sea  $S$  la porción de la superficie  $z=x+y^2$  sobre el triángulo  $D$  dado por  $0 \leq y \leq 1$  y  $0 \leq x \leq y$ . Hallemos su área y la  $\iint_S (z-x) dS$ .

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x+y^2) \rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-1, -2y, 1)$$

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{4y^2+2} \quad [ = ((f_x)^2 + (f_y)^2 + 1)^{1/2} ] \rightarrow$$

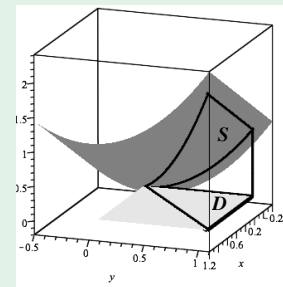
$$A = \iint_D \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dx dy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{4y^2+2} dx dy = \int_0^1 y \sqrt{4y^2+2} dy$$

$$= \frac{1}{12} (4y^2+2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \sqrt{6} - \frac{1}{6} \sqrt{2} \approx 0.99.$$

[La presencia de la raíz muchas veces, no aquí, conduce a integrales complicadas o no calculables].

$$\iint_S (z-x) dS = \iint_D y^2 \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dx dy = \int_0^1 \int_0^y y^2 \sqrt{4y^2+2} dx dy = \int_0^1 y^2 y \sqrt{4y^2+2} dy$$

$$\stackrel{4y^2+2=u}{=} \frac{1}{32} \int_2^6 (u-2) \sqrt{u} du = \frac{1}{32} \left[ \frac{2}{3} u^{5/2} - \frac{4}{3} u^{3/2} \right]_2^6 = \frac{1}{3} \sqrt{6} + \frac{1}{30} \sqrt{2} \approx 0.54.$$



## Integrales de superficie de campos vectoriales

Sea  $S$  la superficie de  $C^1$  dada por  $\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  inyectiva y sea  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua sobre  $S$ . Entonces:  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du dv$ .

Observemos que la integral anterior, si  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie con el mismo sentido que el producto vectorial fundamental, se puede escribir así:

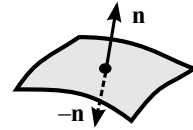
$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Esta expresión simplifica a veces algún cálculo y además clarifica el significado físico de este tipo de integrales: el **flujo** del campo vectorial  $\mathbf{f}$  a través de la superficie  $S$ .

Como sucedía con las integrales de línea de los campos vectoriales, se puede demostrar que, **salvo el signo**, esta integral es **independiente de la parametrización**.

Hay dos vectores unitarios normales a una superficie orientada:  $\mathbf{n}$  y  $-\mathbf{n}$  (que conste que hay superficies no orientadas como la banda de Moebius).

Parametrizaciones diferentes proporcionan **pvf** que pueden tener el sentido de uno u otro. Si nos dan el mismo, las integrales coinciden. Si no, tienen el signo opuesto.  $\mathbf{f}$ ,  $S$  y el sentido de la normal sí determinan la integral.



[Una notación más precisa sería:  $\iint_r \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ , incluyendo explícitamente la parametrización].

Los cuatro primeros ejemplos son integrales sobre las superficies parametrizadas hasta ahora.

**Ej 1c.** Integremos  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  sobre la semisuperficie esférica  $S$  del 1ab, con los  $\mathbf{r}$  de siempre.

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{r}(u, v) \cdot \left[ \underset{\substack{\text{r unitario} \\ \uparrow}}{\text{sen } u} \mathbf{r}(u, v) \right] du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen } u du dv = 2\pi [-\cos u]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

Con la otra parametrización:  $\mathbf{f} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right) \Rightarrow$

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \stackrel{\text{polares}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2} dr d\theta = 2\pi [-(1-r^2)^{1/2}]_0^1 = 2\pi.$$

Las integrales coinciden porque el **pvf** apuntaba en ambos casos en la misma dirección: hacia el exterior de la esfera. Y el valor es positivo porque el campo  $\mathbf{f}$  tiene también esa dirección (y así el flujo a través de  $S$  debe ser positivo).

**Ej 2\*.** Integremos la  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  de arriba, pero ahora sobre la superficie cónica  $S$  del ejemplo 2.

Teníamos:  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ,  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, 2]$ .

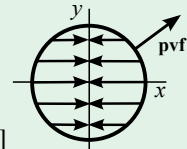
Por lo tanto:  $\mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = (u \cos v, u \sin v, u) \cdot (-u \cos v, -u \sin v, u) = -u^2 + u^2 = 0$ .

Así pues:  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0$ . [Este campo era tangente a nuestro cono y el flujo debía ser nulo].

**Ej 3\*.** Sobre el cilindro  $S$  del ejemplo 3, integremos el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x, 0, z^3)$ .

Eran:  $\mathbf{r}(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$ ,  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (R \cos u, R \sin u, 0)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, h]$ .

$$\begin{aligned} \text{Luego: } \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^h \int_0^{2\pi} (-R \cos u, 0, v^3) \cdot (R \cos u, R \sin u, 0) du dv \\ &= -R^2 \int_0^h \int_0^{2\pi} \cos^2 u du = -\frac{R^2 h}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2u) du = -\pi R^2 h. \end{aligned}$$



[Es  $< 0$  pues  $\mathbf{f}$  siempre apunta hacia el interior del cilindro y el **pvf** hacia fuera].

**Ej 4\*.** Sobre la superficie  $S$  del ejemplo 4, calculemos  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  para el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (2z, y, 1)$ .

Como eran  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x+y^2)$  y  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-1, -2y, 1)$ , la integral resulta ser:

$$\iint_D (2x+2y^2, y, 1) \cdot (-1, -2y, 1) dx dy = \int_0^1 \int_0^y (1-2x) dx dy = \int_0^1 (y-y^2) dy = \frac{1}{6}.$$

[Integrando campos vectoriales no aparecen las raíces que daban problemas con los escalares].

Integramos ahora un campo escalar y otro vectorial sobre una superficie plana (fácil de parametrizar, pues).

**Ej 5.** Parametrizamos el triángulo plano  $S$  en el espacio cuyos vértices son  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  y calculamos: a) su área, b)  $\iint_S x \, dS$ , c)  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ , si  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, z, -z)$ .

El plano por los puntos es claramente  $x+y+z=1$  y la parametrización de  $S$ :

$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1-x-y)$ , con  $(x, y) \in T$  triángulo del dibujo.

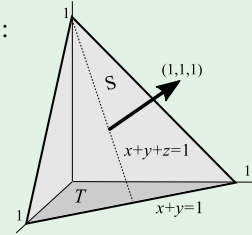
Entonces el **pvf** será  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (1, 1, 1)$  y  $\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{3}$ .

a) El área de  $S$  será:  $A = \iint_S dS = \sqrt{3} \iint_T dx \, dy = \sqrt{3} \cdot \text{área de } T = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ .

[Era el área de un triángulo cuya base es  $\sqrt{2}$  y cuya altura es  $\sqrt{3}/2$ ].

b)  $\iint_S x \, dS = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x \, dy \, dx = \sqrt{3} \int_0^1 (x-x^2) \, dx = \frac{1}{6} \sqrt{3}$  [valor menor, pues  $x$  es menor que 1 en  $S$ ].

c)  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_T (x, 1-x-y, -1+x+y) \cdot (1, 1, 1) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} x \, dy \, dx = \frac{1}{6}$  [la integral doble de b)].



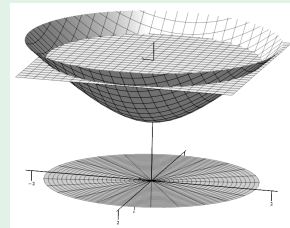
Integral de  $\mathbf{f}$  vectorial, sobre una superficie nueva que debemos parametrizar:

**Ej 6.** Halle el flujo del campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{k}$  hacia el exterior de la parte del hiperboloide de dos hojas  $z^2 = 1+x^2+y^2$  comprendida entre  $z=1$  (su vértice) y el plano  $z=2$ .

La parametrización más simple parece:

$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1+r^2})$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $r \in [0, \sqrt{3}]$ .

Con ella se tiene:  $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & s & r/\sqrt{\cdot} \\ -rs & rc & 0 \end{vmatrix} = (-\frac{c}{\sqrt{\cdot}} r^2, -\frac{s}{\sqrt{\cdot}} r^2, r)$ .  
[apunta hacia dentro]



El flujo hacia el exterior será, pues:  $-\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (0, 0, 1) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta) \, dr \, d\theta = -\pi [r^2]_0^{\sqrt{3}} = -3\pi$ .

Trabajando en cartesianas también salen cálculos cortos:

$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{1+x^2+y^2})$ ,  $(x, y) \in B$  círculo centrado de radio  $\sqrt{3}$ .  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-\frac{x}{\sqrt{\cdot}}, -\frac{y}{\sqrt{\cdot}}, 1)$ .

Y ahora es:  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_B (0, 0, 1) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) \, dx \, dy = -\iint_B 1 = -\text{área de } B = -3\pi$ .

En el último ejemplo de la sección tratamos con superficies esféricas de radio distinto de 1.

**Ej 7.** Calculemos  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ , siendo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, 1, 2)$ ,  $S$  la superficie  $x^2+y^2+z^2=9$  y  $\mathbf{n}$  el exterior.

Para la parametrización mantenemos aquí los nombres de las esféricas:

$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (3 \sin \phi \cos \theta, 3 \sin \phi \sin \theta, 3 \cos \phi)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\phi \in [0, \pi]$ ,

Haciendo el producto vectorial:  $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = 3 \sin \phi \mathbf{r}(\phi, \theta)$  [sentido correcto].

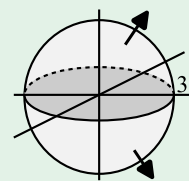
$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 9 \sin \phi (3 \sin \phi \cos \theta, 1, 2) \cdot (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \, d\phi \, d\theta$

$= 9 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{3}{2} \sin^3 \phi (1 + \cos 2\theta) + \sin^2 \phi \sin \theta + \sin 2\phi \right] \, d\phi \, d\theta = 27\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \, d\phi = 36\pi$ .  
[se anula] [se anula] [se anula]

Haciendo integrales de superficie, que exigen evaluar bastantes integrales de una variable, hay que intentar ahorrarse el mayor número posible cálculos con argumentos de imparidad o, con las tan habituales trigonométricas, de periodicidad.

Integrando sobre la **superficie esférica general**  $x^2+y^2+z^2=R^2$  los cálculos serían muy similares. Sustituyendo treses por eses mayúsculas se obtendría:

$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = R \sin \phi \mathbf{r}(\phi, \theta) = R^2 (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$ ,  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi R^2$ .

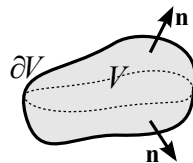


## 6.2. Teoremas de la divergencia y Stokes

### Teorema de la divergencia en el espacio (o de Gauss-Ostrogradsky)

Sea  $V$  región acotada del espacio cuya frontera  $\partial V$  es una superficie conexa,  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario exterior a  $V$  y sea  $\mathbf{f}$  de  $C^1$  en  $V$ . Entonces:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$



[La segunda integral es  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  si el producto vectorial fundamental apunta hacia el exterior].

Ni siquiera damos una idea de la demostración (mirar el Marsden-Tromba u otros libros de cálculo en  $\mathbf{R}^n$ ).

[Como la integral de superficie mide el flujo de un fluido sobre la frontera, es aplicable también aquí lo que dijimos en el plano al final del capítulo 5 sobre el significado de la divergencia: puede describir la tendencia de un fluido a acumularse o dispersarse].

[En el plano era necesario hallar el vector normal, pero en el espacio la parametrización nos da ya el  $\mathbf{p} \times \mathbf{v}$ ].

**Ej 1.** Comprobemos el teorema para  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  y  $V$  la famosa semiesfera de la sección 6.1.

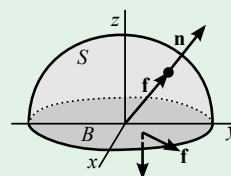
Por una parte:  $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_V dx \, dy \, dz = 3 \times \text{volumen de } V = 3 \times \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = 2\pi$ .

Por otra, la  $\partial V$  se compone de dos partes, la  $S$  superior y el círculo  $B$  de la base:  $\iint_{\partial V} = \iint_S + \iint_B$ .

Para la parte  $S$  de la frontera es  $\mathbf{n} = \mathbf{f} = \mathbf{r}$  [ $\Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 1$ ],  
y para la  $B$  es  $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$  [ $\Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ ].

Por tanto,  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S 1 \, dS + 0 = \text{área de } S = 2\pi$ .

[Nos llevó más tiempo hacer la  $\iint_S$  en 6.1 usando parametrizaciones].



Esto es excepcionalmente sencillo: no necesitamos parametrizar nada para comprobar el teorema. Compliquemos algo el campo vectorial (y las integrales), manteniendo el recinto:

Ahora sea  $\mathbf{g}(x, y, z) = (xy, z, 1)$  y sea  $V$  la misma semiesfera. La integral triple:

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = y, \quad \iiint_V y \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \theta \cos \theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{4} [-\cos \theta]_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi = 0.$$

[integrados función impar en volumen simétrico]

Hemos visto ya esta parametrización de  $S$  (le cambiamos el nombre a los parámetros):

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin \phi \mathbf{r}(\phi, \theta).$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi (\sin^2 \phi \cos \theta \sin \theta, \cos \phi, 1) \cdot (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^4 \phi \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^2 \phi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \phi) \, d\phi \, d\theta = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

[pues  $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = 0$ ,  $\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0$ ]

$$[\text{No sale mal con } \mathbf{r} = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \rightarrow \iint_B [y+1-x^2y(1-x^2-y^2)^{-1/2}] \, dy \, dx = \dots].$$

Sobre el círculo  $B$  de la base es  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (xy, 0, 1) \cdot (0, 0, -1) = -1$ , con lo que:

$$\iint_B \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iint_B 1 \, dS = -\text{área de } S = -\pi. \quad \text{Por tanto, } \iint_{\partial V} = \iint_S + \iint_B = \pi - \pi = 0.$$

**Ej 2.** Volvamos a comprobar el teorema, ahora para el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x, 0, z^3)$  y  $V$  el cilindro de los ejemplos 3 y 3\* de 6.1 cuya superficie lateral estaba descrita por:

$$\mathbf{r} = (R \cos u, R \sin u, v), \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (R \cos u, R \sin u, 0), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, h].$$

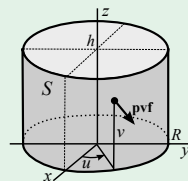
Debemos sumar a la  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = -\pi R^2 h$  calculada las integrales sobre las tapas.

En la tapa superior:  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (-x, 0, h^3) \cdot (0, 0, 1) = h^3 \rightarrow \iint_{B_R} h^3 = \pi R^2 h^3$ .

Y en la inferior:  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (-x, 0, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ . Así pues,  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \pi R^2 (h^3 - h)$ .

Por otra parte:  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 3z^2 - 1$ ,  $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r(3z^2 - 1) \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \frac{R^2}{2} (h^3 - h)$ .

cilíndricas

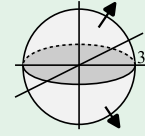


Es mucho más fácil hacer integrales triples que calcular flujos:

**Ej 3.** El flujo de  $\mathbf{f}(x,y,z) = (x, 1, 2)$  que hemos calculado en el ejemplo 7 de 6.1 sería inmediato utilizando el teorema de la divergencia:

Era  $S = \partial V$ , esfera de radio 3 y es  $\text{div } \mathbf{f} = 1$ . La integral allí calculada coincide con:

$$\iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta = 36\pi = \text{volumen de } V = \frac{4}{3}\pi 3^3.$$



Las superficies cerradas (salvo una esfera) exigirán más de una parametrización:

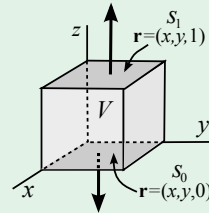
**Ej 4.** Verifiquemos Gauss sobre el cubo unidad  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  para  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ .

Muy fácil es aquí la integral de volumen de  $\text{div } \mathbf{f} = 2x + 2y + 2z$ :

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{f} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 2z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 2x \, dx + \int_0^1 2y \, dy + \int_0^1 2z \, dz = 3.$$

Pero la integral de superficie sobre  $\partial V$  debe dividirse en 6, una para cada cara:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_{S_0} + \iint_{S_1} + \iint_{L_0} + \iint_{L_1} + \iint_{F_0} + \iint_{F_1} \left[ \begin{array}{l} S \text{ abajo-arriba} \\ L \text{ izquierda-derecha} \\ F \text{ atras-frontend} \end{array} \right].$$



Para la  $S_1$  de arriba:  $\mathbf{r} = (x, y, 1)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (x^2, y^2, 1)$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ,  $\iint_{\square} 1 \, dS = 1$ .

Para la  $S_0$  de abajo:  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (x^2, y^2, 0)$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ ,  $\iint_{\square} 0 \, dS = 0$ .

Y las otras cuatro son muy parecidas:

$$\mathbf{r} = (0, y, z), \mathbf{n} = (-1, 0, 0) \rightarrow \iint_{\square} 0 \, dS = 0. \quad \mathbf{r} = (1, y, z), \mathbf{n} = (1, 0, 0) \rightarrow \iint_{\square} 1 \, dS = 1.$$

$$\mathbf{r} = (x, 0, z), \mathbf{n} = (0, -1, 0) \rightarrow \iint_{\square} 0 \, dS = 0. \quad \mathbf{r} = (x, 1, z), \mathbf{n} = (0, 1, 0) \rightarrow \iint_{\square} 1 \, dS = 1.$$

Por tanto,  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3$  como debía ser.

Última comprobación del teorema de Gauss que, aparentemente, exigiría calcular 4 integrales de superficie, pero que acaba exigiendo hallar solamente una y utilizar un poco de geometría elemental.

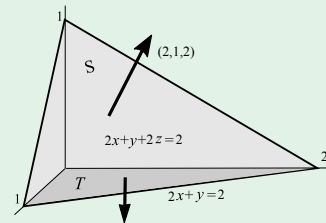
**Ej 5.** Comprobemos Gauss para  $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, xy, -1)$  en el  $V$  limitado por los planos coordenados y el plano inclinado que pasa por los puntos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ .

No es difícil dar la ecuación del plano inclinado:  $2x + y + 2z = 2$ .

[O a simple vista o usando que un vector normal es  $(1, 0, -1) \times (0, 2, -1)$ ].

Como  $\text{div } \mathbf{f} = x$  la integral triple es (por ejemplo en ese orden):

$$\begin{aligned} \iiint_V x &= \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \int_0^{1-x-y/2} x \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \left[ x(1-x) - \frac{xy}{2} \right] dy \, dx \\ &= \int_0^1 [2x(1-x)^2 - x(1-x)^2] dx = \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$



Habría que hallar el flujo sobre los 4 triángulos que forman  $\partial V$  en la dirección de sus  $\mathbf{n}$  exteriores.

Pero sobre  $x=0$  e  $y=0$  es  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 0$  pues  $\mathbf{f} = (0, 0, -1)$  y sus normales son  $(-1, 0, 0)$  y  $(0, -1, 0)$ .

El flujo es 0 sobre ambos triángulos.

Sobre  $T$  es  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (0, 0, -1) \cdot (0, 0, -1) = 1$ , con lo que  $\iint_T 1 = \text{área de } T = 1$  (base 1 y altura 2).

$$\left[ \text{Sería una pérdida de tiempo hacer } \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} dy \, dx = \int_0^1 2(1-x) dx = -(1-x)^2 \Big|_0^1 = 1 \right].$$

Sólo necesitamos integrales para el triángulo inclinado  $S$  que describimos en la forma conocida:

$$\mathbf{r}(x, y) = \left( x, y, 1 - x - \frac{y}{2} \right), \quad (x, y) \in T.$$

Y sabemos que en estos casos es  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (1, \frac{1}{2}, 1)$ . Así que el flujo sobre  $S$  será:

$$\iint_T (0, xy, -1) \cdot \left( 1, \frac{1}{2}, 1 \right) dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2(1-x)} \left( \frac{xy}{2} - 1 \right) dy \, dx = \int_0^1 [x(1-x)^2 - 2(1-x)] dx = \frac{1}{12} - 1.$$

El flujo total sobre la frontera de  $V$  es, sumando las dos integrales no nulas,  $1 + \frac{1}{12} - 1 = \frac{1}{12}$ .

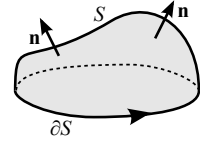
Hemos comprobado, pues, que coinciden las integrales  $\iiint_V \text{div } \mathbf{f} = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$ .

Si el teorema de la divergencia relacionaba una integral en un volumen con una de superficie en su borde, el de Stokes relaciona una de superficie con una de línea:

### Teorema de Stokes

Sean  $S$  una superficie en el espacio limitada por la curva  $\partial S$  y  $\mathbf{f} \in C^1$  en  $S$ .

Entonces:  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ , con  $\mathbf{n}$  vector unitario normal a  $S$  y los sentidos de  $\mathbf{n}$  y de recorrido de  $\partial S$  indicados en el dibujo.



[Caminando por la  $\partial S$ , la superficie quedará a nuestra izquierda y la normal apunta de los pies a la cabeza. Estamos suponiendo con esto que nuestra superficie es orientable para poderlo afirmar].

[Podríamos alternativamente escribir  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  cuando la  $\mathbf{r}$  que utilizamos da el sentido de  $\mathbf{n}$  adecuado].

[Cuando  $S$  es una región del plano  $xy$  es  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , con lo que  $\text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = g_x - f_y$ , y  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  se reduce a  $f \, dx + g \, dy$ : el teorema de Stokes pasa a convertirse en el de Green. Y como sucedía allí, para un campo conservativo las dos integrales son nulas, por anularse el rotacional y por ser  $\partial S$  un camino cerrado].

Resumamos la demostración para una superficie de la forma  $(x, y, k(x, y))$  con  $k$  de  $C^2$  en  $D$ .

Llamando  $\mathbf{f} = (f, g, h)$ , es  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [-k_x(h_y - g_z) - k_y(f_z - h_x) + (g_x - f_y)] \, dx \, dy \, dz$ .

Sea  $\mathbf{d}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , una parametrización (en sentido adecuado) de  $\partial D$ .

Entonces  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), k(x(t), y(t)))$ ,  $t \in [a, b]$  será una parametrización de  $\partial S$  y se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot (x', y', k_x x' + k_y y') \, dt = \int_a^b [(f(\mathbf{c}) + h(\mathbf{c}) k_x) x' + (g(\mathbf{c}) + h(\mathbf{c}) k_y) y'] \, dt \\ &= \int_{\partial D} (f + h k_x) \, dx + (g + h k_y) \, dy \stackrel{\uparrow \text{Green}}{=} \iint_D (g_x + g_z k_x + h_x k_x - f_y - f_z k_y - h_y k_x) \, dx \, dy \end{aligned}$$

**Ej 1\*.** Comprobamos el teorema para i)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  y ii)  $\mathbf{g}(x, y, z) = (0, 0, y)$ , y la  $S$  habitual.

Para i) es  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0} \Rightarrow \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$ . Además es  $C^1(\mathbf{R}^3)$  con lo que  $\mathbf{f}$  deriva de un potencial

[y casi a ojo se ve que  $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$  cumple  $\nabla U = \mathbf{f}$ ]. Por tanto,  $\oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 0$  también.

Para ii) debemos echar alguna cuenta más pues  $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{i}$  [ $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (1, 0, 0) \cdot (x, y, z) = x$ ].

Entonces:  $\iint_S \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S x \, dS = \int_0^{2\pi} \cos v \, dv \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du = 0$  [la primera integral lo es].

La integral también se puede hacer:  $\iint_B \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (1-r^2)^{-1/2} \cos \theta \, dr \, d\theta = 0$ .

Una posible parametrización de  $\partial S$  es  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = (0, 0, \sin t)$ .

Así pues,  $\oint_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (0, 0, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0$ , como debía ser.

[La integral de línea a lo largo de la circunferencia se ha anulado, a pesar de no ser el campo conservativo. En este caso,  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{c}'$  eran ortogonales. Sobre otras curvas cerradas, la integral de  $\mathbf{g}$  será distinta de 0. Dijimos que para que  $\mathbf{g}$  fuese conservativo, su integral a lo largo de **todo** camino cerrado debía ser nula].

**Ej 6.** Comprobamos ahora Stokes para el triángulo del ejemplo 5 de 6.1 y  $\mathbf{f}(x, y, z) = (z^3, 0, -3(x+y))$ .

La parametrización de  $S$  era  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1-x-y)$ , con  $(x, y) \in T$  y el  $\mathbf{pvf}$  era  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (1, 1, 1)$  (que apunta en el sentido que pide Stokes).

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^3 & 0 & -3(x+y) \end{vmatrix} = 3(-1, 1+z^2, 0). \text{ Por tanto:}$$

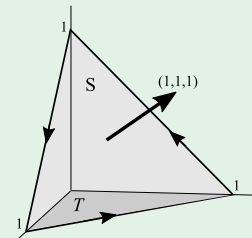
$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= 3 \iint_T z^2 \, dx \, dy = 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 [-(1-x-y)^3]_0^{1-x} \, dx = \int_0^1 (1-x)^3 \, dx = -\frac{1}{4}(1-x)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

[Elegiendo parametrizaciones (no habituales)  $\mathbf{r}(x, z)$  o  $\mathbf{r}(y, z)$  se simplificarían algo algunos cálculos].

Parametrizaciones posibles de los 3 segmentos de  $\partial S$  en el sentido dibujado son, por ejemplo:

$$(t, 1-t, 0), t \in [1, 0], \quad (0, t, 1-t), t \in [1, 0], \quad (t, 0, 1-t), t \in [0, 1] \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_1^0 (0, 0, 3t) \cdot (1, -1, 0) + \int_1^0 ((1-t)^3, 0, -3t) \cdot (0, 1, -1) + \int_0^1 ((1-t)^3, 0, -3t) \cdot (1, 0, -1) \\ &= \int_1^0 0 + \int_1^0 3t + \int_0^1 (1+3t^2-t^3) = 0 - \frac{3}{2} + 1 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



**Ej 7.** Verificamos ahora el teorema con  $\mathbf{g}(x, y, z) = (x+y, 2x, z)$  para el hiperboloide  $z^2 = 1+x^2+y^2$ , con  $1 \leq z \leq 2$ , tratado en el ejemplo 6 de 6.1.

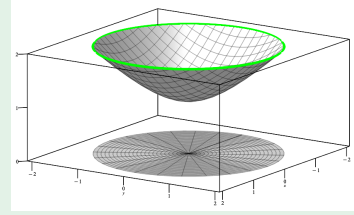
$$\text{rot } \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & 2x & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1), \text{ que es el campo } \mathbf{f} \text{ integrado allí.}$$

Ahora escogeremos la  $\mathbf{n}$  hacia arriba y será  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 3\pi$ .

Parametrizamos la  $\partial S$  en el sentido adecuado para Stokes:

$$\mathbf{c}(t) = (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t, 2), \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{Y es entonces: } \oint_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}(c+s), 2\sqrt{3}c, 2) \cdot (-\sqrt{3}s, \sqrt{3}c, 0) dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} (2c^2 - s^2 - sc) dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (3 \cos 2t + 1) dt = 3\pi, \text{ como debía.} \end{aligned}$$



**Ej 8.** Comprobemos otra vez Stokes, ahora para el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, 1, y)$  y la superficie  $S$  descrita por  $y+z=0$  y  $x^2+y^2 \leq 4$ .

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & 1 & y \end{vmatrix} = (1, 1, 0). \quad \begin{aligned} \mathbf{r}(x, y) &= (x, y, -y) \text{ con } D = B_2(\mathbf{0}), \\ \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y &= (-f_x, -f_y, 1) = (0, 1, 1). \end{aligned}$$

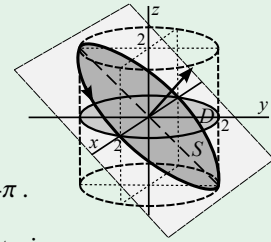
$$\rightarrow \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (-y, 1, y) \cdot (0, 1, 1) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r - r^2 \sin \theta) dr d\theta = 4\pi.$$

O bien, sin parametrizar: viendo el plano, es  $\mathbf{n} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  su normal unitaria.

Luego  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{2}} dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{área de } S = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2$ . [El área de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$  es  $\pi ab$ ].

La elipse  $\partial S$  (en sentido correcto) se puede parametrizar:  $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, -2 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= 2 \int_0^{2\pi} (-2 \sin t, 1, 2 \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, -\cos t) dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t + \cos t - 2 \sin t \cos t) dt = 4\pi. \end{aligned} \quad \text{[Se anulan todas menos la integral de la constante].}$$



**Ej 9.** Comprobemos Stokes para la superficie  $z = 4 - 4x^2 - y^2$  con  $z \geq 0$  y  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, 2x, 1 + yz)$ .

La parametrización más sencilla de la elipse que limita  $S$  (en el sentido del dibujo) es:  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 2 \sin t, 0)$ .

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (2 \sin t, 2 \cos t, 1) \cdot (-\sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t - 2 \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} (1 + 3 \cos 2t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Una posible parametrización de la superficie  $S$  es

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 4 - 4x^2 - y^2), \quad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (8x, 2y, 1), \quad (x, y) \in D, \text{ región elíptica.}$$

[El  $\mathbf{pvf}$  apunta en el sentido adecuado al recorrido de  $\partial D$  para aplicar Stokes].

$$\text{Ahora calculamos la integral de superficie de } \text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & 2x & 1 + yz \end{vmatrix} = (z, 0, 1).$$

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[ \underset{\text{impar y } D \text{ simétrico}}{8x(4 - 4x^2 - y^2)} + 1 \right] dx dy = \iint_D 1 \left[ = \text{área de } D = \pi \cdot 2 \cdot 1 \right].$$

Para hallar el área integrando hacemos (ejemplo de 4.1):  $x = \cos \theta$ ,  $y = 2 \sin \theta$ , con  $J = 2r \rightarrow$

$$\text{Área de } D = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r dr d\theta = 2\pi. \quad \text{[Sin usar la imparidad, saldría } \int_0^{2\pi} \int_0^1 16r^2 c(4 - 4r^2) dr d\theta = 0].$$

$$\text{[En cartesianas (tras simplificar) aparece: } \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\pi].$$

También podíamos parametrizar  $S$  usando las polares anteriores típicas de las elipses:

$$\mathbf{r} = (r \cos \theta, 2r \sin \theta, 4 - 4r^2), \quad \begin{aligned} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & 2s & -2r \\ -rs & 2rc & 0 \end{vmatrix} = 2r(8r \cos \theta, 4r \sin \theta, 1).$$

$$\text{Con ellas queda: } \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r(4 - 4r^2, 0, 1) \cdot (8r \cos \theta, 4r \sin \theta, 1) dr d\theta = 2\pi \text{ como antes.}$$

