Control t4 de Cálculo (28 de marzo de 2023)

Apellidos:		
Nombre:	**DNI:**	**Firma:**

Elegir entre los apartados op1] y op2].

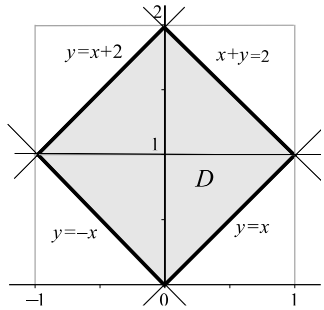
1. Calcular la integral $\iint_D e^{y-x}\,dx\,dy$, con D cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ y $(0,2)$. [1.8 ptos]

op1] Calcular esa misma integral haciendo el cambio lineal $\begin{cases} u=y-x \\ v=y+x \end{cases}$. [1.4 ptos]

2. Calcular en cilíndricas $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, con V cono limitado por $3z^2=x^2+y^2$ y $z=1$ (en $z\geq 0$). [1.8 ptos]

op2] Calcular la integral en uno de los otros sistemas de coordenadas (más corto en esféricas). [1.4 ptos]

1. Las cuatro rectas que limitan el cuadrado son claramente $y=\pm x$ e $y=2\pm x$.
En cualquiera de los dos órdenes de integración las dificultades son similares (y en ambos casos hay que dividir el recinto en 2):

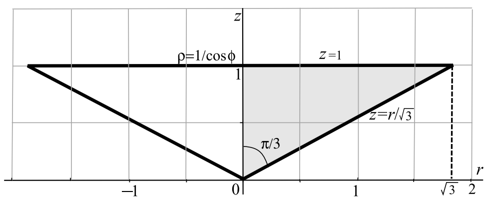


$$\int_{-1}^{0}\int_{-x}^{x+2} e^{y-x}\,dy\,dx+\int_{0}^{1}\int_{x}^{2-x} e^{y-x}\,dy\,dx=\int_{-1}^{0}\left[e^2-e^{-2x}\right]dx+\int_{0}^{1}\left[e^{2-2x}-1\right]dx$$
$$=e^2-1+\tfrac12\left[e^{-2x}\right]_{-1}^{0}-\tfrac12\left[e^{2-2x}\right]_0^1=e^2-1+\tfrac12-\tfrac12e^2-\tfrac12+\tfrac12e^2=\boxed{e^2-1}\,.$$
$$\int_{0}^{1}\int_{-y}^{y} e^{y-x}\,dx\,dy+\int_{1}^{2}\int_{y-2}^{2-y} e^{y-x}\,dx\,dy=\int_0^1\left[e^{2y}-1\right]dy+\int_1^2\left[e^2-e^{2y-2}\right]dy$$
$$=e^2-1+\tfrac12\left[e^{2y}\right]_0^1-\tfrac12\left[e^{2y-2}\right]_1^2=e^2-1+\tfrac12e^2-\tfrac12-\tfrac12e^2+\tfrac12=\boxed{e^2-1}\,.$$

op1] Despejando $\begin{cases} x=\frac12(v-u) \\ y=\frac12(u+v) \end{cases}$, $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}=-\frac12$, $|J|=\frac12$. Las rectas de los lados pasan a ser $u,v=0,2$.

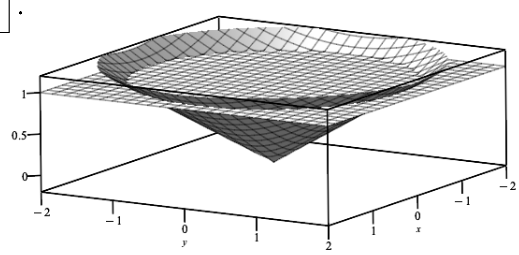
Por tanto, la integral se convierte en: $\frac12\int_0^2\int_0^2 e^u\,du\,dv=\frac12\int_0^2\left[e^2-1\right]dv=\boxed{e^2-1}$.

2. En cilíndricas la superficie cónica $3z^2=x^2+y^2$ pasa a ser $z=\pm\frac{r}{\sqrt3}$.
Y esta superficie corta el plano $z=1$ cuando $r=\sqrt3$.
V es el cono generado al rotar el triángulo respecto al eje z.



La integral en cilíndricas se puede hacer de dos formas sencillas:

$$\iiint_V z=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt3}\int_{r/\sqrt3}^{1}\overset{J\downarrow}{r}\,z\,dz\,dr\,d\theta=\pi\int_0^{\sqrt3}\left[r-\tfrac13r^3\right]dr=\pi\left[\tfrac32-\tfrac34\right]=\boxed{\tfrac{3\pi}{4}}\,.$$
$$\iiint_V z=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt3 z} r\,z\,dr\,dz\,d\theta=\pi\int_0^1 3z^3\,dz=\boxed{\tfrac{3\pi}{4}}\,.$$



op2] En esféricas, el plano se complica, pasando a ser $\rho=1/\cos\phi$.
Aunque el ángulo ϕ varía simplemente de 0 a $\frac{\pi}{3}$ $\left[\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt3\right]$.

$$\iiint_V z=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{1/\cos\phi}\rho^3\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{2\pi}{4}\int_0^{\pi/3}\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi}\,d\phi$$
$$=\tfrac{\pi}{4}\left[\cos^{-2}\phi\right]_0^{\pi/3}=\tfrac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{1/4}-\tfrac11\right]=\boxed{\tfrac{3\pi}{4}}\,.$$

En cartesianas es calculable, pero claramente más largo (la base D es el círculo $x^2+y^2=3$):

$$\iiint_V z\,dz\,dy\,dx=\int_{-\sqrt3}^{\sqrt3}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}/3}^{1} z\,dz\,dy\,dx=\tfrac23\int_0^{\sqrt3}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\left[3-x^2-y^2\right]dy\,dx=\tfrac49\int_0^{\sqrt3}(3-x^2)^{3/2}\,dx$$
$$\underset{x=\sqrt3\operatorname{sen}t\uparrow}{=}4\int_0^{\pi/2}\cos^4t\,dt=\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cos2t+\tfrac{1+\cos4t}{2}\right)dt=\boxed{\tfrac{3\pi}{4}}\,.$$

Control t5 de Cálculo (25 de abril de 2023)

Apellidos:		
Nombre:	**DNI:**	**Firma:**

Elegir entre los apartados b] y b*] del problema 2.

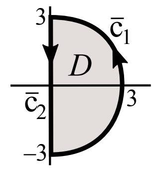
1. Comprobar el teorema de Green para $\bar{f}(x,y)=\left(y^2,x^2\right)$ y el semicírculo D dado por $x^2+y^2\leq 9$ con $x\geq 0$. [3 ptos]

2. Sean $\bar{g}(x,y,z)=\left(3,z^2-1,2yz\right)$ y $\bar{c}(t)=\left(t^2,t,t^2\right)$, $t\in[0,1]$. **a]** Calcular $\operatorname{div}\bar{g}$ y $\operatorname{rot}\bar{g}$.

Calcular una de estas dos integrales de línea:
b] la del campo escalar $\int_{\bar{c}}\operatorname{div}\bar{g}\,ds$, [2 ptos]
b*] la del campo vectorial $\int_{\bar{c}}\bar{g}\cdot d\bar{s}$.

1. $g_x-f_y=2(x-y)$. Para hallar $\iint_D$ parece mejor usar polares:

$$2\iint_D(x-y)\,dx\,dy=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^3 r^2(\underset{\text{par}}{\cos\theta}-\underset{\text{impar}}{\operatorname{sen}\theta})\,dr\,d\theta=4\cdot 9\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta=36\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}=\boxed{36}.$$



En cartesianas: $2\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}(x-y)\,dy\,dx=4\int_0^3 x\left(9-x^2\right)^{1/2}dx=-\frac{4}{3}\left(9-x^2\right)^{3/2}\Big]_0^3=\frac{4\cdot 27}{3}=36.$

O bien: $\int_{-3}^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}(2x-2y)\,dx\,dy=\int_{-3}^3\left(9-y^2-\underset{\text{impar}}{2y\sqrt{9-y^2}}\right)dy=54-2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3=54-18=36.$

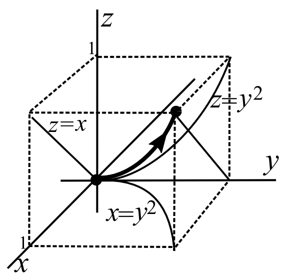
Parametrizando ∂D. Semicircunferencia: $\bar{c}_1=(3\cos t,3\operatorname{sen}t)$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Segmento: $(0,y)$, $y\in[3,-3]$.

$$\int_{\bar{c}_1}\bar{f}\cdot d\bar{s}=27\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\underset{c^3-s^3\text{ (par–impar)}}{(s^2,c^2)\cdot(-s,c)}\,dt=54\int_0^{\pi/2}\underset{c-s^2c}{\cos^3 t}\,dt=54\left[\operatorname{sen}t-\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2}=36.$$

$\Big[$En cartesianas: $\bar{c}_*=\left(\sqrt{9-y^2},y\right)$, $y\in[-3,3]$. $\int_{\bar{c}_*}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{-3}^3\left(y^2,9-y^2\right)\cdot\left(\frac{-y}{\sqrt{\cdot}},1\right)dx\overset{||}{=}2\int_0^3\left(9-y^2-\underset{\text{impar}}{\frac{y^3}{\sqrt{\cdot}}}\right)dy\Big].$

Para el segmento: $\int_{\bar{c}_2}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_3^{-3}\underset{=0}{\left(y^2,0\right)\cdot(0,1)}\,dy=0$. Por tanto, $\oint_{\partial D}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\boxed{36}$, como la doble.

2. **a]** $\operatorname{div}\bar{g}=0+0+2y=\boxed{2y}$. $\operatorname{rot}\bar{g}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ 3&z^2-1&2yz\end{vmatrix}=(2z-2z,0,0)=\boxed{\bar{0}}.$



b] Es $\bar{c}'(t)=(2t,1,2t)$, $\|\bar{c}'\|=\sqrt{1+8t^2}$. $\operatorname{div}\bar{g}\left(\bar{c}(t)\right)=2t$. Por lo tanto:

$$\int_{\bar{c}}\operatorname{div}\bar{g}\,ds=\int_0^1 2t\sqrt{1+8t^2}\,dt=\tfrac{1}{12}\left(1+8t^2\right)^{3/2}\Big]_0^1=\tfrac{27-1}{12}=\boxed{\tfrac{13}{6}}.$$

b*] Como $\operatorname{rot}\bar{g}=\bar{0}$ y es además $\bar{g}\in C^1$ en $\mathbf{R}^3$ $\Rightarrow$ existe función potencial U.

$U_x=3\ \rightarrow\ U=3x+p(y,z)$
$U_y=z^2-1\ \rightarrow\ U=yz^2-y+q(x,z)$, $U=3x-y+yz^2\ \Rightarrow\int_{\bar{c}}\bar{g}\cdot d\bar{s}=U(1,1,1)-U(0,0,0)=\boxed{3}$ para cualquier $\bar{c}$.
$U_z=2yz\ \rightarrow\ U=yz^2+r(x,y)$

También podemos utilizar la definición con la parametrización dada:

$$\int_{\bar{c}}\bar{g}\cdot d\bar{s}=\int_0^1\left(3,t^4-1,2t^3\right)\cdot(2t,1,2t)\,dt=\int_0^1\left(6t+5t^4-1\right)dt=3t^2+t^5\Big]_0^1-1=\boxed{3}.$$

O, como no depende del camino, tomar el camino más simple que une los puntos: $\bar{c}_*(t)=(t,t,t)$, $t\in[0,1]$ $\rightarrow$

$$\int_{\bar{c}_*}\bar{g}\cdot d\bar{s}=\int_0^1\left(3,t^2-1,2t^2\right)\cdot(1,1,1)\,dt=\int_0^1\left(2+3t^2\right)dt=2+1=\boxed{3}.$$